LYON 1991

2ème PROBLÈME

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$.

I - Calcul de I_1

1. Montrer que l'intégrale $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,dx$ est convergente.

2. Vérifier que, pour tout réel $x \neq -1$,

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1}\right).$$

3. On considère la fonction f définie sur $[\,0\,,+\infty\,[$ par

$$f(x) = \ln\,(x^2 - x + 1) - 2\sqrt{3}\ \mathrm{Arc\,tan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\ .$$

Calculer la fonction dérivée de f .
En déduire I_1 .

II - Étude de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx$ est convergente .

---

2. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$3\,n\,I_{n+1} = (3\,n-1)\,I_n\ .$$

Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

3. Soient a un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et n un entier supérieur ou égal à 1.
Montrer les trois inégalités suivantes :

$$\int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx \leq a\ ,\quad \int_a^1 \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx \leq \frac{1-a}{(1+a^3)^n}\ ,\quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n}\,dx \leq \frac{1}{3n-1}\ .$$

4. Déduire de la question précédente la limite de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

III - Étude de séries numériques associées à la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

1. On considère les trois suites définies par :
pour $n \geq 1$, $u_n = n^{1/3} I_n$, $v_n = \ln u_n$, $w_n = v_{n+1} - v_n$.

a. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de w_n en fonction de $\dfrac{1}{n}$.

Quelle est la nature de la série numérique de terme général w_n ?

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers un nombre réel h strictement positif. (On ne cherchera pas à calculer h).

c. Indiquer la nature de la série numériquè de terme général I_n.

2. On considère la série numérique de terme général $a_n = (-1)^{n-1} I_n$ pour $n \geq 1$.

a. La série numérique de terme général a_n est-elle absolument convergente ?

b. Soit $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, pour tout entier $n \geq 1$.

Vérifier que

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \dfrac{(-1)^n}{\left(1+x^3\right)^n}}{1 + \dfrac{1}{1+x^3}} \cdot \frac{1}{1+x^3}\, dx .$$

c. Montrer que la série numérique de terme général a_n est convergente.

d. Soit t un nombre réel strictement positif.
A l'aide d'un changement de variable simple calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+x^3}\, dx$.

En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.