Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1992

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Lundi 4 mai 1992 de 8 heures à 12 heures

PROBLÈME 1

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante sauf la question II-3 qui utilise les résultats de I.

Partie préliminaire

On considère les deux matrices à cœfficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour a et b réels, on pose $M_{a,b} = a\,A + b\,B$.
Enfin, on note $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $M_{a,b}$, c'est-à-dire

$$\mathcal{E} = \{ M_{a,b} \,/\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \}.$$

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
   Quelle est sa dimension ?

2. Exprimer en fonction de A et B les matrices suivantes :
   A^2, AB, BA, B^2.

3. Est-ce que le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{E}$?
   Est-ce que ce produit est commutatif ?

Partie I . Éléments propres des matrices de $\mathcal{E}$.

1. Montrer que $B^3 + B^2 - 2B = 0$.

2. a. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de B .
   b. Montrer que les vecteurs propres de B sont des vecteurs propres de A. Quelles sont les valeurs propres associées ? Est-ce que B et A sont diagonalisables ?

3. Soit $M_{a,b}$ une matrice de $\mathscr{E}$.
   a. Montrer que les vecteurs propres de B sont des vecteurs propres de $M_{a,b}$.
   b. Préciser, en fonction de a et b, les valeurs propres de $M_{a,b}$. Est-ce que $M_{a,b}$ est diagonalisable ?

Partie II . Exponentielle d'une matrice de $\mathscr{E}$.

Soit $M_{a,b}$ une matrice de $\mathscr{E}$ telle que $(a, b) \neq (0, 0)$.
On considère les deux matrices suivantes :

$$M_1 = A + B, \quad M_2 = A - 2B .$$

1. a. Calculer en fonction de M_1 et M_2 les matrices suivantes :
   $$(M_1)^2, \quad M_1 M_2, \quad M_2 M_1, \quad (M_2)^2.$$
   b. Montrer que (M_1, M_2) est une base du IR-espace vectoriel $\mathscr{E}$.
   c. On pose $M_{a,b} = x M_1 + y M_2$.
   Exprimer x et y en fonction de a et b.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   a. Calculer $(M_1)^n$ et $(M_2)^n$.
   b. En déduire l'expression de $(M_{a,b})^n$ en fonction de n, a, b, M_1 et M_2 .
   c. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (M_{a,b})^k$ avec la convention suivante :
   $(M_{a,b})^0 = I$ matrice unité d'ordre 3.
   - Montrer qu'il existe deux réels λ_n et μ_n tels que
   $$S_n = I + \lambda_n M_1 + \mu_n M_2 .$$
   - Montrer que les suites (λ_n) et (μ_n) convergent vers des réels λ et μ que l'on déterminera. On rappelle que, pour tout réel x ,
   $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x .$$

3. On pose alors
   $$e^{M_{a,b}} = I + \lambda M_1 + \mu M_2.$$
   Déterminer les vecteurs propres et les valeurs propres de $e^{M_{a,b}}$.
   Est-ce que $e^{M_{a,b}}$ est diagonalisable ?

PARTIE PRELIMINAIRE

Q1.. Par essence $\mathcal{E} = \{aA+bB \,;\, (a,b)\in\mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(A,B)$ ($\mathcal{E}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille (A,B)) ; donc $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et (A,B) en est une famille génératrice.

Notons que cette famille est libre. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que : $aA+bB = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

$$0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = a\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&-a&a\\-a&a&-a\\b&-b&2a-b\end{bmatrix}$$; donc $a=b=0$ ... cqfd

Finalement (A,B) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{E}$; (A,B) est une base de $\mathcal{E}$.

Finalement $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2.

Q2.. $$A^2=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&0\\-2&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}=2A$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}=A-B$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&-2\\2&-2&-2\end{bmatrix}=2B$$

$$BA=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&-2\\2&-2&-2\end{bmatrix}=2B$$

$A^2=2A$, $AB=BA=2B$ et $B^2=A-B$.

Q3.. Soit $(M,M')\in\mathcal{E}$. $\exists(a,b,a',b')\in\mathbb{R}^4$, $M=aA+bB$ et $M'=a'A+b'B$

$MM'=(aA+bB)(a'A+b'B)=aa'A^2+ba'BA+ab'AB+bb'B^2=2aa'A+2(ba'+ab')B+bb'(A-B)$;

$MM'=(2aa'+bb')A+(2ba'+2ab'-bb')B\in\mathcal{E}$

Le produit de deux éléments de $\mathcal{E}$ est un élément de $\mathcal{E}$

$2aa'+bb'=2a'a+b'b$ et $2ba'+2ab'-bb'=2b'a+2a'b-b'b$; $MM'=M'M$

Le produit est commutatif dans $\mathcal{E}$.

Remarque.. $\mathcal{E}$ est non vide, stable pour $+$, $\times$, $\cdot$ mais $I\notin\mathcal{E}$ (I ne peut être combinaison linéaire de (A,B) ... voir l'expression de $aA+bB$)

$B^3+B^2-2B = B(A-B)+(A-B)-2B = BA-B^2+A-3B = 2B-(A-B)+A-3B = 0$

Donc $\underline{\underline{B^3+B^2-2B=0}}$

Q2. a) → Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(B)$. $\exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$ tel que $BX = \lambda X$

$B^2X = \lambda BX = \lambda^2 X$ et $B^3X = \lambda^2 BX = \lambda^3 X$

$0 = (B^3+B^2-2B)X = B^3X + B^2X - 2BX = (\lambda^3+\lambda^2-2\lambda)X$

Comme $X \neq 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$: $\lambda^3+\lambda^2-2\lambda = 0$, $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = -2$

Donc $\underline{\underline{\operatorname{Spec} B \subset \{-2,0,1\}}}$

→ Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$BX = -2X \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ -z = -2y \\ x-y-z = -2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2x \\ y = -x \\ x+x+2x = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = -2x \end{cases}$. $F_{-2} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid BX = -2X\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$

$\underline{\underline{-2 \in \operatorname{Spec} B}}$

$BX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ -z = 0 \\ x-y-z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$ et $z = 0$. $F_0 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid BX = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$\underline{\underline{0 \in \operatorname{Spec} B}}$

$BX = X \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ -z = y \\ x-y-z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = -x \\ x+x-x = x \end{cases}$. $F_1 = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid BX = X\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

$\underline{\underline{1 \in \operatorname{Spec} B}}$

Finalement les valeurs propres de B sont $-2, 0, 1$ et les sous-espaces propres respectivement associés à ces 3 valeurs propres sont $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$, $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ et $\operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

B admet 3 valeurs propres distinctes $-2, 0, 1$ et $B \in \mathcal{M}_{\underline{\underline{3}}}(\mathbb{R})$, B est diagonalisable

Posons $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Posons $U = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $W = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$AU = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix} = 2U$; $AV = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0V$; $AW = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2W$

Ceci prouve que 1.. $0 \in \operatorname{Spec} A$, $2 \in \operatorname{Spec} A$

2.. Soit $\hat{F}_0$ (resp. $\hat{F}_2$) le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0 (resp. 2). $V \in \hat{F}_0$, $U \in \hat{F}_2$ et $W \in \hat{F}_2$; donc $\dim \hat{F}_0 \geqslant 1$ et $\dim \hat{F}_2 \geqslant 2$

Nous savons que $\hat{F}_0$ et $\hat{F}_2$ sont en somme directe donc $\dim \hat{F}_0 + \dim \hat{F}_2 = \dim(\hat{F}_0 + \hat{F}_2) \leqslant 3$

donc $3 \geqslant \dim \hat{F}_0 + \dim \hat{F}_2 \geqslant 1+2=3$; ceci exige $\dim \hat{F}_0 = 1$ et $\dim \hat{F}_2 = 2$

Ceci prouve alors que 1.. $\operatorname{Spec} A = \{0,2\}$

2.. $\dim \hat{F}_0 + \dim \hat{F}_2 = 3$; A est diagonalisable.

récap $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ($P = [U, V, W]$, $AU = 2U$, $AV = 0$ et $AW = 2W$)

Q3.. a) et b) pour le même prix

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$M_{a,b} = aA + bB$; $P^{-1}M_{a,b}P = a\,P^{-1}AP + b\,P^{-1}BP = a\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix}$

$M_{a,b}$ est donc semblable à $\begin{bmatrix} 2a-2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix}$

donc : 1°.. $M_{a,b}$ est diagonalisable

2°.. $\operatorname{Spec} M_{a,b} = \{2a-2b, 0, 2a+b\}$

PARTIE II

Q1.. a) $M_1^2 = (A+B)^2 \overset{AB=BA}{=} A^2 + 2AB + B^2 = 2A + 4B + A - B = 3(A+B) = 3M_1$

$M_1M_2 \underset{(M_1,M_2)\in E^2}{=} M_2M_1 = (A+B)(A-2B) = A^2 + BA - 2AB - 2B^2 = 2A + 2B - 4B - 2(A-B) = 0$

$M_2^2 = (A-2B)^2 = A^2 - 4AB + 4B^2 = 2A - 8B + 4(A-B) = 6(A-2B) = 6M_2$

$\underline{\underline{M_1^2 = 3M_1 \; , \; M_1M_2 = M_2M_1 = 0 \; , \; M_2^2 = 6M_2.}}$

b) Pour montrer que (M_1, M_2) est une base de E il suffit de montrer que la famille (M_1, M_2) est libre car $\dim E = 2$.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xM_1 + yM_2 = 0$

donc $xM_1^2 + yM_1M_2 = 0$; $xM_1^2 = 0$; $x = 0$ car $M_1^2 \neq 0$

donc $yM_2 = 0$; $y = 0$ car $M_2 \neq 0$

Finalement $x = y = 0$; c'est ce qu'il fallait montrer.

c) $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. (x,y) sont les coordonnées de $M_{a,b}$ dans la base (M_1, M_2)

$aA + bB = M_{a,b} = xM_1 + yM_2 = x(A+B) + y(A-2B) = (x+y)A + (x-2y)B$

donc $\begin{cases} x + y = a \\ x - 2y = b \end{cases}$; $x = \frac{1}{3}(2a+b)$ et $y = \frac{1}{3}(a-b)$.

$\underline{\underline{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad M_{a,b} = \frac{1}{3}(2a+b)M_1 + \frac{1}{3}(a-b)M_2}}$

Q2.. $n \in \mathbb{N}^*$

a.. $\Pi_1^2 = 3\Pi_1$ et $\Pi_2^2 = 6\Pi_2$

Une récurrence simple donne alors : $\underline{\underline{\Pi_1^n = 3^{n-1}\Pi_1 \text{ et } \Pi_2^n = 6^{n-1}\Pi_2}}$.

b.. $(\Pi_{a,b})^n = (x\Pi_1 + y\Pi_2)^n$ avec $x = \frac{1}{3}(2a+b)$ et $y = \frac{1}{3}(a-b)$.

$\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 = 0$ donc $\Pi_{a,b}^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k} \Pi_1^k \Pi_2^{n-k} \underset{\substack{\uparrow \\ \Pi_1^k\Pi_2^{n-k} = 0 \text{ pour } k \in [\![1,n-1]\!]}}{=} x^n \Pi_1^n + y^n \Pi_2^n = 3^{n-1}x^n\Pi_1 + 6^{n-1}y^n\Pi_2$

$\Pi_{a,b}^n = 3^{n-1}\left(\frac{2a+b}{3}\right)^n \Pi_1 + 6^{n-1}\left(\frac{a-b}{3}\right)^n \Pi_2$

$$\underline{\underline{\Pi_{a,b}^n = \frac{1}{3}(2a+b)^n\Pi_1 + \frac{1}{6}(2(a-b))^n\Pi_2}}$$

c.. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Pi_{a,b}^k = I + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}\frac{1}{3}(2a+b)^k\Pi_1 + \frac{1}{k!}\frac{1}{6}(2(a-b))^k\Pi_2\right)$

$S_n = I + \lambda_n\Pi_1 + \mu_n\Pi_2$ avec $\lambda_n = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2a+b)^k}{k!}$ et $\mu_n = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{(2(a-b))^k}{k!}$

$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2a+b)^k}{k!} = e^{2a+b}$ donc $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = \frac{1}{3}(e^{2a+b}-1)}}$; $\lambda = \frac{1}{3}(e^{2a+b}-1)$

De même : $\underline{\underline{\lim_{n\to+\infty}\mu_n = \frac{1}{6}(e^{2a-2b}-1)}}$; $\mu = \frac{1}{6}(e^{2a-2b}-1)$

Q3 .. $P^{-1}\Pi_{a,b}P = \begin{bmatrix} 2a-2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a+b \end{bmatrix}$

donc $\underset{(a=b=1)}{P^{-1}\Pi_1 P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $\underset{(a=1,b=-2)}{P^{-1}\Pi_2 P} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P^{-1}e^{\Pi_{a,b}}P = \underbrace{P^{-1}IP}_{I} + \lambda P^{-1}\Pi_1 P + \mu P^{-1}\Pi_2 P = \begin{bmatrix} 1+6\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+3\lambda \end{bmatrix}$

$e^{\Pi_{a,b}}$ est donc semblable à $\begin{bmatrix} 1+6\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+3\lambda \end{bmatrix}$. Par conséquent :

1°.. $e^{\Pi_{a,b}}$ est diagonalisable

2°.. $\operatorname{Spec} e^{\Pi_{a,b}} = \{1 + \frac{6}{6}(e^{2a-2b}-1), 1, 1 + 3\times\frac{1}{3}(e^{2a+b}-1)\} = \{e^{2a-2b}, 1, e^{2a+b}\}$.

$\operatorname{Spec}\Pi_{a,b} = \{2a-2b, 0, 2a+b\}$ et $\operatorname{Spec} e^{\Pi_{a,b}} = \{e^{2a-2b}, e^0, e^{2a+b}\}$ you see ?

Raffinons encore.

1er Cas.. $a \neq b$ et $b \neq -2a$

$e^{M_{a,b}}$ possède trois valeurs propres distinctes e^{2a-2b}, 1 et e^{2a+b}

Les trois sous-espaces propres associés sont $\mathrm{Vect}(U)$, $\mathrm{Vect}(V)$ et $\mathrm{Vect}(W)$.

2ième Cas.. $a=b$. Alors $b \neq -2a$ $\quad ((a,b)\neq(0,0))$

$e^{M_{a,b}}$ possède deux valeurs propres distinctes 1 et $e^{2a+b}=e^{3a}$

U et V sont deux vecteurs propres associés à 1 et W un vecteur propre associé à e^{3a}. $\mathrm{Vect}(U,V) \subset \check{F}_1 = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid e^{M_{a,b}}X = X\}$; $\dim \check{F}_1 \geqslant 2$.

$\mathrm{Vect}\, W \subset \check{F}_{3a} = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid e^{M_{a,b}}X = 3aX\}$; $\dim \check{F}_{3a} \geqslant 1$.

Comme $3 = \dim M_{3,1}(\mathbb{R}) \geqslant \dim(\check{F}_1 + \check{F}_{3a}) = \dim \check{F}_1 + \dim \check{F}_{3a} \geqslant 3$: $\dim \check{F}_1 = 2$ et $\dim \check{F}_{3a} = 1$. Finalement $\check{F}_1 = \mathrm{Vect}(U,V)$ et $\check{F}_{3a} = \mathrm{Vect}(W)$.

3ième Cas.. $b=-2a$; Alors $a \neq b$.

On montre de la même manière que $\mathrm{Spec}\, e^{M_{a,b}} = \{e^{6a}, 1\}$, que :

$\check{F}_{e^{6a}} = \mathrm{Vect}(U)$ et $\check{F}_1 = \mathrm{Vect}(V,W)$.