Q1 a) P_0 s'annule en 1, 2 et 3. $P_0(0) = -\frac{1}{6}(-1)(-2)(-3) = 1$

Par conséquent : $P_0(j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \in \{1,2,3\} \\ 1 \text{ si } j = 0 \end{cases}$

P_1 s'annule en 0, 2 et 3. $P_1(1) = \frac{1}{2}1(1-2)(1-3) = 1$

P_2 s'annule en 0, 1 et 3. $P_2(2) = -\frac{1}{2}2(2-1)(2-3) = 1$

P_3 s'annule en 0, 1 et 2. $P_3(3) = \frac{1}{6}3(3-1)(3-2) = 1$

Pour résumé : $\forall (i,j) \in [\![0,3]\!]^2$, $P_i(j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$ — P_0, P_1, P_2, P_3 sont les polynômes de Lagrange associés aux points 0, 1, 2, 3.

b) $\dim E = 4$, pour montrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E il suffit de prouver qu'elle est libre puisqu'elle possède quatre éléments.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que : $\sum_{i=0}^{3} \alpha_i P_i = 0_E$ — $P_i(j) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq i \\ 1 \text{ si } j = i \end{cases}$

$\forall j \in [\![0,3]\!]$, $\sum_{i=0}^{3} \alpha_i P_i(j) = 0$ donc $\forall j \in [\![0,3]\!]$, $0 = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i P_i(j) = \alpha_j$

Finalement : $\forall (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$, $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0_E \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une famille libre de E.

$\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.

c) $P_0 = -\frac{1}{6}(X^2 - 3X + 2)(X-3) = -\frac{1}{6}(X^3 - 6X^2 + 11X - 6) = 1 - \frac{11}{6}X + X^2 - \frac{1}{6}X^3$

$P_1 = \frac{1}{2}X(X-2)(X-3) = \frac{1}{2}(X^3 - 5X^2 + 6X) = 3X - \frac{5}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3$

$P_2 = -\frac{1}{2}X(X-1)(X-3) = -\frac{1}{2}(X^3 - 4X^2 + 3X) = -\frac{3}{2}X + 2X^2 - \frac{1}{2}X^3$

$P_3 = \frac{1}{6}X(X-1)(X-2) = \frac{1}{6}(X^3 - 3X^2 + 2X) = \frac{1}{3}X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ à la base $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11/6 & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$

d) Ici cela se gâte ! Normal c'est de l'algèbre linéaire lyonnais !

En effet calculer M^{-1} c'est trouver la matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}$; c'est donc trouver les coordonnées de $1, X, X^2$ et X^3 dans $\mathcal{B}$. Or ...

Soit $P \in E$ et soit $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$.

$\forall j \in [\![0,3]\!], \quad P(j) = \sum_{i=0}^{3} \alpha_i P_i(j) = \alpha_j$.

Les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$ sont donc : $P(0), P(1), P(2), P(3)$.

Par conséquent :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}.$$

Vérifions maintenant

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -\frac{1}{6} & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 0 & -5/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -3/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3/2 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{6} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ \frac{11}{6} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ -1/3 & 0 & 2 & 10 \\ 5/6 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ -1/3 & 0 & 2 & 10 \\ 1/3 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + \frac{11}{6} L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ $L_4 \leftarrow L_4 + \frac{1}{6} L_1$	$L_3 \leftarrow 2L_3$ $L_4 \leftarrow 2L_4$ $L_2 \leftrightarrow L_3$	$L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$ $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$	$L_4 \leftarrow L_4 + \frac{3}{2} L_3$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 \\ 0 & 0 & +1 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ +1/3 & 0 & -2 & -10 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$	$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{matrix}}$
$L_3 \leftarrow -L_3$ $L_4 \leftarrow 3L_4$	$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3} L_4$ $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3} L_4$	$L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

Q2) **a)** Question classique à savoir faire très proprement

Soit $(A,B)\in\mathbb{R}[X]^2$ et soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$\exists (U,V)\in\mathbb{R}[X]^2,\quad A = UP+\hat{A}$ et $B = VP+\hat{B}$; $\deg\hat{A}<\deg P$ et $\deg\hat{B}<\deg P$.

$\alpha A+\beta B = (\alpha U+\beta V)P + \alpha\hat{A}+\beta\hat{B}$ et $\deg(\alpha\hat{A}+\beta\hat{B}) < \deg P$

donc $\alpha U+\beta V$ et $\alpha\hat{A}+\beta\hat{B}$ sont respectivement le quotient et le reste dans la division de $\alpha A+\beta B$ par P. Par conséquent $\varphi(\alpha A+\beta B) = \alpha\hat{A}+\beta\hat{B} = \alpha\varphi(A)+\beta\varphi(B)$.

φ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Soit $T\in\mathbb{R}[X]$. $\deg\hat{T}<\deg P = 4$; $\hat{T}\in E$.

Soit $(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ la famille des coordonnées de $\hat{T}$ dans la base $\mathcal{C} = (P_0,P_1,P_2,P_3)$.

$P_i(j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j=i \\ 0 \text{ si } j\neq i\end{cases}$

$\forall j\in[\![0,3]\!],\quad \hat{T}(j) = \sum_{i=0}^{3}\alpha_i P_i(j) = \alpha_j$. Donc $\hat{T} = \sum_{i=0}^{3}\hat{T}(\ )P_i$

Or $\exists Q\in\mathbb{R}[X],\ T = QP+\hat{T}$. $\quad P(i)=0$

$\forall i\in[\![0,3]\!],\ T(i) = Q(i)P(i)+\hat{T}(i) = \hat{T}(i)$; $\underline{\hat{T} = \sum_{i=0}^{3}T(i)P_i}$

c) $\deg P = 4$ donc $\forall T\in E,\ \hat{T} = T$

$\forall T\in E,\quad T = \sum_{i=0}^{3}T(i)P_i$

En particulier

$$1 = P_0+P_1+P_2+P_3$$
$$X = P_1+P_2+P_3$$
$$X^2 = P_1+4P_2+9P_3$$
$$X^3 = P_1+8P_2+27P_3$$

$$M^{-1} = M_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 8 & 27 \end{bmatrix}$$

Q3 a) Posons $\forall Q \in E$, $\varphi'(Q) = QS$; φ' est évidemment une application linéaire de E dans $\mathbb{R}[X]$. Notons que : $\psi = \varphi \circ \varphi'$

$\forall T \in \mathbb{R}[X]$, $\deg \varphi(T) = \deg \hat{T} < \deg P = 4$; $\forall T \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(T) \in E$, φ peut donc être considérée comme une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans E.

Par conséquent : $\varphi' \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}[X])$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X], E)$ donc $\psi = \varphi \circ \varphi' \in \mathcal{L}(E,E) = \mathcal{L}(E)$

ψ est un endomorphisme de E.

b) $\forall j \in [\![0,3]\!]$, $\psi(P_j) = \widehat{P_j S} = \sum_{i=0}^{3} P_j(i) S(i) P_i \underset{\uparrow}{=} S(j) P_j$

$P_j(i) = \begin{cases} 0 \text{ si } j \neq i \\ 1 \text{ si } j = i \end{cases}$

$\forall j \in [\![0,3]\!]$, $\psi(P_j) = S(j) P_j$.

$\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de ψ donc ψ est diagonalisable.

$$M_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{bmatrix} S(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(3) \end{bmatrix}$$

. Notons que $\operatorname{Spec} \psi = \{S(0), S(1), S(2), S(3)\}$

c) $S(0) = 1$, $S(1) = 1$, $S(2) = 15$, $S(3) = 55$. $\operatorname{Spec} \psi = \{1, 15, 55\}$

Posons $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $F_\lambda = \operatorname{Ker}(\psi - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

$E = F_1 \oplus F_{15} \oplus F_{55}$ car ψ est diagonalisable.

En particulier $\dim F_1 + \dim F_{15} + \dim F_{55} = 4$

$P_0 \in F_1$ et $P_1 \in F_1$ donc $\operatorname{Vect}(P_0, P_1) \subset F_1$; $2 \leq \dim F_1$. Il est aussi clair que : $\dim F_{15} \geq 1$ et $\dim F_{55} \geq 1$. Notons enfin que $P_2 \in F_{15}$ et $P_3 \in F_{55}$

Si $\dim F_1 > 2$ ou $\dim F_{15} > 1$ ou $\dim F_{55} > 1$ alors $\dim F_1 + \dim F_{15} + \dim F_{55} > 4$

donc $\dim F_1 = 2$, $\dim F_{15} = 1$, $\dim F_{55} = 1$

Alors $F_1 = \operatorname{Vect}(P_0, P_1)$, $F_{15} = \operatorname{Vect}(P_2)$ et $F_{55} = \operatorname{Vect}(P_3)$.