PARTIE I

Q1 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme produit de deux fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}_+$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_0(x) = e^{-x^2}$; $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_0'(x) = -2x\, e^{-x^2} \leqslant 0$.

f_0 est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (et même strictement décroissante)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = x^n e^{-x^2}$ et $f_n'(x) = n x^{n-1} e^{-x^2} + x^n(-2x)e^{-x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n'(x) = (n - 2x^2)\, x^{n-1} e^{-x^2} = 2\left(\sqrt{n/2} - x\right)\left(\sqrt{n/2} + x\right) x^{n-1} e^{-x^2}$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est croissante sur $[0, \sqrt{\frac{n}{2}}]$ et décroissante sur $[\sqrt{\frac{n}{2}}, +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f_0'(x)$		$-$	
$f_0(x)$	1	$\searrow$	0

$n \geqslant 1$

x	0		$\sqrt{n/2}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	A_n	$\searrow$	0

$A_n = f\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right) = \left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)^n e^{-n/2}$.

(Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = 0$ par croissance comparée)

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (f_{n+1} - f_n)(x) = (x-1)x^n e^{-x^2}$

Par conséquent : $\forall x \in [0,1],\ f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ et $\forall x \in [1, +\infty[,\ f_{n+1}(x) \geqslant f_n(x)$.

Ce qui indique que $\mathcal{C}_{n+1}$ est en dessous de $\mathcal{C}_n$ " pour $x \in [0,1]$ " et au-dessus pour $x \in [1, +\infty[$.

d) Je vous laisse faire la frise...

Q2 a) Soit $n \in [\![2, +\infty[\![$; posons : $\forall x \in [0,1],\ \varphi_n(x) = f_n(x) - 1 + x$

φ_n est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1],\ \varphi_n'(x) = f_n'(x) + 1 > 0$.

φ_n est continue et strictement croissante sur $[0,1]$. $\sqrt{n/2} \geqslant 1$ donc $f_n'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0,1]$

φ_n réalise alors une bijection de $[0,1]$ sur $[\varphi_n(0), \varphi_n(1)] = [-1, 1/e]$.

$0 \in [-1, 1/e]$ donc $\exists!\, x_n \in [0,1]$, $\varphi_n(x_n) = 0$

Finalement l'équation $x \in [0,1]$ et $f_n(x) = 1-x$ admet une solution et une seule x_n.

b] Montrons d'abord que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ est croissante. Soit $n \in [\![2,+\infty[\![$.

Notons d'abord que φ_n est négative sur $[0, x_n]$ et positive sur $[x_n, 1]$.

$$\varphi_n(x_{n+1}) = f_n(x_{n+1}) + x_{n+1} - 1 \underset{\substack{\uparrow \\ f_{n+1}(x_{n+1}) = 1 - x_{n+1}}}{=} f_n(x_{n+1}) - f_{n+1}(x_{n+1}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{d'après Q1 c] car } x_{n+1} \in [0,1]}}{\geq} 0$$

$\varphi_n(x_{n+1}) \geq 0$ montre alors que : $x_{n+1} \in [x_n, 1]$; $x_{n+1} \geq x_n$.

Finalement $(x_n)_{n\geq 2}$ est croissante et majorée par 1 donc convergente.

Notons ℓ la limite de cette suite ; $\ell \in [0,1]$.

$\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $x_n^n e^{-x_n^2} = 1 - x_n$; $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $x_n \overset{(*)}{=} \left[(1-x_n)e^{x_n^2}\right]^{1/n}$

Supposons $\ell < 1$. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[(1-x_n)e^{x_n^2}\right] = (1-\ell)e^{\ell^2}$; par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[(1-x_n)e^{x_n^2}\right]^{1/n} = 1 \quad \left(\text{écrire} \quad e^{\frac{1}{n}\ln\left((1-x_n)e^{x_n^2}\right)}\right).$$

$$\text{Alors} \quad 1 = \lim_{n\to+\infty} \left[(1-x_n)e^{x_n^2}\right]^{1/n} \overset{(*)}{=} \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \quad !!$$

Donc $\ell < 1$ donne $\ell = 1$!

Finalement $(x_n)_{n\geq 2}$ converge vers 1.

Q3 a] Soit $n \in \mathbb{N}$. f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable. Notons encore que f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} [x^2 f_n(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} (x^{n+2} f_n(x)) = 0$; il existe donc A dans $\mathbb{R}_+$ tel que :

$\forall x \in [A, +\infty[$, $0 \leq x^2 f_n(x) \leq 1$. $\forall x \in [A,+\infty[$, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$.

La positivité de f_n et la convergence de $\int_A^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ donne la convergence de $\int_A^{+\infty} f_n(t)\,dt$ donc de $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ converge.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^A f_n(t)\,dt = \int_0^A \underset{u'}{\underset{\uparrow}{t^n}}\ \underset{v}{\underset{\uparrow}{e^{-t^2}}}\,dt \overset{\text{Intégration par parties}}{=} \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} e^{-t^2}\right]_0^A - \int_0^A \frac{1}{n+1} t^{n+1}(-2t)e^{-t^2}\,dt$$

$$\forall A \in \mathbb{R}_+,\ \int_0^A f_n(t)\,dt = \frac{1}{n+1} A^{n+1} e^{-A^2} + \frac{2}{n+1}\int_0^A f_{n+2}(t)\,dt$$

$\lim_{A \to +\infty} (A^{n+1} e^{-A^2}) = 0$ donc clairement (en faisant tendre A vers $+\infty$) il vient :

$$\underline{I_n = \frac{2}{n+1} I_{n+2}}.$$

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.

Posons pour tout p dans $\mathbb{N}$, $v_p = I_{2p}$ et $w_p = I_{2p+1}$ et amusons nous.

$$\forall p \in \mathbb{N},\ v_{p+1} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{2p+1}{2} v_p$$

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{v_{p+1}}{(2p+2)!} = \frac{2p+1}{2(2p+2)!} v_p = \frac{1}{2(2p+2)(2p)!} v_p = \frac{1}{4(p+1)(2p)!} v_p$$

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{v_{p+1}}{(2p+2)!} = \frac{4^p\ p!}{4^{p+1}\ (p+1)!}\ \frac{v_p}{(2p)!}\ ;\ \forall p \in \mathbb{N},\ \frac{4^{p+1}(p+1)!}{(2p+2)!} v_{p+1} = \frac{4^p\ p!}{(2p)!} v_p$$

La suite $\left(\dfrac{4^p\ p!}{(2p)!} v_p\right)_{p \geq 0}$ est alors constante !!

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \frac{4^p\ p!}{(2p)!} v_p = \frac{4^0\ 0!}{(2\times 0)!} v_0 = v_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}/2$$

Pour finir : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p} = \frac{(2p)!}{4^p p!} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

$\omega_{p+1} = I_{2p+3} = \frac{2p+2}{2} I_{2p+1} = (p+1)\omega_p$; $\quad \forall p \in \mathbb{N}, \frac{\omega_{p+1}}{(p+1)!} = \frac{\omega_p}{p!}$.

$\left(\frac{\omega_p}{p!}\right)_{p \geq 0}$ est constante donc : $\forall p \in \mathbb{N}, \frac{\omega_p}{p!} = \frac{\omega_0}{0!} = I_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt$

$I_1 = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right]_0^A = \frac{1}{2}$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}, \omega_p = I_1 p! = \frac{1}{2} p!$

$\forall p \in \mathbb{N}, \quad I_{2p+1} = \frac{p!}{2}$.

(Q4) .. Soit $n \in \mathbb{N}$. $g_n : t \mapsto t^n e^{-t^2} \cos(at)$ est continue donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
De plus : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq |g_n(t)| \leq t^n e^{-t^2} = f_n(t)$.

La positivité de $|g_n|$ et la convergence de $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ donne la convergence de $\int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt$.

Finalement : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} \cos(at) dt$ est convergente car absolument convergente.

On montre de la même manière que : $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} \sin(at) dt$ converge.

PARTIE II

(Q1) Soit $a \in \mathbb{R}$.

Intégration par parties

$\forall A \in \mathbb{R}_+, \int_0^A \underbrace{t e^{-t^2}}_{u'} \underbrace{\sin(at)}_{v} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(at)\right]_0^A - \int_0^A \left(-\frac{1}{2} e^{-t^2}\right)(a \cos(at)) dt$

$\forall A \in \mathbb{R}_+, \int_0^A t e^{-t^2} \sin(at) dt = -\frac{1}{2} e^{-A^2} \sin(aA) + \frac{1}{2} a \int_0^A e^{-t^2} \cos(at) dt$.

$\forall A \in \mathbb{R}_+$, $|e^{-A^2}\sin(aA)| \leq e^{-A^2}$

Par conséquent : $\lim\limits_{A\to+\infty} (e^{-A^2}\sin(aA)) = 0$ ... par encadrement.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans la dernière égalité de p4 il vient :

$$G(a) = \frac{1}{2}aF(a).$$

(Q2) Il s'agit ici de dériver sous le signe somme c'est à dire de faire :

" $F'(a) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(ax)dx\right)' = \int_0^{+\infty}(e^{-x^2}\cos(ax))'dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}(-x\sin(ax))dx = -G(a)$ "

on dérive par rapport à a

a) Fixons x dans $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction $\varphi : u \to \cos(xu)$. $(\varphi : u \mapsto \cos(xu))$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi'(u) = -x\sin(xu)$

φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi''(u) = -x^2\cos(xu)$.

φ'' étant continue sur $\mathbb{R}$, φ est alors de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Soit $\in \mathbb{R}$ et soit $h \in \mathbb{R}$.

Taylor-Lagrange, avec reste intégral, appliquée à φ à l'ordre 1 sur l'intervalle défini par $a+h$ et a donne :

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + (a+h-a)\varphi'(a) + \int_a^{a+h}(a+h-u)\varphi''(u)du \text{ ; c'est à dire :}$$

- $\cos((a+h)x) = \cos(ax) - hx\sin(ax) - x^2\int_a^{a+h}(a+h-u)\cos(xu)du$

1e cas.. $h \geq 0$. $\left|\int_a^{a+h}(a+h-u)\cos(xu)du\right| \leq \int_a^{a+h}(a+h-u)|\cos(xu)|du \leq \int_a^{a+h}(a+h-u)du$

$$\left|\int_a^{a+h}(a+h-u)\cos(xu)du\right| \leq \left[-\frac{(a+h-u)^2}{2}\right]_a^{a+h} = \frac{h^2}{2}.$$

2ème cas.. $h < 0$

$$\left|\int_a^{a+h}(a+h-u)\cos(xu)du\right| = \left|\int_{a+h}^{a}(a+h-u)\cos(xu)du\right| \leq \int_{a+h}^{a}|a+h-u||\cos(xu)|du \leq \int_{a+h}^{a}(u-a-h)du = \left[\frac{1}{2}(u-a-h)^2\right]_{a+h}^{a} = \frac{h^2}{2}.$$

b.. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\cos((a+h)x) - \cos(ax) + hx \sin(ax)\right| = x^2 \left|\int_a^{a+h} (a+h-u)\cos(xu)\,du\right| \leq \dfrac{x^2h^2}{2}$.

Par conséquent :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|e^{-x^2}\cos((a+h)x) - e^{-x^2}\cos(ax) + hx e^{-x^2}\sin(ax)\right| \leq \dfrac{h^2}{2} x^2 e^{-x^2}$.

Soit $A \in \mathbb{R}_+$.

$$\left|\int_0^A \left[e^{-x^2}\cos((a+h)x) - e^{-x^2}\cos(ax) + hx e^{-x^2}\sin(ax)\right]dx\right| \leq \int_0^A \left|e^{-x^2}\cos((a+h)x) - e^{-x^2}\cos(ax) + hx e^{-x^2}\sin(ax)\right|dx$$

Donc :

$$\left|\int_0^A e^{-x^2}\cos((a+h)x)\,dx - \int_0^A e^{-x^2}\cos(ax)\,dx + h\int_0^A x e^{-x^2}\sin(ax)\,dx\right| \leq \frac{h^2}{2}\int_0^A x^2 e^{-x^2}\,dx.$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos((a+h)x)\,dx$ converge et vaut $F(a+h)$, $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(ax)\,dx$ converge et vaut $F(a)$, $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2}\sin(ax)\,dx$ converge et vaut $G(a)$ et enfin $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ converge et vaut I_2 ! Par conséquent en faisant tendre A vers $+\infty$ dans la dernière inégalité on obtient : $|F(a+h) - F(a) + h\,G(a)| \leq \dfrac{h^2}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$.

En divisant par $|h|$ on obtient :

$$\left|\frac{F(a+h) - F(a)}{h} + G(a)\right| \leq \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$$

c) Soit $a \in \mathbb{R}$. $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{F(a+h)-F(a)}{h} + G(a)\right| \leq \dfrac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ et

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$.

Il vient alors : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(a+h)-F(a)}{h} + G(a) = 0$ ou $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(a+h)-F(a)}{h} = -G(a)$.

Ce qui signifie que : $\underline{F \text{ est dérivable en } a \text{ et que } F'(a) = -G(a).}$

<u>Remarque</u>.. Tout cela est classique et à savoir faire par

(Q3). Rappelons que : $\forall a \in \mathbb{R}$, $G(a) = \frac{a}{2} F(a)$ et $F'(a) = -G(a)$

Donc : $\forall a \in \mathbb{R}$, $F'(a) = \frac{-a}{2} F(a)$

Remarque.. F est solution de l'équation différentielle $y' = -\frac{x}{2} y$.

Posons : $\forall a \in \mathbb{R}$, $H(a) = e^{a^2/4} F(a)$.

H est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, $H'(a) = \frac{a}{2} e^{a^2/4} F(a) + e^{a^2/4} \times \left(-\frac{a}{2} F(a)\right) = 0$

H' est nulle sur $\mathbb{R}$ donc H est constante sur $\mathbb{R}$.

$\exists C \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $H(a) = C$.

Donc $\forall a \in \mathbb{R}$, $F(a) = C e^{-a^2/4}$.

Or : $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(0x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Par conséquent : $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = F(0) = C e^{-0^2/4} = C$.

Finalement : $\underline{\underline{\forall a \in \mathbb{R}, \quad F(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/4}}}$.

Exercices pour finir la page.

1.. Sachant que $J_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $I_1 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} J_n$, écrire un programme en TP 4 calculant J_n (l'utilisateur donne n et la machine rend J_n).

2.. De quelle manière retrouve-t-on $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ avec le programme de HEC ?

3.. Etudier les points d'inflexion de f_n.