LYON 1994

LYON 1994 **PROBLÈME 2**

PREMIÈRE PARTIE

On note $f_0 : [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto e^{-x^2}$

et, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 1$,

$f_n : [\,0\,;+\infty\,[\longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n e^{-x^2}$.

1. a. Étudier, pour tout entier naturel n, la continuité et la dérivabilité de f_n.
   b. Dresser le tableau des variations de f_0, et celui de f_n pour tout entier naturel non nul n.
   c. Pour tout x de $[\,0\,;+\infty\,[$ et tout entier naturel n, comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$ (on distinguera les cas $0 \leq x \leq 1$ et $x > 1$).
   d. On note C_n la courbe représentative de f_n. Tracer sur un même schéma C_0, C_1, C_4 (repère orthonormé, unité 10 cm). On ne cherchera pas à déterminer d'éventuels points d'inflexion.

2. (Les résultats de cette question 2. ne seront pas utilisés dans la suite du problème).
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, l'équation $f_n(x) = 1 - x$, d'inconnue $x \in [\,0\,;1\,]$, admet une solution et une seule, qu'on notera x_n.
   b. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge vers 1.

3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge. On note, pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.
   b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.
   c. En déduire la valeur de I_n pour tout entier naturel n (on distinguera deux cas suivant la parité de n et on donnera le résultat à l'aide de factorielles ; on rappelle : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$).

4. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel a, la convergence des intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \cos(ax)\,dx, \quad \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \sin(ax)\,dx.$$

DEUXIÈME PARTIE

On note F et G les applications de IR dans IR définies, pour tout réel a, par :

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(ax)\,dx, \quad G(a) = \int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2} \sin(ax)\,dx$$

(ces intégrales généralisées convergent d'après la question 4. de la première partie).

1. Démontrer : $\forall a \in \mathbb{R},\ G(a) = \frac{1}{2}\, a\, F(a)$.

2. a. Soient $a \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R},\ x \in [0\,;+\infty[$.

Montrer :

- $\cos\big((a+h)\,x\big) = \cos(ax) - hx \sin(ax) - x^2 \int_a^{a+h} (a+h-u)\cos(xu)\,du$
- $\left| \int_a^{a+h} (a+h-u)\cos(xu)\,du \right| \leq \frac{h^2}{2}$.

b. En déduire, pour tout nombre réel a et tout nombre réel non nul h :

$$\left| \frac{F(a+h)-F(a)}{h} + G(a) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx .$$

c. Montrer que F est dérivable sur IR et que :

$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad F'(a) = -G(a)$.

3. Calculer, en fonction du réel a, $F(a)$ et $G(a)$.

(On pourra considérer l'application H définie sur IR par $H(a) = e^{\frac{a^2}{4}} F(a)$).