

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1994

MATHÉMATIQUES 1ère épreuve (option générale)

Lundi 9 mai 1994 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées :

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

PROBLÈME 1

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

On note E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

On note \mathcal{B} la base canonique de E : $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

On définit les polynômes suivants :

$$P_0(X) = -\frac{1}{6} (X-1)(X-2)(X-3)$$

$$P_1(X) = \frac{1}{2} X(X-2)(X-3)$$

$$P_2(X) = -\frac{1}{2} X(X-1)(X-3)$$

$$P_3(X) = \frac{1}{6} X(X-1)(X-2).$$

- Pour tous entiers i et j entre 0 et 3, calculer $P_i(j)$.
 - Démontrer que la famille $\mathcal{C} = (P_0(X), P_1(X), P_2(X), P_3(X))$ est une base de E .
 - Donner la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{C} . On note M cette matrice.
 - Calculer M^{-1} par la méthode du pivot de Gauss : le détail des calculs devra figurer sur la copie.

2. On définit le polynôme :

$$P(X) = X(X-1)(X-2)(X-3).$$

On note φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme $T(X)$, associe le reste $\widehat{T(X)}$ de la division suivant les puissances décroissantes de $T(X)$ par $P(X)$.

a. Démontrer que φ est linéaire.

b. Démontrer que, pour tout polynôme $T(X)$:

$$\widehat{T(X)} = T(0)P_0(X) + T(1)P_1(X) + T(2)P_2(X) + T(3)P_3(X).$$

c. En utilisant la formule vue en b., déterminer les composantes des polynômes $1, X, X^2, X^3$ dans la base \mathcal{C} . Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

3. Soit $S(X)$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

On désigne par Ψ l'application qui, à tout polynôme $Q(X)$ de E , associe $\widehat{Q(X)S(X)}$.

a. Démontrer que Ψ est un endomorphisme de E .

b. Calculer $\Psi(P_0(X)), \Psi(P_1(X)), \Psi(P_2(X)), \Psi(P_3(X))$.
Est-ce que Ψ est diagonalisable ?

c. On se place ici dans le cas particulier : $S(X) = 2X^3 + X^2 - 3X + 1$.
Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Ψ .

Q1 a) P_0 s'annule en 1, 2 et 3. $P_0(0) = -\frac{1}{6}(-1)(-2)(-3) = 1$

Par conséquent: $P_0(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \{1, 2, 3\} \\ 0 & \text{si } j = 0 \end{cases}$

P_1 s'annule en 0, 2 et 3. $P_1(1) = \frac{1}{2}1(1-2)(1-3) = 1$

P_2 s'annule en 0, 1 et 3. $P_2(2) = -\frac{1}{2}2(2-1)(2-3) = 1$

P_3 s'annule en 0, 1 et 2. $P_3(3) = \frac{1}{6}3(3-1)(3-2) = 1$

Par conséquent: $\forall (i, j) \in \llbracket 0, 3 \rrbracket^2$, $P_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$

P_0, P_1, P_2, P_3 sont les polynômes de Lagrange associés aux points 0, 1, 2, 3.

b) $\dim E = 4$, pour montrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E il suffit de prouver qu'elle est libre puisque'elle possède quatre éléments.

Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tel que: $\sum_{i=0}^3 \alpha_i P_i = 0_E$

$\forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, $\sum_{i=0}^3 \alpha_i P_i(j) = 0$ donc $\forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, $0 = \sum_{i=0}^3 \alpha_i P_i(j) = \alpha_j$

Finalement: $\forall (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$, $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0_E \Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

$\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une famille libre de E .

$\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E .

c) $P_0 = -\frac{1}{6}(x^2 - 3x + 2)(x - 3) = -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 1 - \frac{11}{6}x + x^2 - \frac{1}{6}x^3$

$P_1 = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3) = \frac{1}{2}(x^3 - 5x^2 + 6x) = 3x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$

$P_2 = -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3) = -\frac{1}{2}(x^3 - 4x^2 + 3x) = -\frac{3}{2}x + 2x^2 - \frac{1}{2}x^3$

$P_3 = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 2x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

La matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ à la base $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11/6 & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix}$$

d) Ici cela se gâte! Normal c'est de l'algèbre linéaire lyonnaise!

En effet calculer π^{-1} c'est trouver la matrice de passage de B à B' ; c'est donc trouver les coordonnées de 1, x , x^2 et x^3 dans B . (e...)

Soit $P \in E$ et soit $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ses coordonnées dans B .

$$\forall j \in \{0, 1, 2, 3\}, P(j) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i P_i(j) = \alpha_j.$$

Les coordonnées de P dans la base B sont donc : $P(0), P(1), P(2), P(3)$.

Pour conclure :

$$\pi^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

Passons maintenant

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 3 & -312 & 313 \\ 1 & -512 & 2 & -312 \\ -\frac{1}{6} & 312 & -312 & 316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -312 & 313 \\ 0 & -512 & 2 & -312 \\ 0 & 312 & -312 & 316 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 313 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -312 & 313 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 313 \\ 0 & 0 & -1 & 213 \\ 0 & 0 & 312 & -213 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 313 \\ 0 & 0 & -1 & 213 \\ 0 & 0 & 0 & 313 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{11}{6} & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 46 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 313 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ \frac{11}{6} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 313 & 0 & 0 & 2 \\ -313 & 0 & 2 & 10 \\ 516 & 1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 313 & 0 & 0 & 2 \\ -313 & 0 & 2 & 10 \\ 313 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 + \frac{11}{6}L_1 & L_3 &\leftarrow 2L_3 & L_3 &\leftarrow L_3 + 5L_2 & L_4 &\leftarrow L_4 + \frac{3}{2}L_3 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - L_1 & L_4 &\leftarrow 2L_4 & L_4 &\leftarrow L_4 - 3L_2 & & \\ L_4 &\leftarrow L_4 + \frac{1}{6}L_1 & L_2 &\leftrightarrow L_3 & & & & \end{aligned}$$

1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	
0 1 -1 313	0 1 -1 0	0 1 0 0	
0 0 -1 -213	0 0 1 0	0 0 1 0	
0 0 0 1	0 0 0 1	0 0 0 1	
1 0 0 0	1 0 0 0	1 0 0 0	
313 0 0 2	0 -1 -3 -7	1 1 1 1	
313 0 -2 -10	1 2 4 8	1 2 4 8	
1 3 9 27	1 3 9 27	1 3 9 27	

$$\begin{aligned} L_3 &\leftarrow -L_3 & L_3 &\leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_4 & L_2 &\leftarrow L_2 + L_3 \\ L_4 &\leftarrow 3L_4 & L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_4 & & \end{aligned}$$

Q2) a) Question classique à savoir faire très proprement

Soit $(A, B) \in \mathbb{R}[X]^2$ et soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$\exists (U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$, $A = UP + \hat{A}$ et $B = VP + \hat{B}$; $\deg \hat{A} < \deg P$ et $\deg \hat{B} < \deg P$.

$\alpha A + \beta B = (\alpha U + \beta V)P + \alpha \hat{A} + \beta \hat{B}$ et $\deg(\alpha \hat{A} + \beta \hat{B}) < \deg P$

donc $\alpha U + \beta V$ et $\alpha \hat{A} + \beta \hat{B}$ sont respectivement le quotient et le reste dans la division de

$\alpha A + \beta B$ par P . Par conséquent $\varphi(\alpha A + \beta B) = \alpha \hat{A} + \beta \hat{B} = \alpha \varphi(A) + \beta \varphi(B)$.

pat bien un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b) Soit $T \in \mathbb{R}[X]$. $\deg \hat{T} < \deg P = 4$; $\hat{T} \in E$.

Soit (d_0, d_1, d_2, d_3) la famille des coordonnées de \hat{T} dans la base

$\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$.

$\forall j \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\hat{T}(j) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i P_i(j) = \alpha_j$. D'ac $\hat{T} = \sum_{i=0}^3 \hat{T}(i) P_i$

c) $\exists \varphi \in \mathbb{R}[X]$, $T = \varphi P + \hat{T}$. $\frac{P(i)=0}{\downarrow \hat{T}(i)}$

$\forall i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $T(i) = \varphi(i)P(i) + \hat{T}(i) = \hat{T}(i)$; $\hat{T} = \sum_{i=0}^3 T(i) P_i$

donc $\deg P = 4$ d'ac $\forall T \in E$, $\hat{T} = T$

$\forall T \in E$, $T = \sum_{i=0}^3 T(i) P_i$

En particulier $1 = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$

$x = P_1 + P_2 + P_3$

$x^2 = P_1 + 4P_2 + 9P_3$

$x^3 = P_1 + 8P_2 + 27P_3$

$$\pi^{-1} = \pi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 1 & 9 & 27 \end{bmatrix}$$

Q3 a) Posons $\forall \varphi \in E, \varphi'(\varphi) = \varphi S$; φ' est donc une application linéaire de E dans $\mathbb{R}[X]$. Notons que : $\psi = \varphi \circ \varphi'$

$\forall T \in \mathbb{R}[X], \deg \varphi(T) = \deg \tilde{T} < \deg P = 4$; $\forall T \in \mathbb{R}[X], \varphi(T) \in E$; φ peut donc être considérée comme une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans E .

Par conséquent : $\varphi' \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}[X])$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X], E)$ donc $\psi = \varphi \circ \varphi' \in \mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$
 ψ est un endomorphisme de E .

$$b) \forall j \in [0, 3], \psi(P_j) = \widehat{P_j} S = \sum_{i=0}^3 P_j(i) S(i) P_i = S(j) P_j$$

$$\underline{\underline{\forall j \in [0, 3], \psi(P_j) = S(j) P_j.}}$$

$P_j(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases}$

$\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E constituée de vecteurs propres de ψ donc ψ est diagonalisable.

$$\pi_{\mathcal{B}}(\psi) = \begin{bmatrix} S(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(3) \end{bmatrix}. \text{ Notons que } \text{Spec } \psi = \{S(0), S(1), S(2), S(3)\}$$

$$\underline{\underline{\subseteq}} \quad S(0) = 1, S(1) = 1, S(2) = 15, S(3) = 55. \quad \underline{\underline{\text{Spec } \psi = \{1, 15, 55\}}}$$

Pour $\forall \lambda \in \mathbb{R}, F_\lambda = \text{Ker}(\psi - \lambda \text{Id}_E)$.

$E = F_1 \oplus F_{15} \oplus F_{55}$ car ψ est diagonalisable.

En particulier $\dim F_1 + \dim F_{15} + \dim F_{55} = 4$

$P_0 \in F_1$ et $P_1 \in F_1$ donc $\text{Vect}(P_0, P_1) \subset F_1$; $2 \leq \dim F_1$. Et aussi

ce qui implique : $\dim F_{15} \geq 1$ et $\dim F_{55} \geq 1$. Notons enfin que $P_2 \in F_{15}$ et $P_3 \in F_{55}$

si $\dim F_1 > 2$ ou $\dim F_{15} > 1$ ou $\dim F_{55} > 1$ alors $\dim F_1 + \dim F_{15} + \dim F_{55} > 4$

donc $\dim F_1 = 2$, $\dim F_{15} = 1$, $\dim F_{55} = 1$

Alors $\underline{\underline{F_1 = \text{Vect}(P_0, P_1), F_{15} = \text{Vect}(P_2) \text{ et } F_{55} = \text{Vect}(P_3).}}$