Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1995

MATHÉMATIQUES
1ère épreuve (option générale)

Vendredi 12 mai 1995 de 8 heures à 12 heures

Sont autorisées :

- règles graduées,
- calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long x 15 cm de large.

PROBLÈME 1

Dans ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

On définit la matrice $A_n = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$, carrée d'ordre n à coefficients réels, de la manière suivante :

si $1 \leq i \leq n-1$: $a_{i,i+1} = i$;

si $2 \leq i \leq n$: $a_{i,i-1} = n+1-i$;

si $j \neq i-1$ et $j \neq i+1$: $a_{i,j} = 0$.

Ainsi :
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & . & & & . \\ 0 & n-2 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & & . & . & . & . & 0 \\ . & & & . & . & . & n-1 \\ 0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. On suppose, dans cette question seulement, $n = 3$: $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Déterminer les valeurs propres de A_3.
   b. La matrice A_3 est-elle diagonalisable ?
   c. La matrice A_3 est-elle inversible ?

2. Dans toute la suite du problème, E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   On note $\mathscr{B}$ la base canonique de E :
   $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$.
   On note u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est A_n.
   a. Calculer $u(1)$, $u(X^{n-1})$, et, pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n-2$, $u(X^j)$.
   b. Démontrer que, pour tout élément $P(X)$ de E :
   $u(P(X)) = (n-1)\, X\, P(X) - (X^2-1)\, P'(X)$
   (où $P'(X)$ désigne la dérivée de $P(X)$).

3. Dans cette question, λ désigne un nombre réel. On suppose que λ est valeur propre de l'endomorphisme u, et on considère un vecteur propre $P(X)$ associé à cette valeur propre.
   a. On suppose : $\lambda \neq n-1$. Montrer que 1 est racine de $P(X)$.
   b. On suppose : $\lambda \neq 1-n$. Montrer que -1 est racine de $P(X)$.
   c. On suppose : $\lambda = n-1$.
   Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et un entier naturel non nul s tels que :
   $P(X) = (X+1)^s\, T(X)$ et $T(-1) \neq 0$.
   Montrer que : $s = n-1$.
   Montrer que $T(X)$ est un polynôme constant et non nul.
   d. On suppose : $\lambda = 1-n$.
   Montrer qu'il existe un réel non nul a tel que :
   $P(X) = a(X-1)^{n-1}$.
   e. On suppose : $\lambda \neq 1-n$ et $\lambda \neq n-1$.
   Montrer qu'il existe un polynôme $T(X)$ de E et deux entiers naturels non nuls r et s tels que :
   $P(X) = (X-1)^r (X+1)^s\, T(X)$ et $T(-1) \neq 0$ et $T(1) \neq 0$.
   Montrer que : $1 \leq r \leq n-2$,
   $s = n-1-r$,
   $\lambda = n-1-2r$.
   Montrer que $T(X)$ est constant et non nul.

4. a. Pour tout entier naturel r tel que $0 \leq r \leq n-1$, calculer $u\left[(X-1)^r (X+1)^{n-1-r}\right]$.
   b. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?
   Démontrer que $\mathscr{C} = \left((X-1)^r (X+1)^{n-1-r}\right)_{0 \leq r \leq n-1}$ est une base de E.

5. La matrice A_n est-elle inversible ?

PROBLÈME 1

Q1. a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A-\lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}} \underset{L_2 \leftarrow \frac{\lambda}{2} L_1}{\begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\frac{\lambda^2}{2} & \lambda \end{bmatrix}} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + (\frac{\lambda^2}{2}-1) L_2}{\begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda(\frac{\lambda^2}{2}-1) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2}(4-\lambda^2) \end{bmatrix}$$

$\lambda \in \mathrm{Spec}(A) \iff A-\lambda I$ non inversible $\iff \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2}(4-\lambda^2) \end{bmatrix}$ non inversible $\iff \frac{\lambda}{2}(4-\lambda^2)=0 \iff \lambda \in \{-2,0,2\}$.

<u>Cl... Les valeurs propres de A_3 sont : -2, 0 et 2.</u>

b) <u>A_3 est diagonalisable</u> car A_3 possède trois valeurs propres distinctes et A_3 est un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

▼ Remarque... les sous-espaces propres associés aux valeurs propres -2, 0 et 2 sont les droites vectorielles respectivement engendrées par : $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ est une matrice inversible. $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ▼

c) <u>0 est valeur propre de A_3 donc A_3 n'est pas inversible.</u>

Q2 a) <u>$u(1) = (n-1)X$, $\forall j \in [\![1, n-2]\!]$, $u(X^j) = jX^{j-1} + (n-1-j)X^{j+1}$ et $u(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}$.</u>

b) Soit $P = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$ un élément de E. Calculons $Q = (n-1)XP(X) - (X^2-1)P'(X)$.

$Q = (n-1)X\sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j - (X^2-1)\sum_{j=1}^{n-1} j a_j X^{j-1} = (n-1)a_0 X + (n-1)\sum_{j=1}^{n-1} a_j X^{j+1} - \sum_{j=1}^{n-1} j a_j X^{j+1} + \sum_{j=1}^{n-1} j a_j X^{j-1}$;

$Q = a_0(n-1)X + \sum_{j=1}^{n-1}(n-1-j)a_j X^{j+1} + \sum_{j=1}^{n-1} j a_j X^{j-1}$;

$Q = a_0(n-1)X + \sum_{j=1}^{n-2} a_j \left[(n-1-j)X^{j+1} + jX^{j-1}\right] + (n-1-(n-1))a_{n-1}X^n + (n-1)a_{n-1}X^{n-2}$;

$Q = a_0 u(1) + \sum_{j=1}^{n-2} a_j u(X^j) + 0 + a_{n-1}u(X^{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j u(X^j) = u\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j\right) = u(P)$.

Finalement : <u>$\forall P \in E$, $u(P) = (n-1)XP(X) - (X^2-1)P'(X)$.</u>

Q3 $P\in E$. $P\neq 0_E$ et $(n-1)XP(X)-(X^2-1)P'(X)=\lambda P(X)$ ou $(n-1)XP-(X^2-1)P'=\lambda P$

a) On suppose $\lambda\neq n-1$.

$(n-1)1P(1)-(1^2-1)P'(1)=\lambda P(1)$; $(n-1)P(1)=\lambda P(1)$; $P(1)=0$ car $\lambda\neq n-1$.

Si $\lambda\neq n-1$: 1 est racine de P.

b) On suppose $\lambda\neq 1-n$.

$(n-1)(-1)P(-1)-((-1)^2-1)P'(-1)=\lambda P(-1)$; $(1-n)P(-1)=\lambda P(-1)$; $P(-1)=0$ car $\lambda\neq 1-n$.

Si $\lambda\neq 1-n$: -1 est racine de P.

c) $\lambda=n-1$. Alors -1 est racine de P car $\lambda\neq 1-n$. Soit s l'ordre de multiplicité de 1 dans P et T le quotient de P par $(X+1)^s$.

$P=(X+1)^sT$ et $T(-1)\neq 0$.

$\lambda P=(n-1)XP-(X^2-1)P'$; $(n-1)(X+1)^sT=(n-1)X(X+1)^sT-(X^2-1)s(X+1)^{s-1}T-(X^2-1)(X+1)^sT'$

Divisons par $(X+1)^s$. Il vient : $(n-1)T=(n-1)XT-(X-1)sT-(X^2-1)T'$.

En prenant la valeur en -1 et en divisant par $T(-1)$ on obtient :

$(n-1)=(n-1)(-1)+2s$; c'est à dire $s=n-1$

$P=(X+1)^{n-1}T$. Comme $\deg P\leq n-1$: T est nécessairement constant. P n'étant pas nul, T ne l'est pas davantage.

Finalement $P=(X+1)^{n-1}T$ où T est un polynôme constant et non nul.

▼ Remarque.. Ceci prouve que : $\mathrm{Ker}\,(u-(n-1)\mathrm{Id}_E)\subset \mathrm{Vect}\,((X+1)^{n-1})$ ▼

d) $\lambda=1-n$ Même démarche que pour c)

▼ Remarque.. On prouve ainsi que : $\mathrm{Ker}\,(u-(1-n)\mathrm{Id}_E)\subset \mathrm{Vect}\,((X-1)^{n-1})$ ▼

d) $\lambda\neq (n-1)$ et $\lambda\neq 1-n$.

1 et -1 sont racines de P. Soit r (resp. s) l'ordre de multiplicité de $+1$ (resp -1) dans P.

Notons T le quotient de P par $(X-1)^r(X+1)^s$.

$P=(X-1)^r(X+1)^sT$ avec $T(1)\neq 0$ et $T(-1)\neq 0$.

$$\lambda(X-1)^r(X+1)^sT=\lambda P=(n-1)XP-(X^2-1)P'=(n-1)X(X-1)^r(X+1)^sT-(X^2-1)r(X-1)^{r-1}(X+1)^sT-$$
$$(X^2-1)(X-1)^rs(X+1)^{s-1}T-(X^2-1)(X-1)^r(X+1)^sT'.$$

En divisant par $(X-1)^r(X-1)^s$ il vient :

$\lambda T = (n-1)XT - r(X+1)T - s(X-1)T - (X^2-1)T'$

En prenant la valeur en 1 et en divisant par $T(1)$ on obtient : $\lambda = (n-1) - 2r$

———— -1 ———— $T(-1)$ ———— : $\lambda = -(n-1) + 2s$

Par soustraction il vient : $0 = 2(n-1) - 2r - 2s$; ou : $r + s = n-1$, ou $s = n-1-r$

En conséquence : $\begin{cases} s = n-1-r \\ \text{et} \\ \lambda = n-1-2r \end{cases}$. $s \in \mathbb{N}^*$ donc $n-1-r \geq 1$; $r \leq n-2$; $1 \leq r \leq n-2$

Finalement : $\begin{cases} 1 \leq r \leq n-2 \\ s = n-1-r \\ \lambda = n-1-2r \end{cases}$.

$P = (X-1)^r(X+1)^s\, T = (X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\, T$. Or $\deg P \leq n-1$ et $\deg (X-1)^r(X+1)^{n-1-r} = n-1$; par conséquent T est constant et non nul car P n'est pas nul.

▼ Remarques 1. Ce qui précède indique que :

$$\forall r \in [\![1, n-2]\!],\ \operatorname{Ker}(u - (n-1-2r)\mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Vect}\left((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right)$$

Avec c) et d) on a même $\forall r \in [\![0, n-1]\!]$, $\operatorname{Ker}(u - (n-1-2r)\mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Vect}\left((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right)$.

2. Q3 indique donc que : $\operatorname{Spec} u \subset \{ n-1-2r \,;\, r \in [\![0, n-1]\!] \}$ et que pour tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, $\operatorname{Ker}(u - (n-1-2r)\mathrm{Id}_E) \subset \operatorname{Vect}\left((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right)$.

Donc si nous prouvons que pour tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, $u\left((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right) = (n-1-2r)(X-1)^r(X+1)^{n-1-r}$ nous aurons des égalités à la place des inclusions. ▼

Q4 a) Soit $r \in [\![0, n-1]\!]$.

$u\left((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right) = (n-1)X(X-1)^r(X+1)^{n-1-r} - (X^2-1)r(X-1)^{r-1}(X+1)^{n-1-r} - (X^2-1)(X-1)^r(n-1-r)(X+1)^{n-2-r}$

$u\left((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right) = (X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\left[(n-1)X - r(X+1) - (n-1-r)(X-1)\right] = (n-1-2r)(X-1)^r(X+1)^s$

$\forall r \in [\![0, n-1]\!],\ u\left((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right) = (n-1-2r)(X-1)^r(X+1)^s.$

b) Q4 a) montre alors que pour tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, $n-1-2r$ est valeur propre de u donc de A_n. A_n a donc au moins n valeurs propres distinctes ; A_n a donc n valeurs propres distinctes puisque $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A_n est donc diagonalisable

La famille $\mathcal{B}$ est constituée de n vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. $\mathcal{B}$ est donc une famille libre de n vecteurs de E ; comme $\dim E = n$: $\mathcal{B}$ est une base de E.

Q5 A_n inversible $\Leftrightarrow 0 \notin \operatorname{Spec} A_n \Leftrightarrow \nexists r \in [\![0, n-1]\!],\ n-1-2r=0$

A_n inversible $\Leftrightarrow \nexists r \in [\![0,n-1]\!],\ r = \frac{n-1}{2} \Leftrightarrow n-1$ n'est pas pair $\Leftrightarrow n$ est pair.

cl.. A_n est inversible si et seulement si n est pair.

▼ Remarques 1.. Q3 est un peu laxiste. Rappelons : $P \in E$, $P \neq 0_E$ et $u(P) = \lambda P$.
Alors : $((n-1)X - \lambda) P = (X^2-1) P'$.
Soit a une racine de P dans $\mathbb{C}$ et k son ordre de multiplicité. Supposons $a \neq 1$ et $a \neq -1$
$(X-a)^k$ divise P, donc $((n-1)X-\lambda)P$, donc $(X^2-1)P'$, donc P' (car $a \neq 1$ et $a \neq -1$).
Ceci signifie que l'ordre de multiplicité de a dans P' est au moins k alors que nous savons que cet ordre est $k-1$! Les seuls zéros possibles de P dans $\mathbb{C}$ sont -1 et 1.
Par conséquent $\exists c \in \mathbb{R}^*, \exists r \in \mathbb{N}, \exists s \in \mathbb{N}$, $P = c(X-1)^r(X+1)^s$
Notons q le degré de P. $q = r+s$. Soit a_q le coefficient de X^q dans P ; $a_q \neq 0$.
$((n-1)X-\lambda)P = (X^2-1)P'$. Le coefficient de X^{q+1} dans le 1er membre est $(n-1)a_q$; dans le second membre c'est $q a_q$; donc $q = n-1$
Par conséquent : $r+s = n-1$. Comme r et s sont dans $\mathbb{N}$: $r \in [\![0, n-1]\!]$.
$P = c(X-1)^r(X+1)^s$ et $((n-1)X-\lambda)P = (X^2-1)P'$. $-\lambda P(0) = -P'(0)$; $\lambda P(0) = P'(0)$.
$P(0) = c(-1)^r$. $P'(0) = cr(-1)^{r-1} + cs(-1)^r$. Donc $\lambda c(-1)^r = cr(-1)^{r-1} + cs(-1)^r$.
En divisant par $c(-1)^r$ il vient : $\lambda = -r+s = n-1-2r$
Ce qui prouve que 1°.. $\operatorname{Spec} u \subset \{n-1-2r\,;\ r \in [\![0,n-1]\!]\}$

2°.. $\forall r \in [\![0,n-1]\!]$, $\operatorname{Ker}(u - (n-1-2r)\operatorname{Id}_E) \subset \operatorname{Vect}\left((X-1)^r(X+1)^{n-1-r}\right)$.

2.. Il faut savoir montrer à la main que $\mathcal{B}$ est une famille libre de E. Plus généralement il faut savoir prouver que si a et b sont deux éléments distincts de K ($=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et si $n \in \mathbb{N}^*$, $\left((X-a)^n, (X-a)^{n-1}(X-b), \dots, (X-b)^n\right) = \left((X-a)^k(X-b)^{n-k}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une famille libre de $K[X]$ (donc une base de $K_n[X]$)
Supposons cette famille liée. $\exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^{n+1}$, $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (X-a)^k (X-b)^{n-k} = 0$ et $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0_{K^{n+1}}$
Soit $i = \min\{k \in [\![0,n]\!],\ \alpha_k \neq 0\}$. $\alpha_i \neq 0$.
$0 = \sum_{k=i}^{n} \alpha_k (X-a)^k (X-b)^{n-k}$. Divisons par $(X-a)^i$; il vient : $\alpha_i (X-b)^{n-i} + \sum_{k=i+1}^{n} \alpha_k (X-a)^{k-i}(X-b)^{n-k} = 0$
En prenant la valeur en a on obtient : $\alpha_i (a-b)^{n-i} = 0$ donc $\alpha_i = 0$!! contradiction... ▼