LYON 2000 DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout ce problème, a est un réel tel que $0 < a < 1$.

I - Calcul d'une somme et d'une intégrale

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;\pi]$, on note :

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0;\pi]$:

$$1 + 2\,C_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

b. Etablir, pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$:

$$\sum_{k=-n}^{n} z^k = z^{-n}\,\frac{1-z^{2n+1}}{1-z}\ .$$

c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0;\pi]$:

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\ .$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

On note $\varphi : [0;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\cos(ax)-1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{si } x \in]0;\pi] \end{cases}\ .$$

3. Montrer que φ est de classe C^1 sur $[0;\pi]$ et calculer $\varphi'(0)$.

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\,\mathrm{d}x$.

Montrer, grâce à une intégration par parties, que I_n tend vers 0 quand l'entier n tend vers l'infini.

II - Calcul de la somme d'une série

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(ax)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + J_n.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge, et calculer sa somme (on pourra utiliser les résultats d

I.2. et *I.4.*).

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de a et de n.

4. Etablir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2-a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a} \quad .$$

III - Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

On note : $\displaystyle F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$, $\displaystyle G(\alpha) = \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$, $\displaystyle H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

2.a. Montrer, pour tout réel t de $[0;\, 1]$ et tout n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1}\frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} \quad .$$

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

c. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$ converge et que : $\displaystyle G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}$.

3.a. En utilisant le changement de variable défini par $u = t^{1-\alpha}$, montrer :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\, G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right),$$

et en déduire :

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1} \quad .$$

b. Etablir :

$$F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1} \quad .$$

4. En utilisant le résultat de *II.4.*, établir finalement :

$$F(\alpha) = \frac{\dfrac{\pi}{\alpha}}{\sin\dfrac{\pi}{\alpha}} \quad .$$