LYON 2001 DEUXIÈME PROBLÈME

Rappel : Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, l'équation $z \in \mathbb{C}$ et $z^n = 1$, admet exactement n racines complexes distinctes qui sont

$$1,\ e^{i\theta},\ e^{2i\theta}, \ldots, e^{i(n-1)\theta} \qquad \text{avec} \qquad \theta = \frac{2\pi}{n}$$

Définitions : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

• On note id_E l'application identique de E.

• Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = id_E$, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est **cyclique d'ordre p** s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :

$\star$ $f^p(x_0) = x_0$,

$\star$ la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est génératrice de E,

$\star$ la famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est constituée d'éléments deux à deux distincts.

La famille $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est alors appelée un **cycle** de f.

Partie I : Etude d'un exemple

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension 3, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E. On considère l'endomorphisme f de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Q1 Vérifier que $\mathcal{B}' = \big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$ est une base de E et déterminer la matrice associée à f relativement à cette base.

Q2 Montrer que f est cyclique d'ordre 4 et que $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big)$ est un cycle de f.

Q3 Montrer que $f^4 = id_E$.

Au choix Q4 ou Q4'

Q4 Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.

$\boxed{\textbf{Q4'}}$ a) Soit λ une valeur propre de f est u un vecteur propre associé. Calculer de deux manières $f^4(u)$ et en déduire que $\lambda^4 = 1$. Qu'en déduire pour le spectre de f ?

b) Montrer que -1, i et $-i$ sont des valeurs propres de f et que f est diagonalisable. Construire une base de E constiuée de vecteurs propres de f.

Partie II : Cas général

Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), et on considère un endomorphisme f de E cyclique d'ordre p. Soit $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\big)$ un cycle de f.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ Montrer que $p \geqslant n$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Montrer que $f^p = id_E$. En déduire que f est bijective.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ On note m le plus grand des entiers naturels k tels que la famille $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{k-1}(x_0)\big)$ est libre.

a) Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.

b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)$.

c) En déduire que $m = n$ et que la famille $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ On note $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les n nombres complexes tels que :

$$f^n(x_0) = a_0 x_0 + a_1 f(x_0) + a_2 f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x_0).$$

a) On considère l'endomorphisme g de E défini par $g = a_0 id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

Montrer : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ g\big(f^k(x_0)\big) = f^{n+k}(x_0)$.

En déduire : $\quad f^n = a_0 id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.

b) Déterminer la matrice M associée à f relativement à la base $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ à l'aide des coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

c) Montrer : $\quad \forall \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{rg}(f - \lambda id_E) \geqslant n - 1$ (*on pourra utiliser la matrice précédente*).

En déduire que les sous-espaces propres de f sont de dimension 1.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ On suppose dans cette question que f est cyclique d'ordre n (et $\dim(E) = n$).

Soit $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ un cycle de f.

a) Montrer que si un nombre complexe λ est valeur propre de f, alors $\lambda^n = 1$.

b) Déterminer la matrice associée à f relativement à la base $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$.

c) Montrer que f est diagonalisable en déterminant une base de E constituée de vecteurs propres de f.

CORRECTION

Partie I : Etude d'un exemple

1. E est de dimension 3 donc pour montrer que la famille de trois vecteurs $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$ est une base de E il suffit de montrer que c'est une famille libre.

$f(e_1) = e_1 + e_2 - 2e_3$. $f^2(e_1) = f\big(f(e_1)\big) = -e_1 - 2e_2 + 2e_3$ car $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soient α, β et γ trois éléments de $\mathbb{C}$ tels que : $\alpha e_1 + \beta f(e_1) + \gamma f^2(e_1) = 0_E$. Montrons que $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$\alpha e_1 + \beta(e_1 + e_2 - 2e_3) + \gamma(-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = 0_E$ donc $(\alpha + \beta - \gamma)e_1 + (\beta - 2\gamma)e_2 + (-2\beta + 2\gamma)e_3 = 0_E$.

La liberté de (e_1, e_2, e_3) donne alors $\alpha + \beta - \gamma = \beta - 2\gamma = -2\beta + 2\gamma = 0$.

Ainsi $\gamma = \beta = 2\gamma$ et $\alpha + \beta - \gamma = 0$. Nécessairement $\beta = \gamma = 0$ et $\alpha = -\beta + \gamma = 0$. Finalement $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big) \text{ est une base de } E.}$$

Cherchons la matrice de f dans cette base.

$f(e_1) = 0.e_1 + 1.f(e_1) + 0.f^2(e_1)$ et $f^2(e_1) = 0.e_1 + 0.f(e_1) + 1.f^2(e_1)$.

$f\big(f^2(e_1)\big) = f(-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = -e_1 + e_2$ car $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$f\big(f^2(e_1)\big) = -e_1 + e_2 = -e_1 - (e_1 + e_2 - 2e_3) - (-e_1 - 2e_2 + 2e_3) = -e_1 - f(e_1) - f^2(e_1)$.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big) \text{ est : } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

2. Montrons que f est cyclique d'ordre 4.

- $f^3(e_1) = -e_1 + e_2$; alors $f^4(e_1) = -f(e_1) + f(e_2) = -(e_1 + e_2 - 2e_3) + (2e_1 + e_2 - 2e_3) = e_1$.

- $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big)$ est une famille génératrice de E comme sur-famille de la famille génératrice

$\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big)$ de E. En effet $E = \text{Vect}\,\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\big) \subset \text{Vect}\,\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big) \subset E$ donne $\text{Vect}\,\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big) = E$ n'est-il pas ?

- $\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big) = (e_1, e_1 + e_2 - 2e_3, -e_1 - 2e_2 + 2e_3, -e_1 + e_2)$;

la famille$\big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big)$ est donc constituée d'éléments deux à deux distincts.

Les trois points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{f \text{ est cyclique d'ordre 4 et } \big(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1)\big) \text{ est un cycle de } f.}$$

3. Pour montrer que $f^4 = \mathrm{Id}_E$ il suffit de prouver que ces deux endomorphismes de E coïncident sur la base $\Big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\Big)$ de E. Pour cela il suffit de prouver que $f^4(e_1) = e_1$, $f^5(e_1) = f(e_1)$ et $f^6(e_1) = f^2(e_1)$.

$f^4(e_1) = e_1$ résulte de Q1 et permet d'écrire que : $f\big(f^4(e_1)\big) = f(e_1)$ et $f^2\big(f^4(e_1)\big) = f^2(e_1)$; alors $f^5(e_1) = f(e_1)$ et $f^6(e_1) = f^2(e_1)$. Ainsi :

$$\boxed{f^4 = \mathrm{Id}_E.}$$

4. Observons que $f^4 - id_E = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Ainsi $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de f dont l'ensemble des racines est $\{1, -1, i, -i\}$.

Les seules valeurs propres possibles de f sont 1, -1, i et $-i$.

Notons $\mathcal{B}'$ la base $\Big(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\Big)$ de E et A' la matrice de f dans cette base. $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soit x un élément de E de coordonnées (α, β, γ) dans $\mathcal{B}'$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = \alpha \\ \alpha - \gamma = \beta \\ \beta - \gamma = \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -\alpha \\ \beta = 2\alpha \\ 2\alpha + \alpha = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \Leftrightarrow x = 0_E.$$

Donc 1 n'est pas valeur propre de f.

$$f(x) = -x \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = -\alpha \\ \alpha - \gamma = -\beta \\ \beta - \gamma = -\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

Alors -1 est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est SEP $(f, -1) = \mathrm{Vect}\,\big(e_1 + f^2(e_1)\big)$.

Observons que $\mathrm{Vect}\,\big(e_1 + f^2(e_1)\big) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_1 - 2e_2 + 2e_3) = \mathrm{Vect}(-2e_2 + 2e_3) = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$.

$$f(x) = ix \Leftrightarrow A' \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\gamma = i\alpha \\ \alpha - \gamma = i\beta \\ \beta - \gamma = i\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -i\alpha \\ \beta = \frac{1}{i}(\alpha - \gamma) = -i(\alpha + i\alpha) = (1 - i)\alpha \\ (1 - i)\alpha + i\alpha = i(-i\alpha) = \alpha \end{cases}.$$

$$f(x) = ix \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -i\alpha \\ \beta = (1 - i)\alpha \\ \alpha = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = -i\alpha \\ \beta = (1 - i)\alpha \end{cases}.$$

Alors i est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est SEP $(f, i) = \mathrm{Vect}\,\big(e_1 + (1-i)f(e_1) - if^2(e_1)\big)$.

Or $e_1 + (1 - i)f(e_1) - if^2(e_1) = e_1 + (1 - i)(e_1 + e_2 - 2e_3) - i(-e_1 - 2e_2 + 2e_3)) = 2e_1 + (1 + i)e_2 - 2e_3$.

Par conséquent SEP $(f, i) = \mathrm{Vect}\,\big(2e_1 + (1 + i)e_2 - 2e_3\big)$.

Remarquons alors que si X est un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, $A'X = -iX \Leftrightarrow A'\overline{X} = i\overline{X}$ puisque A' est à coefficients réels.

Ainsi $f(x) = -ix \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\gamma} = -i\overline{\alpha} \\ \overline{\beta} = (1-i)\overline{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = i\alpha \\ \beta = (1+i)\alpha \end{cases}$. Alors $-i$ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est SEP $(f,-i) = \text{Vect}\Big(e_1 + (1+i)f(e_1) + if^2(e_1)\Big) = \text{Vect}\Big(2e_1 + (1-i)e_2 - 2e_3\Big)$.

f admet trois valeurs propres distinctes et E est de dimension 3 donc :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$

Comme SEP $(f,-1) = \text{Vect}\,(e_2 - e_3)$, SEP $(f,i) = \text{Vect}\Big(2e_1 + (1+i)e_2 - 2e_3\Big)$ et SEP $(f,-i) = \text{Vect}\Big(2e_1 + (1-i)e_2 - 2e_3\Big)$:

$\boxed{\big(e_2 - e_3, 2e_1 + (1+i)e_2 - 2e_3, 2e_1 + (1-i)e_2 - 2e_3\big) \text{ est une base de } E \text{ constituée de vecteurs propres de } f \text{ respectivement associés aux valeurs propres } 1,\ i \text{ et } -i.}$

Partie II Cas général

1. $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est un cycle de f donc c'est une famille génératrice de E. Cette famille génératrice est de cardinal p et E est de dimension n, par conséquent :

$$\boxed{p \geqslant n.}$$

2. Soit x un élément de E. $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)\big)$ est une famille génératrice de E donc il existe un élément $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1})$ de $\mathbb{C}^p$ tel que : $x = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^k(x_0)$.

$f^p(x) = f^p\left(\sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^k(x_0)\right) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^p\big(f^k(x_0)\big) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^{p+k}(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^k\big(f^p(x_0)\big)$.

Or $f^p(x_0) = x_0$. Ainsi $f^p(x) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \lambda_k\ f^k(x_0) = x$.

Finalement $\forall x \in E,\ f^p(x) = x = \text{Id}_E(x)$ donc :

$$\boxed{f^p = \text{Id}_E.}$$

$f \circ f^{p-1} = f^p = \text{Id}_E$. De même $f^{p-1} \circ f = f^p = \text{Id}_E$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est bijective et } f^{-1} = f^{p-1}.}$$

3. a. Par définition de m, $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)\big)$ est libre et $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^m(x_0)\big)$ est liée.

Par conséquent il existe un élément <u>non nul</u> $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ de $\mathbb{C}^{m+1}$ tel que : $\sum\limits_{k=0}^{m} \lambda_k\ f^k(x_0) = 0_E$.

Supposons $\lambda_m = 0$. Alors $\sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k\ f^k(x_0) = 0_E$. La liberté de la famille $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big)$ donne $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$.

Ainsi $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ ce qui induit une légère contradiction.

On peut donc affirmer que λ_m n'est pas nul et écrire : $f^m(x_0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_m}\right) f^k(x_0)$.

$\boxed{f^m(x_0) \text{ est combinaison linéaire de } \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big).}$

b. Montrons par récurrence que, pour tout élément k de $[\![m, +\infty[\![$, $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs x_0, $f(x_0)$, ...,$f^{m-1}(x_0)$.

• Nous venons de montrer que la propriété est vraie pour $k = m$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément k de $[\![m, +\infty[\![$ et montrons la pour $k + 1$.

L'hypothèse de récurrence permet de dire que $f^k(x_0)$ appartient à Vect $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big)$.

Alors : $f^{k+1}(x_0) \in f\left(\text{Vect}\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\right)\right) = \text{Vect}\left(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0)\right)$.

De toute évidence $f^i(x_0)$ appartient à Vect $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big)$ si i appartient à $[\![1, m-1]\!]$. $f^m(x_0)$ appartient également à Vect $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big)$ d'après a.

Ainsi $\forall i \in [\![1, m]\!]$, $f^i(x_0) \in \text{Vect}\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\right)$.

Alors Vect $\big(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0)\big) \subset$ Vect $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big)$. Comme $f^{k+1}(x_0)$ appartient à Vect $\big(f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^m(x_0)\big)$, $f^{k+1}(x_0)$ appartient à Vect $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big)$.

$f^{k+1}(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs x_0, $f(x_0)$, ..., $f^{m-1}(x_0)$ et ainsi s'achève la récurrence.

Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à m, le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs x_0, $f(x_0)$, ..., $f^{m-1}(x_0)$.

c. Nous venons de voir que pour tout élément k de $[\![m, +\infty[\![$ le vecteur $f^k(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs x_0, $f(x_0)$, ..., $f^{m-1}(x_0)$. Ceci vaut également pour k dans $[\![0, m-1]\!]$.

Ainsi tous les éléments de la famille génératrice $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\big)$ sont combinaisons linéaires de la famille $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big)$.

Alors $E = \text{Vect}\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\right) \subset \text{Vect}\left(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\right) \subset E$.

Ainsi Vect $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big) = E$.

La famille $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big)$ est donc une famille génératrice de E. Rappelons que par définition de m elle est libre.

$\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0)\big)$ est donc une base de E de cardinal m. Comme E est de dimension n :

$$\boxed{m = n \text{ et } \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big) \text{ est une base de } E.}$$

4. a. Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$$g\big(f^k(x_0)\big) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, f^\ell\big(f^k(x_0)\big) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, f^{\ell+k}(x_0) = \sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, f^k\big(f^\ell(x_0)\big) = f^k\left(\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, f^\ell(x_0)\right).$$

Rappelons que, par hypothèse, $f^n(x_0) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} a_\ell\, f^\ell(x_0)$.

Ainsi $g\big(f^k(x_0)\big) = f^k\big(f^n(x_0)\big) = f^{k+n}(x_0) = f^{n+k}(x_0) = f^n\big(f^k(x_0)\big)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ g\big(f^k(x_0)\big) = f^{n+k}(x_0) = f^n\big(f^k(x_0)\big).}$$

Ceci permet en particulier de dire que les deux endomorphismes g et f^n coïncident sur les éléments de la base $\big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ de E. Alors $g = f^n$.

$$\boxed{f^n = a_0 \operatorname{Id}_E + a_1\, f + a_2\, f^2 + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}.}$$

b. $\forall i \in [\![0, n-2]\!],\ f\big(f^i(x_0)\big) = 0.x_0 + 0.f(x_0) + \cdots + 0.f^i(x_0) + 1.f^{i+1}(x_0) + 0.f^{i+2}(x_0) + \cdots + 0.f^{n-1}(x_0)$.

On a également : $f\big(f^{n-1}(x_0)\big) = f^n(x_0) = a_0\, x_0 + a_1\, f(x_0) + a_2\, f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}(x_0)$.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big) \text{ est donc : } \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.}$$

c. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$. Posons pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, $e_k = f^k(x_0)$.

$\big(e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\big) = \big(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E. De plus $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f(e_k) = e_{k+1}$.

Alors $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ (f - \lambda \operatorname{Id}_E)(e_k) = (f - \lambda \operatorname{Id}_E)(\big(f^k(x_0)\big) = f^{k+1}(x_0) - \lambda\, f^k(x_0) = e_{k+1} - \lambda\, e_k$.

$\big(e_1 - \lambda e_0, e_2 - \lambda e_1, \dots, e_{n-1} - \lambda e_{n-2}, e_n - \lambda e_{n-1}\big)$ est donc une famille d'éléments de $\operatorname{Im}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$.

$\big(e_1 - \lambda e_0, e_2 - \lambda e_1, \dots, e_{n-1} - \lambda e_{n-2}\big)$ également. Pour prouver que la dimension de $\operatorname{Im}(f - \lambda \operatorname{Id}_E)$ est supérieure ou égale à $n-1$, montrons que cette dernière famille est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})$ un élément de $\mathbb{C}^{n-1}$ tel que : $\lambda_1\,(e_1 - \lambda e_0) + \lambda_2\,(e_2 - \lambda e_1) + \cdots + \lambda_{n-1}\,(e_{n-1} - \lambda e_{n-2}) = 0_E$.

$-\lambda_1 \lambda\, e_0 + (\lambda_1 - \lambda_2 \lambda)\, e_1 + (\lambda_2 - \lambda_3 \lambda)\, e_2 + \cdots + (\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1} \lambda)\, e_{n-2} + \lambda_{n-1}\, e_{n-1} = 0_E$.

La famille $(e_0, e_1, \ldots, e_{n-1})$ est libre il vient donc :

$-\lambda_1\lambda = \lambda_1 - \lambda_2\lambda = \lambda_2 - \lambda_3\lambda = \cdots = \lambda_{n-2} - \lambda_{n-1}\lambda = \lambda_{n-1} = 0.$

Ceci donne sans difficulté $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$.

Ainsi $\big(e_1 - \lambda e_0, e_2 - \lambda e_1, \ldots, e_{n-1} - \lambda e_{n-2}\big)$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f - \lambda\ \mathrm{Id}_E)$, de cardinal $n-1$.

Par conséquent $\dim \mathrm{Im}(f - \lambda\ \mathrm{Id}_E) \geqslant n-1$.

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \mathrm{rg}(f - \lambda\ \mathrm{Id}_E) \geqslant n-1.}$$

Soit λ une valeur propre de f et SEP (f, λ) le sous-espace propre associé.

$\dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$. En appliquant le théorème du rang on obtient :

$\dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \dim E - \mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E) = n - \mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.

$\mathrm{rg}(f - \lambda\ \mathrm{Id}_E) \geqslant n-1$ donne alors $\dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) \leqslant n - (n-1) = 1$.

Ainsi SEP (f, λ) est de dimension au plus 1.

Or par définition SEP (f, λ) est de dimension au moins 1. Alors $\dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = 1$.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } f \text{ sont de dimension 1.}}$$

5. a. f est cyclique d'ordre n donc $f^n = \mathrm{Id}_E$ (d'après Q2). $X^n - 1$ est alors un polynôme annulateur de f. Toute valeur propre de f est alors une racine de ce polynôme. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si un nombre complexe } \lambda \text{ est valeur propre de } f, \text{ alors } \lambda^n = 1.}$$

b. $f^n(x_0) = x_0$, $f^n(x_0) = a_0\, x_0 + a_1\, f(x_0) + a_2\, f^2(x_0) + \cdots + a_{n-1}\, f^{n-1}(x_0)$ et $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$ est une base de E. Alors $a_0 = 1$ et $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

$$\boxed{\text{La matrice de } f \text{ dans la base } \big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big) \text{ est donc : } \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

c. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ tel que $\lambda^n = 1$.

Soit x un élément de E de coordonnées $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ dans la base $\big(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\big)$.

$$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \alpha_{n-1} = \lambda\alpha_0$ et $\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ \alpha_k = \lambda\alpha_{k+1}$.

$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \alpha_{n-1} = \lambda\alpha_0$ et $\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ \alpha_{k+1} = \dfrac{1}{\lambda}\ \alpha_k$.

$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \alpha_{n-1} = \lambda\alpha_0$ et $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \alpha_k = \dfrac{1}{\lambda^k}\ \alpha_0$.

$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \alpha_k = \dfrac{1}{\lambda^k}\,\alpha_0$ et $\alpha_0 = \dfrac{1}{\lambda}\,\alpha_{n-1} = \dfrac{1}{\lambda}\,\dfrac{1}{\lambda^{n-1}}\,\alpha_0 = \dfrac{1}{\lambda^n}\,\alpha_0 = \alpha_0$!

$f(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \alpha_k = \dfrac{1}{\lambda^k}\,\alpha_0$.

Alors λ est valeur propre de f et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle engendrée par

$x_0 + \dfrac{1}{\lambda}\ f(x_0) + \dfrac{1}{\lambda^2}\ f^2(x_0) + \cdots + \dfrac{1}{\lambda^{n-1}}\ f^{n-1}(x_0)$.

Posons $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ et $t_k = x_0 + \dfrac{1}{\lambda_k}\ f(x_0) + \dfrac{1}{\lambda_k^2}\ f^2(x_0) + \cdots + \dfrac{1}{\lambda_k^{n-1}}\ f^{n-1}(x_0)$.

λ_0, λ_1,. .., λ_{n-1} sont les n solutions de l'équation $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda^n = 1$.

λ_0, λ_1,. .., λ_{n-1} sont (les) n valeurs propres distinctes de f et $(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ est une famille d'éléments de E constituée de vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes.

$(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ est alors une famille libre de cardinal n de l'espace vectoriel E dont la dimension est n.

$(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$ est donc une base de E constituée de vecteurs propres de f. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$$