LYON 2002 PREMIER PROBLÈME

PARTIE I : Etude d'une solution de la suite $(\mathbf{a_n})_{\mathbf{n}\geqslant 1}$

1. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in [p, p+1],\ \dfrac{1}{p+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{p}\cdot$ Comme $p \leqslant p+1$, en intégrant il vient :

$\displaystyle\int_p^{p+1} \frac{1}{p+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{p}\,\mathrm{d}t$; c'est à dire : $\displaystyle\frac{1}{p+1} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{p}\cdot$

Alors $\displaystyle\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} \leqslant \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{p} \leqslant 0$ ou $\displaystyle\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \geqslant \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.}$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall p \in [\![1, n]\!],\ 0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}\cdot$ En sommant on obtient :

$\displaystyle 0 \leqslant a_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \leqslant \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leqslant 1.$ Ainsi $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_n \leqslant 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} - a_n = u_{n+1} \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante et majorée donc convergente.}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant a_n \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \gamma = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n \leqslant 1$.

$$\boxed{\text{La limite } \gamma \text{ de la suite } (a_n)_{n\geqslant 1} \text{ vérifie} : 0 \leqslant \gamma \leqslant 1.}$$

PARTIE II : Expression intégrale du réel γ

1. a. $\varphi : x \to e^x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est positive. Alors φ est convexe sur $\mathbb{R}$. Ainsi la courbe représentative de φ est au dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) \geqslant \varphi'(0)(x-0) + \varphi(0)$; $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant e^0(x-0) + e^0 = x+1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^x.}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et soit t un réel appartenant à $[0, n]$.

en appliquant 1. a. à $\dfrac{t}{n}$ et à $-\dfrac{t}{n}$ on obtient : $0 \leqslant 1 + \dfrac{t}{n} \leqslant e^{\frac{t}{n}}$ et $0 \leqslant 1 - \dfrac{t}{n} \leqslant e^{-\frac{t}{n}}$.

Ainsi $0 \leqslant \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \left(e^{\frac{t}{n}}\right)^n = e^t$ et $0 \leqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \left(e^{-\frac{t}{n}}\right)^n = e^{-t}$. Poursuivons.

$0 \leqslant \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t$ et $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \geqslant 0$ donc : $0 \leqslant \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$.

En multipliant par e^{-t} il vient : $0 \leqslant \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,n],\ \left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^t,\quad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t} \quad \text{et} \quad \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}}$$

2. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons : $\forall x \in [0,1], \psi(x) = (1-x)^n + nx - 1$.

ψ est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1],\ \psi'(x) = -n(1-x)^{n-1} + n = n\big[1-(1-x)^{n-1}\big] \geqslant 0$.

ψ est croissante sur $[0,1]$ et $\psi(0)=0$. Alors $\forall x \in [0,1],\ \psi(x) \geqslant 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], (1-x)^n + nx - 1 \geqslant 0.}$$

<u>Remarque</u> *On peut également obtenir ce résultat en utilisant la convexité de* $x \to (1-x)^n$ *sur* $[0,1]$.

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et t un réel appartenant à $[0,n]$.

$\frac{t^2}{n^2}$ appartient à $[0,1]$. a. donne alors $\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n + n\,\frac{t^2}{n^2} - 1 \geqslant 0$. Donc : $1-\frac{t^2}{n} \leqslant \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n$.

Dès lors : $\left(1-\frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t}$.

1.b. donne enfin : $\left(1-\frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$.

Alors $e^{-t} - \frac{t^2}{n}\, e^{-t} = \left(1-\frac{t^2}{n}\right) e^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n$.

Finalement : $e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\, e^{-t}$. Rappelons que : $e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \geqslant 0$ et concluons.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,n],\ 0 \leqslant e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\, e^{-t}}$$

.

3. a. $f_n : t \to \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)$ est continue sur $]0,n]$.

De plus : $\forall t \in]0,n],\ 0 \leqslant f_n(t) = \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) \leqslant \frac{1}{t}\,\frac{t^2}{n}\, e^{-t} = \frac{t}{n}\, e^{-t}$.

$\forall t \in]0,n],\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \frac{t}{n}\, e^{-t}$ et $\lim_{t\to 0}\left(\frac{t}{n}\, e^{-t}\right) = 0$. Par encadrement il vient alors $\lim_{t \to 0} f_n(t) = 0$.

Ainsi f_n est continue sur $]0,n]$ et prolongeable par continuité en 0. Par conséquent $\int_0^n f_n(t)\,dt$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \int_0^n \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right) dt \text{ converge.}}$$

<u>Remarque</u> $\lim_{t\to 0} f_n(t) = 0$ *s'obtient également sans difficulté à l'aide d'un développement limité. On a même* $f_n(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2n}\, t$*.*

b. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. $\forall t \in]0,n],\ 0 \leqslant f_n(t) \leqslant \dfrac{t}{n}\, e^{-t}$. Donc : $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^n t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

$\forall t \in [0,+\infty[,\ t\,e^{-t} \geqslant 0$ et $\Gamma(2) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Alors $\displaystyle\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^n t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$.

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. Il vient alors sans difficulté par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

4. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{n}{k+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{k+1}\right]_0^n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{k+1} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cdot$ Or :

$\displaystyle n\,a_n = n\sum_{k=1}^{n} u_k = n\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = n\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\right) = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - n\int_1^{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

Ainsi $\displaystyle n\,a_n = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - n\left[\ln|t|\right]_1^{n+1} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - n\ln(n+1)$.

Ce qui donne : $\displaystyle n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = n\left(a_n + \ln(n+1)\right)$. Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t = n\left(a_n+\ln(n+1)\right).}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons : $\forall t \in]0,n],\ g_n(t) = \dfrac{1}{t}\left(1-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\right)$. g_n est continue sur $]0,n]$.

$\forall t \in]0,n],\ g_n(t) = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}{1-\left(1-\frac{t}{n}\right)} = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k$

Alors $\displaystyle\lim_{t\to 0} g_n(t) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k\right) = \frac{1}{n}\times n = 1$.

g_n est donc continue sur $]0,n]$ et prolongeable par continuité en 0. $\displaystyle\int_0^n g_n(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ J_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

<u>Remarque</u> $\lim_{t\to 0} g_n(t) = 1$ *peut s'obtenir également en se rappelant* $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \alpha\,u$*.*

$\displaystyle\int_0^n g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\times n\left(a_n+\ln(n+1)\right).$

$\displaystyle\int_0^n g_n(t)\,\mathrm{d}t = a_n + \ln(n+1).$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t = a_n + \ln(n+1).}$$

5. a. $h : t \to \dfrac{1-e^{-t}}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = 1$ car : $\dfrac{1-e^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{-(-t)}{t} = 1.$

h est donc continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0, ce qui suffit pour dire que $\displaystyle\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi :

$$\boxed{U = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

Posons : $\forall t \in [1,+\infty[,\ \ell(t) = \dfrac{e^{-t}}{t}\cdot$ ℓ est continue sur $[1,+\infty[$.

De plus $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \ell(t) = \dfrac{e^{-t}}{t} \leqslant e^{-t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge car $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ell(t)\,\mathrm{d}t$. Ainsi :

$$\boxed{V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$J_n - I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t - \int_0^n \frac{1}{t}\left(e^{-t}-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t = \int_0^n \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$

Donc $J_n - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + \int_1^n \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = U + \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = U + \big[\ln|t|\big]_1^n - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$

$J_n - I_n = U + \ln n - \displaystyle\int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$ Rappelons alors que $J_n = a_n + \ln(n+1)$. Ainsi :

$a_n = J_n - \ln(n+1) = U + \ln n - \displaystyle\int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + I_n - \ln(n+1) = U - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t + I_n - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\gamma = U - V$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \gamma$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = V$, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 0.$

$$\boxed{\gamma = U - V.}$$