EMLYON Graduate School of Management

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2002

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 29 avril 2002 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On note, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\,,$$

et, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_n = \sum_{p=1}^{n} u_p = u_1 + \ldots + u_n\,.$$

PARTIE I : Étude de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$

1. Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\,.$$

2. En déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et converge vers un réel, noté γ, tel que $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$

PARTIE II : Expression intégrale du réel γ

1.a. Établir, pour tout réel x :
$$1+x \leqslant \mathrm{e}^x.$$

b. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$:
$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^t \qquad \text{et} \qquad \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t},$$
puis :
$$\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)^n \mathrm{e}^{-t} \leqslant \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}^{-t}.$$

2.a. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x de $[0\,;1]$:
$$(1-x)^n + nx - 1 \geqslant 0.$$

b. En utilisant *1.b.* et *2.a.*, montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel t tel que $0 \leqslant t \leqslant n$
$$0 \leqslant \mathrm{e}^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \leqslant \frac{t^2}{n}\mathrm{e}^{-t}.$$

3.a. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$I_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(\mathrm{e}^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t.$$
Justifier l'existence de I_n.

b. Établir que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

4.a. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t = n\big(a_n + \ln(n+1)\big).$$

b. On note, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$J_n = \int_0^n \frac{1}{t}\left(1 - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t.$$
Justifier l'existence de J_n, et montrer, pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$J_n = a_n + \ln(n+1).$$

5. On note :
$$U = \int_0^1 \frac{1-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad V = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

a. Justifier l'existence de U et de V.

b. Démontrer :
$$\gamma = U - V.$$