LYON 2003 PROBLÈME 1

PARTIE I : Résultats généraux sur φ et J_n

1. Les fonctions $t \to \dfrac{1}{t}$ et sin sont continues sur $]0, +\infty[$. Par produit φ est continue sur $]0, +\infty[$.

$\dfrac{\sin t}{t} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$ donc $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{\sin t}{t} = 1$. Alors $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = 1 = \varphi(0)$ et φ est continue (à droite) en 0.

$$\boxed{\varphi \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

Alors pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ φ^n est continue sur $[0, +\infty[$ donc sur $[0, 1]$, ce qui suffit pour dire que :

$$\boxed{J_n = \int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^n \, \mathrm{d}t \text{ existe pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*.}$$

2. a. $\forall t \in]0, 1],\ \sin t > 0$ donc $\forall t \in]0, 1],\ \varphi(t) = \dfrac{\sin t}{t} > 0$. De plus $\varphi(0) > 0$. Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est strictement positive sur } [0, 1].}$$

φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall t \in]0, +\infty[,\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2}\big(t \cos t - \sin t\big)$. Posons $\forall t \in [0, 1],\ \psi(t) = t \cos t - \sin t$.

ψ est dérivable sur $[0, 1]$ et $\forall t \in [0, 1],\ \psi'(t) = \cos t - t \sin t - \cos t = -t \sin t$.

Alors ψ est continue sur $[0, 1]$ et $\forall t \in]0, 1],\ \psi'(t) < 0$ donc ψ est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

Comme $\psi(0) = 0$, $\forall t \in]0, 1],\ \psi(t) < 0$. Par conséquent $\forall t \in]0, 1],\ \varphi'(t) = \dfrac{1}{t^2}\, \psi(t) < 0$.

φ est continue sur $[0, 1]$ et $\forall t \in]0, 1],\ \varphi'(t) < 0$. Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur } [0, 1].}$$

b. • Soit t un élément de $]0, 1]$. Ce qui précède donne $0 < \varphi(t) < \varphi(0) = 1$. Donc $|\varphi(t)| = \varphi(t) < 1$.

• Soit t un élément de $]1, +\infty]$. $|\sin t| \leqslant 1$ donc $|\varphi(t)| = \dfrac{|\sin t|}{t} \leqslant \dfrac{1}{t} < 1$. Finalement :

$$\boxed{\forall t \in]0, +\infty[,\ |\varphi(t)| < 1.}$$

3. a. Posons : $\forall t \in [0, +\infty[, f(t) = \sin t - t + t^2$. f est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.

$\forall t \in [0, +\infty[,\ f'(t) = \cos t - 1 + 2\,t$ et $f''(t) = -\sin t + 2$.

f'' est positive sur $[0, +\infty[$ donc f' est croissante sur $[0, +\infty[$. Comme $f'(0) = 0$, f' est positive sur $[0, +\infty[$.

f est alors croissante sur $[0,+\infty[$ et comme $f(0)=0$, f est positive sur $[0,+\infty[$.

Ainsi : $\forall t\in[0,+\infty[,\ \sin t - t + t^2 \geqslant 0$ ou $\forall t\in[0,+\infty[,\ \sin t \geqslant t(1-t)$.

Alors $\forall t\in]0,+\infty[,\ \varphi(t)=\dfrac{\sin t}{t}\geqslant 1-t$. Comme $\varphi(0)=1=1-0$ on a :

$$\boxed{\forall t\in[0,+\infty[,\ \varphi(t)\geqslant 1-t.}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall t\in[0,1],\ \varphi(t)\geqslant 1-t\geqslant 0$ donc $\forall t\in[0,1],\ \big(\varphi(t)\big)^n\geqslant\big(1-t\big)^n$.

En intégrant il vient : $J_n=\displaystyle\int_0^1\big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1\big(1-t\big)^n\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}\cdot$ Par conséquent :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ J_n\geqslant\frac{1}{n+1}\cdot}$$

PARTIE II : Etude de I_1

1. a. Soit x un élément de $[1,+\infty[$.

Une intégration par parties simple (avec $u(t)=\frac{1}{t}$ et $v'(t)=\sin t$) donne :

$\displaystyle\int_1^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{t}\,(-\cos t)\right]_1^x-\int_1^x\left(-\frac{1}{t^2}\right)(-\cos t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_1^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{(-\cos x)}{x}-\frac{(-\cos 1)}{1}-\int_1^x\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$

Finalement :

$$\boxed{\forall x\in[1,+\infty[,\ \int_1^x\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\cos 1-\frac{\cos x}{x}-\int_1^x\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.}$$

b. $\forall x\in[1,+\infty[,\ 0\leqslant\left|\dfrac{\cos x}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{x}\cdot$ Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, le théorème d'encadrement donne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=0$.

Ainsi $x\to\cos 1-\dfrac{\cos x}{x}$ admet une limite finie en $+\infty$ ce qui permet de dire que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Montrons la convergence de cette dernière intégrale.

$\forall x\in[1,+\infty[,\ 0\leqslant\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\mathrm{d}t$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

Ceci achève alors de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $K_1=\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Comme $J_1=\displaystyle\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ existe alors $I_1=\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{K_1=\int_1^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\ \text{et}\ I_1=\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,\mathrm{d}t\ \text{convergent.}}$$

2. a. $\forall t \in [0,+\infty[,\ 1 \geqslant |\sin t| \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ |\sin t| \geqslant |\sin t|^2 = \sin^2 t = \dfrac{1}{2}\big(1-\cos(2\,t)\big)$.

$$\boxed{\forall t \in [0,+\infty[,\ |\sin t| \geqslant \frac{1}{2}\big(1-\cos(2\,t)\big).}$$

b. Utilisons une méthode analogue à celle de 1.a. pour obtenir la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{2\,t}\,\mathrm{d}t$ ou de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Soit x un élément de $[1,+\infty[$. Une intégration par parties simple (avec $u(t)=\frac{1}{t}$ et $v'(t)=\cos(2\,t)$) donne :

$\displaystyle\int_1^x \frac{\cos(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{t}\left(\frac{\sin(2\,t)}{2}\right)\right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{t^2}\right)\left(\frac{\sin(2\,t)}{2}\right)\mathrm{d}t$

Alors $\displaystyle\int_1^x \frac{\cos(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(2\,x)}{2x} - \frac{(\sin 2)}{2} + \int_1^x \frac{\sin(2\,t)}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$.

$\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\sin(2\,x)}{2\,x}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\,x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\,x} = 0$, par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(2\,x)}{2x} = 0$.

Ainsi $x \to \dfrac{\sin(2\,x)}{2\,x} - \dfrac{\sin 2}{2}$ adment une limite finie en $+\infty$ ce qui permet de dire que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2\,t)}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Montrons la convergence de cette dernière intégrale.

$\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{\sin(2\,x)}{2\,x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2\,x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin(2\,t)}{2\,t^2}\right|\mathrm{d}t$.

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2\,t)}{2\,t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

Ceci achève alors de montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{2\,t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

c. $\forall t \in [1,+\infty[,\ |\varphi(t)| = \dfrac{|\sin t|}{t} \geqslant \dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1}{2\,t} - \dfrac{\cos(2\,t)}{2\,t} \geqslant 0$.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\,t}\,\mathrm{d}t$ diverge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2\,t)}{2\,t}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2\,t} - \frac{\cos(2\,t)}{2\,t}\right)\mathrm{d}t$ diverge.

Les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge alors également.

$$\boxed{\text{L'intégrale } I_1 \text{ n'est pas absolument convergente.}}$$

PARTIE III : Etude de I_n pour $n \geqslant 2$

1. a Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

φ^n est continue sur $[1,+\infty[$ et $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant |\varphi(t)^n| = \dfrac{|\sin t|^n}{t^n} \leqslant \dfrac{1}{t^n}$.

La convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ $(n \geqslant 2)$ et les règles de comparaisons sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\varphi(t)^n|\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\displaystyle\int_1^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t$ est absolument convegente donc convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } [\![2,+\infty[\![\text{ l'intégrale } K_n \text{ est convergente.}}$$

b. Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

Comme K_n est absolument convergente : $|K_n| = \left|\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)^n\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} |\varphi(t)^n|\,\mathrm{d}t$.

De plus $\forall t \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant |\varphi(t)^n| \leqslant \dfrac{1}{t^n}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$ converge donc : $|K_n| \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_1^{x} \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{(n-1)\,t^{n-1}}\right]_1^x = \lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1}.$$

Par conséquent $|K_n| \leqslant \dfrac{1}{n-1}$.

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ |K_n| \leqslant \frac{1}{n-1}}$$

2.a. Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

$$J_{n+1} - J_n = \int_0^1 \Big((\varphi(t))^{n+1} - (\varphi(t))^n\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^n\,(\varphi(t)-1)\,\mathrm{d}t.$$

Or $\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant \sin 1 = \varphi(1) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(0) = 1$. Par conséquent : $\forall t \in [0,1],\ \big(\varphi(t)\big)^n \geqslant 0$ et $\varphi(t) - 1 \leqslant 0$.

Alors $\forall t \in [0,1],\ \big(\varphi(t)\big)^n\,(\varphi(t)-1) \leqslant 0$ et ainsi : $J_{n+1} - J_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^n\,(\varphi(t)-1)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.

Finalement : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ J_{n+1} \leqslant J_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (J_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante.}}$$

b. $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \forall t \in [0,1],\ \big(\varphi(t)\big)^n \geqslant 0$ donc $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ J_n = \displaystyle\int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

La suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante et minorée par zéro donc elle converge.

$$\boxed{\text{La suite } (J_n)_{n\geqslant 2} \text{ est convergente.}}$$

c. Soient a un élément de $]0,1[$ et n un élément de $[\![2,+\infty[\![$.

φ est décroissante, positive et majorée par 1 sur $[0,1]$.

Par conséquent $\forall t \in [0,a],\ 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant 1$ et $\forall t \in [a,1],\ 0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(a)$.

Ainsi $\forall t \in [0,a],\ 0 \leqslant \big(\varphi(t)\big)^n \leqslant 1$ et $\forall t \in [a,1],\ 0 \leqslant \big(\varphi(t)\big)^n \leqslant \big(\varphi(a)\big)^n$.

Alors $\displaystyle\int_0^a \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a 1 \,\mathrm{d}t = a$ et $\displaystyle\int_a^1 \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^1 \big(\varphi(a)\big)^n \,\mathrm{d}t = (1-a)\big(\varphi(a)\big)^n$

$$\boxed{\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ \forall a \in]0,1[,\ \int_0^a \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t \leqslant a \text{ et } \int_a^1 \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t \leqslant (1-a)\big(\varphi(a)\big)^n.}$$

d. Soit a un élément de $]0,1[$.

$\displaystyle\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ 0 \leqslant J_n = \int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^a \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t + \int_a^1 \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t \leqslant a + (1-a)\big(\varphi(a)\big)^n.$

Donc $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ 0 \leqslant J_n \leqslant a + (1-a)\big(\varphi(a)\big)^n \quad (*)$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \ell$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(\varphi(a)\big)^n = 0$ car $|\varphi(a)| < 1$. En passant à la limite dans $(*)$ on obtient $0 \leqslant \ell \leqslant a$.

$$\boxed{\forall a \in]0,1[,\ 0 \leqslant \ell \leqslant a}$$

En faisant tendre a vers 0 dans l'encadrement précédent on obtient $\ell = 0$.

$$\boxed{\ell = 0, \text{ donc la suite } (J_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge vers } 0}$$

3.a. Pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, $\displaystyle J_n = \int_0^1 \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle K_n = \int_1^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t$ convergent donc :

$$\boxed{\text{pour tout élément } n \text{ de } [\![2,+\infty[\![,\ I_n = \int_0^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

3.b. $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |I_n| = |J_n + K_n| \leqslant |J_n| + |K_n| \leqslant |J_n| + \frac{1}{n-1}.$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |J_n| = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = 0$ alors, par encadrement on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.}$$

PARTIE IV : Etude de la série de terme général I_n

1. Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle K_{2p} + K_{2p+1} = \int_1^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^{2p} \,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^{2p+1} \,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^{2p} \big(1+\varphi(t)\big) \,\mathrm{d}t$

Or $\forall t \in [1,+\infty[,\ \big(\varphi(t)\big)^{2p} \geqslant 0$ et $\forall t \in [1,+\infty[,\ 1+\varphi(t)\big) \geqslant 0$ car $\forall t \in]0,+\infty[,\ |\varphi(t)| \leqslant 1$.

Par conséquent $\forall t \in [1,+\infty[\ \big(\varphi(t)\big)^{2p}\big(1+\varphi(t)\big) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^{2p}\big(1+\varphi(t)\big) \,\mathrm{d}t \geqslant 0.$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*,\ K_{2p} + K_{2p+1} \geqslant 0.}$$

2. Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant K_{2p} + K_{2p+1} = I_{2p} - J_{2p} + I_{2p+1} - J_{2p+1}$.

Donc $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ I_{2p} + I_{2p+1} \geqslant J_{2p} + J_{2p+1}$. En sommant de 1 à N on obtient :

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{p=1}^{N} \Big(I_{2p} + I_{2p+1}\Big) \geqslant \sum_{p=1}^{N} \Big(J_{2p} + J_{2p+1}\Big).}$$

3. Soit N un élment de $\mathbb{N}^*$. En utilisant I.3.b et IV 2. on obtient :

$$\sum_{p=2}^{2N+1} I_p = \sum_{p=1}^{N} \Big(I_{2p} + I_{2p+1}\Big) \geqslant \sum_{p=1}^{N} \Big(J_{2p} + J_{2p+1}\Big) \geqslant \sum_{p=1}^{N} \left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2}\right) = \sum_{p=3}^{2N+2} \frac{1}{p}$$

La série de terme général $\dfrac{1}{p}$ est divergente et à terme positifs donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Ce qui suffit pour dire que : $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sum_{p=3}^{2N+2} \frac{1}{p} = +\infty$ et ainsi $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \sum_{p=2}^{2N+1} I_p = +\infty$.

Ceci suffit pour dire que la suite des sommes partielles de la série de terme général I_p ne converge pas. Alors

$$\boxed{\text{La série de terme général } I_n \text{ diverge.}}$$
