EMLYON Graduate School of Management

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2003

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 5 mai 2003 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

On considère l'application $\varphi : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$, par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

et on considère, pour tout entier $n \geqslant 1$, les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t, \qquad J_n = \int_0^{1} \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t, \qquad K_n = \int_1^{+\infty} \big(\varphi(t)\big)^n \,\mathrm{d}t.$$

Partie I : Résultats généraux sur φ et J_n

1. Montrer que φ est continue sur $[0;+\infty[$ et que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale J_n existe.

2.a. Montrer que φ est strictement positive sur $[0;1]$ et que φ est strictement décroissante sur $[0;1]$.

b. Établir, pour tout réel $t \in \,]0;+\infty[$: $|\varphi(t)| < 1$.

3.a. Montrer, pour tout réel $t \in [0;+\infty[$: $\varphi(t) \geqslant 1 - t$.

(On pourra étudier les variations sur $[0;+\infty[$ de l'application $t \longmapsto \sin t - t + t^2$).

b. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$: $J_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Partie II : Étude de I_1

a. Montrer, pour tout réel $x \in [1\,;+\infty[$:
$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b. En déduire que les intégrales K_1 et I_1 sont convergentes.

a. Montrer, pour tout réel $t \in [0\,;+\infty[$:
$$|\sin t| \geqslant \sin^2 t = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2t)\big).$$

b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge.

c. Déduire des deux questions précédentes que l'intégrale I_1 n'est pas absolument convergente.

Partie III : Étude de I_n pour $n \geqslant 2$

a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale K_n est convergente.

b. Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$: $\quad |K_n| \leqslant \dfrac{1}{n-1}\cdot$

a. Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

b. Montrer que la suite $(J_n)_{n\geqslant 2}$ converge ; on note ℓ sa limite.

c. Établir, pour tout entier $n \geqslant 2$ et tout réel $a \in\,]0\,;1[$:
$$\int_0^a \big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t \leqslant a \quad \text{et} \quad \int_a^1 \big(\varphi(t)\big)^n\,\mathrm{d}t \leqslant (1-a)\big(\varphi(a)\big)^n.$$
(On pourra utiliser ***I.2.***).

d. En déduire, pour tout réel $a \in\,]0\,;1[$: $\;0 \leqslant \ell \leqslant a$, et conclure : $\;\ell = 0$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'intégrale I_n est convergente.

b. Établir : $\;I_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

Partie IV : Étude de la série de terme général I_n, $n \geqslant 2$

Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$: $\;K_{2p} + K_{2p+1} \geqslant 0$.

En déduire, pour tout entier $N \geqslant 1$:
$$\sum_{p=1}^{N} \big(I_{2p} + I_{2p+1}\big) \geqslant \sum_{p=1}^{N} \big(J_{2p} + J_{2p+1}\big).$$

En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} I_n$ diverge. (On pourra utiliser ***I.3.b.***).