
LYON 2004 PREMIER PROBLÈME

PARTIE I - Étude de la fonction $x \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$

1. a. Notons que la fonction $u \rightarrow \frac{\sin u}{u}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Soit x un élément de $]0, +\infty[$.

Les fonctions $u \rightarrow \frac{1}{u}$ et $u \rightarrow -\cos u$ étant de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, une intégration par parties simple donne :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u} du = \int_1^x \frac{1}{u} \sin u du = \left[\frac{1}{u} (-\cos u) \right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{u^2} \right) (-\cos u) du.$$

$$\text{Ainsi } F(x) = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2} du.$$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, F(x) = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2} du.} \quad (1)$$

$\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient par encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Ainsi $x \rightarrow -\frac{\cos x}{x} + \cos 1$ admet une limite finie en $+\infty$. L'égalité (1) autorise alors à dire que F admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $x \rightarrow \int_1^x \frac{\cos u}{u^2} du$ admet une limite finie en $+\infty$; autrement dit si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du$ converge.

Or $\forall u \in]0, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\cos u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$ converge; les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos u}{u^2} \right| du$.

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du$ est absolument convergente donc convergente. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{F : x \rightarrow \int_1^x \frac{\sin u}{u} du \text{ admet une limite finie en } +\infty \text{ donc que } \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \text{ converge.}}$$

Dans la suite $\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. On a encore : $\alpha = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

b. Notons que la fonction $u \rightarrow \frac{\cos u}{u}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Soit x un élément de $]0, +\infty[$.

Les fonctions $u \rightarrow \frac{1}{u}$ et $u \rightarrow \sin u$ étant de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, une intégration par parties simple donne :

$$G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u} du = \int_1^x \frac{1}{u} \cos u du = \left[\frac{1}{u} (\sin u) \right]_1^x - \int_1^x \left(-\frac{1}{u^2} \right) \sin u du.$$

$$\text{Ainsi } \forall x \in]0, +\infty[, G(x) = \frac{\sin x}{x} - \sin 1 + \int_1^x \frac{\sin u}{u^2} du \quad (2).$$

$\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient par encadrement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Ainsi $x \rightarrow \frac{\sin x}{x} - \sin 1$ admet une limite finie en $+\infty$. L'égalité (2) autorise alors à dire que G admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $x \rightarrow \int_1^x \frac{\sin u}{u^2} du$ admet une limite finie en $+\infty$; autrement dit si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$ converge.

Or $\forall u \in]0, +\infty[, 0 \leq \left| \frac{\sin u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$ converge; les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin u}{u^2} \right| du$.

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du$ est absolument convergente donc convergente. Ceci achève de montrer que :

$$G : x \rightarrow \int_1^x \frac{\cos u}{u} du \text{ admet une limite finie en } +\infty \text{ donc que } \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \text{ converge.}$$

Dans la suite $\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$. On a encore : $\beta = \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$.

Remarque On peut aisément faire a. et b. simultanément en montrant que $x \rightarrow \int_1^x \frac{\sin(u+b)}{u} du$ admet une limite finie en $+\infty$ et en donnant à b successivement les valeurs 0 et $\frac{\pi}{2}$!

c. Soit x un réel strictement positif.

Répetons que $u \rightarrow \frac{\sin u}{u}$ et $u \rightarrow \frac{\cos u}{u}$ sont continues sur $]0, +\infty[$.

Par conséquent les intégrales $\int_x^1 \frac{\sin u}{u} du$ et $\int_x^1 \frac{\cos u}{u} du$ existent.

Or les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ convergent.

Ainsi les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ convergent également.

De plus $\alpha - F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \int_1^x \frac{\sin u}{u} du = \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du + \int_x^1 \frac{\sin u}{u} du = \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

De même $\beta - G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$.

$$\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif } \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \text{ et } \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \text{ convergent.}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \alpha - F(x) \text{ et } \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \beta - G(x).$$

2. a. Soient x et T deux réels strictement positifs. Le changement de variable $u = t + x$ donne sans difficulté :

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x} dt = \int_x^{x+T} \frac{\sin(u-x)}{u} du = \int_x^{x+T} \frac{\sin u \cos x - \cos u \sin x}{u} du. \text{ Ainsi :}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \forall T \in]0, +\infty[, \int_0^T \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u} du.$$

b. Soit x un réel strictement positif. $\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ et $\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$ convergent donc :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u} du \right) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du.$$

Alors $\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$. Par conséquent :

$$\text{pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt \text{ converge.}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du.$$

3. $\forall x \in]0, +\infty[, A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du.$

$$\text{Ainsi } \forall x \in]0, +\infty[, A(x) = (\alpha - F(x)) \cos x - (\beta - G(x)) \sin x.$$

F (resp. G) est la primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction continue $u \rightarrow \frac{\sin u}{u}$ (resp. $u \rightarrow \frac{\cos u}{u}$) qui prend la valeur 0 en 1. Ainsi F et G sont de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

$$\text{De plus } \forall x \in]0, +\infty[, F'(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ et } G'(x) = \frac{\cos x}{x}.$$

F' et G' sont clairement de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ donc F et G sont de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

F, G, \cos et \sin sont de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ donc $A = (\alpha - F) \cos - (\beta - G) \sin$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

$$A \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[.$$

Soit x un élément de $]0, +\infty[$. $A'(x) = -F'(x) \cos x + (\alpha - F(x)) (-\sin x) - (-G'(x)) \sin x - (\beta - G(x)) \cos x$.

$$\text{Notons alors que } -F'(x) \cos x - (-G'(x)) \sin x = -\frac{\sin x}{x} \cos x - \left(-\frac{\cos x}{x}\right) \sin x = 0.$$

$$\text{Ainsi } A'(x) = (\alpha - F(x)) (-\sin x) - (\beta - G(x)) \cos x = (F(x) - \alpha) \sin x + (G(x) - \beta) \cos x.$$

$$\text{Alors } A''(x) = F'(x) \sin x + (F(x) - \alpha) \cos x + G'(x) \cos x + (G(x) - \beta) (-\sin x).$$

$$\text{Ce qui donne } A''(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right) \sin x - (\alpha - F(x)) \cos x + \left(\frac{\cos x}{x}\right) \cos x + (\beta - G(x)) \sin x.$$

$$\text{Donc } A''(x) = -\left((\alpha - F(x)) \cos x - (\beta - G(x)) \sin x\right) + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x} = -A(x) + \frac{1}{x}.$$

$$\text{Ce qui donne } A(x) + A''(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, A(x) + A''(x) = \frac{1}{x}.$$

4. $\forall x \in]0, +\infty[, A(x) = (\alpha - F(x)) \cos x - (\beta - G(x)) \sin x.$

Alors $\forall x \in]0, +\infty[, |A(x)| = |(\alpha - F(x)) \cos x - (\beta - G(x)) \sin x| \leq |\alpha - F(x)| |\cos x| + |\beta - G(x)| |\sin x|.$

Donc $\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq |A(x)| \leq |\alpha - F(x)| + |\beta - G(x)|.$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha - F(x)) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\beta - G(x)) = 0$ il vient par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 0.$

De même $\forall x \in]0, +\infty[, A'(x) = (F(x) - \alpha) \sin x + (G(x) - \beta) \cos x$ donc :

$\forall x \in]0, +\infty[, |A'(x)| = |(F(x) - \alpha) \sin x + (G(x) - \beta) \cos x| \leq |F(x) - \alpha| |\sin x| + |G(x) - \beta| |\cos x|.$

$\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq |A'(x)| \leq |F(x) - \alpha| + |G(x) - \beta|.$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - \alpha) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (G(x) - \beta) = 0$ il vient par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} A'(x) = 0.$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} A'(x) = 0.$$

5. a. Soit x un élément de $]0, 1]$.

$\forall u \in [x, 1], \frac{1}{u} \geq 0$ et $0 \leq \cos u \leq 1$ donc $\forall u \in [x, 1], 0 \leq \frac{\cos u}{u} \leq \frac{1}{u}.$

En intégrant il vient $0 \leq \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du \leq \int_x^1 \frac{1}{u} du$ car $x \leq 1.$

Or $\int_x^1 \frac{1}{u} du = [\ln |u|]_x^1 = \ln 1 - \ln x = -\ln x.$ Finalement :

$$\forall x \in]0, 1], 0 \leq \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du \leq -\ln x.$$

b. $\forall x \in]0, +\infty[, \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du + \sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du.$

Notons que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin x \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \right) = 0.$ Ainsi pour montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \right) = 0,$ il suffit donc de montrer que : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du \right) = 0.$

$\forall x \in]0, 1], 0 \leq \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du \leq -\ln x$ et $\sin x \geq 0.$

Par conséquent : $\forall x \in]0, 1], 0 \leq \sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du \leq \sin x (-\ln x) = -\frac{\sin x}{x} (x \ln x).$

Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{\sin x}{x} (x \ln x) \right) = 0.$

Il vient alors par encadrement : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin x \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du \right) = 0$ et ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \right) = 0.}$$

c. $u \rightarrow \frac{\sin u}{u}$ est continue sur \mathbb{R}^* et prolongeable par continuité en 0 car $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$.

Ainsi $\int_0^1 \frac{\sin u}{u} du$ converge. Or nous avons vu plus haut que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge donc :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \text{ converge.}}$$

Ceci permet de dire que $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

Rappelons que $\forall x \in]0, +\infty[$, $A(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du$.

Rappelons également que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \right) = 0$.

Alors $\lim_{x \rightarrow 0} A(x) = 1 \times \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - 0$. Finalement :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du.}$$

PARTIE II - Étude de la fonction $x \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

1. Soient x un réel strictement positif et k un élément de \mathbb{N} .

$\lim_{t \rightarrow +\infty} (t^k e^{-xt}) = 0$ donc il existe un réel A strictement positif A tel que : $\forall t \in]A, +\infty[$, $|t^k e^{-xt}| < 1$.

Ainsi $t \rightarrow t^k e^{-xt}$ est bornée sur $]A, +\infty[$. Comme cette fonction est continue sur le segment $[0, A]$ elle est également bornée sur $[0, A]$.

$t \rightarrow t^k e^{-xt}$ est bornée sur $[0, A]$ et sur $]A, +\infty[$ donc elle bornée sur $[0, +\infty[$.

$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ strictement positif et pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N}, t \rightarrow t^k e^{-xt} \text{ est bornée sur } [0, +\infty[.}$

Fixons de nouveau x dans $]0, +\infty[$ et k dans \mathbb{N} . $t \rightarrow t^k e^{-xt}$ est bornée sur $[0, +\infty[$ donc il existe un réel M strictement positif tel que $\forall t \in [0, +\infty[$, $0 \leq t^k e^{-xt} = |t^k e^{-xt}| \leq M$. Ainsi :

1. $t \rightarrow \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$;
2. $\forall t \in [1, +\infty[$; $0 \leq \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{M}{1+t^2} \leq \frac{M}{t^2}$;

3. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

Pour tout réel x strictement positif et pour tout élément k de \mathbb{N} , $\int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge.

2. a. $\varphi : u \rightarrow e^u$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et $\forall u \in \mathbb{R}$, $\varphi'(u) = \varphi''(u) = e^u$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à φ à l'ordre 1 donne :

$$\forall u \in \mathbb{R}, |\varphi(u) - \varphi(0) - (u-0)\varphi'(0)| \leq \frac{|u-0|^2}{2} \underset{z \in \overline{[0,u]}}{\text{Max}} |\varphi''(z)| \text{ ou } \forall u \in \mathbb{R}, |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \underset{z \in \overline{[0,u]}}{\text{Max}} e^z.$$

Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R} : \forall u \in \mathbb{R}$, $\underset{z \in \overline{[0,u]}}{\text{Max}} e^z \leq e^{\text{Max}(0,u)} \leq e^{|u|}$.

$$\text{Ainsi } \forall u \in \mathbb{R}, |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} \underset{z \in \overline{[0,u]}}{\text{Max}} e^z \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}.$$

$$\forall u \in \mathbb{R}, |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}.$$

b. Soient k un élément de \mathbb{N} , x un réel strictement positif et h un réel tel que $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$.

$-\frac{x}{2} \leq h \leq \frac{x}{2}$ donc $0 < \frac{x}{2} \leq x+h$. Alors on peut parler de $B_k(x+h)$... ainsi que de $B_k(x)$, $B_{k+1}(x)$ et de $B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$\text{Posons } \Delta(h) = \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x).$$

$$\Delta(h) = \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^k e^{-(x+h)t}}{1+t^2} - \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{h t^{k+1} e^{-xt}}{1+t^2} \right) dt = \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} (e^{-ht} - 1 + ht) dt.$$

Soit A un réel strictement positif. Posons $\Delta_A(h) = \frac{1}{h} \int_0^A \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} (e^{-ht} - 1 + ht) dt$.

Notons que $\lim_{A \rightarrow +\infty} \Delta_A(h) = \Delta(h)$. Ainsi $\lim_{A \rightarrow +\infty} |\Delta_A(h)| = |\Delta(h)|$.

$$|\Delta_A(h)| = \left| \frac{1}{h} \int_0^A \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} (e^{-ht} - 1 + ht) dt \right| \leq \frac{1}{|h|} \int_0^A \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} |e^{-ht} - 1 + ht| dt.$$

En appliquant le résultat de a) il vient :

$$|\Delta_A(h)| \leq \frac{1}{|h|} \int_0^A \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \frac{(-ht)^2}{2} e^{|-ht|} dt = \frac{h^2}{2|h|} \int_0^A \frac{t^{k+2} e^{(|h|-x)t}}{1+t^2} dt = \frac{|h|}{2} \int_0^A \frac{t^{k+2} e^{(|h|-x)t}}{1+t^2} dt.$$

$$|h| \leq \frac{x}{2} \text{ donc } \forall t \in [0, +\infty[, e^{(|h|-x)t} \leq e^{(\frac{x}{2}-x)t} = e^{-\frac{x}{2}t} \text{ donc } \forall t \in [0, +\infty[, \frac{t^{k+2} e^{(|h|-x)t}}{1+t^2} \leq \frac{t^{k+2} e^{-\frac{x}{2}t}}{1+t^2}.$$

En intégrant on obtient alors : $\int_0^A \frac{t^{k+2} e^{(|h|-x)t}}{1+t^2} dt \leq \int_0^A \frac{t^{k+2} e^{-\frac{x}{2}t}}{1+t^2} dt$ car A est (strictement) positif.

$$\text{Alors } |\Delta_A(h)| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^A \frac{t^{k+2} e^{(|h|-x)t}}{1+t^2} dt \leq \frac{|h|}{2} \int_0^A \frac{t^{k+2} e^{-\frac{x}{2}t}}{1+t^2} dt.$$

B_{k+2} est définie en $\frac{x}{2}$ car $\frac{x}{2}$ est strictement positif donc $\int_0^{+\infty} \frac{t^{k+2} e^{-\frac{x}{2}t}}{1+t^2} dt$ converge.

De plus $\lim_{A \rightarrow +\infty} |\Delta_A(h)| = |\Delta(h)|$.

$$\text{Ainsi } \left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| = |\Delta(h)| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+2} e^{-\frac{x}{2}t}}{1+t^2} dt = \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, +\infty[, \forall h \in \mathbb{R}, 0 < |h| \leq \frac{x}{2} \Rightarrow \left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).}$$

c. Soit k un élément de \mathbb{N} . Soit x un réel strictement positif.

$$\forall h \in \left[-\frac{x}{2}, \frac{x}{2}\right] - \{0\}, 0 \leq \left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right) \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right) \right) = 0.$$

Il vient alors par encadrement : $\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right) = 0$.

$$\text{Ceci donne encore : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} = -B_{k+1}(x).$$

Par conséquent B_k est dérivable en x et $B'_k(x) = -B_{k+1}(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N}, B_k \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, B'_k(x) = -B_{k+1}(x).}$$

d. Ce qui précède montre en particulier que B_0 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[, B'_0(x) = -B_1(x)$.

Cela montre également que B_1 est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[, B'_1(x) = -B_2(x)$.

Alors B_0 est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[, B''_0(x) = -B'_1(x) = B_2(x)$.

Mais B_2 est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc continue. Alors B''_0 est continue sur $]0, +\infty[$. Finalement :

$$\boxed{B_0 \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, B''_0(x) + B_0(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} + \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right) dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt.$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A e^{-xt} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\left[-\frac{e^{-xt}}{x} \right]_0^A \right) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-xA}}{x} \right) = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Ainsi : } \forall x \in]0, +\infty[, \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, B''_0(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}.}$$

3. Soit x un élément de $]0, +\infty[$. Rappelons que $B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $-B'_0(x) = B_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-xt}}{1+t^2} dt$.

$$\forall t \in [0, +\infty[, \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \text{ et } e^{-xt} \geq 0 \text{ donc } \forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}.$$

Or nous venons de voir que $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$. En intégrant il vient donc : $0 \leq B_0(x) \leq \frac{1}{x}$.

$$\forall t \in [0, +\infty[, \frac{1}{1+t^2} \leq 1 \text{ et } te^{-xt} \geq 0 \text{ donc } \forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq \frac{te^{-xt}}{1+t^2} \leq te^{-xt}.$$

Ainsi en intégrant on obtient : $\forall A \in [0, +\infty[, 0 \leq \int_0^A \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt \leq \int_0^A te^{-xt} dt$.

Une intégration par parties simple donne :

$$\forall A \in [0, +\infty[, \int_0^A te^{-xt} dt = \left[\frac{te^{-xt}}{-x} \right]_0^A - \int_0^A \frac{e^{-xt}}{-x} dt.$$

$$\text{Alors } \forall A \in [0, +\infty[, \int_0^A te^{-xt} dt = -\frac{Ae^{-xA}}{x} + \frac{1}{x} \int_0^A e^{-xt} dt \leq \frac{1}{x} \int_0^A e^{-xt} dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Par conséquent } \forall A \in [0, +\infty[, 0 \leq \int_0^A \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt \leq \int_0^A te^{-xt} dt \leq \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{En faisant tendre } A \text{ vers } +\infty \text{ il vient } 0 \leq B_1(x) \leq \frac{1}{x^2} \text{ ou } 0 \leq -B'_0(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, 0 \leq B_0(x) \leq \frac{1}{x} \text{ et } 0 \leq -B'_0(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. Il vient alors sans difficulté par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} B_0(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} B'_0(x) = 0.}$$

4. a Soit x un élément de $]0, +\infty[$.

$t \rightarrow \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, $\forall t \in [1, +\infty[, \frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Les règles de comparaison des intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$$\forall t \in [0, +\infty[, e^{-xt} \leq 1 \text{ et } \frac{1}{1+t^2} \geq 0 \text{ donc } \forall t \in [0, +\infty[, \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

$$\text{En intégrant on obtient alors } B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Notons que $t \rightarrow e^{-xt}$ est une fonction décroissante sur \mathbb{R} car x est strictement positif. Alors :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{x}}\right], e^{-xt} \geq e^{-x \frac{1}{\sqrt{x}}} = e^{-\sqrt{x}} \text{ et } \frac{1}{1+t^2} \geq 0 \text{ donc } \forall t \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{x}}\right], \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \geq \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1+t^2}.$$

$$\text{En intégrant il vient : } \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{1+t^2} dt = e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$\forall t \in \left[\frac{1}{\sqrt{x}}, +\infty \right[$, $\frac{e^{-xt}}{1+t^2} \geq 0$ donc $\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \geq 0$ ($\int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge car $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ converge).

Alors $B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt + \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \geq \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \geq e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

b. \tan est de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$ et définit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$ sur $]0, +\infty[$. Soit y un élément de $\left[0, \frac{\pi}{2} \right[$.

Le changement de variable $t = \tan u$ donne alors $\int_0^y du = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2} dt$ ($dt = (1 + \tan^2 u) du$ ou $du = \frac{1}{1+t^2} dt$).

$$\forall y \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[, \int_0^y du = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

$\forall y \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right[, \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^y du = y$.

Comme $\lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan y = +\infty$, en faisant tendre y vers $\frac{\pi}{2}$ par valeur inférieure, il vient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Rappelons que $\forall x \in]0, +\infty[, e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$.

Ainsi : $\forall x \in]0, +\infty[, e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt \leq B_0(x) \leq \frac{\pi}{2}$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$. De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\sqrt{x}} = 1$.

Ainsi $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\sqrt{x}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$. Il vient alors par encadrement :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}.$$

PARTIE III - Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$

1. Rappelons que A et B_0 sont de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in]0, +\infty[, A''(x) + A(x) = B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}$.

Or $\forall x \in]0, +\infty[, \varphi(x) = A(x) - B_0(x)$ donc φ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

De plus $\forall x \in]0, +\infty[$, $\varphi(x) + \varphi''(x) = A(x) - B_0(x) + A''(x) - B_0''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$.

$U = \varphi^2 + \varphi'^2$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ car φ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$. En dérivant on obtient :

$$\forall x \in]0, +\infty[, U'(x) = (\varphi^2 + \varphi'^2)'(x) = 2\varphi'(x)\varphi(x) + 2\varphi''(x)\varphi'(x) = 2\varphi'(x)(\varphi(x) + \varphi''(x)) = 0.$$

U est alors de dérivée nulle sur l'intervalle $]0, +\infty[$ donc :

$$\boxed{U \text{ est constante sur }]0, +\infty[.}$$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} B_0(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} A'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} B_0'(x) = 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (A(x) - B(x)) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (A'(x) - B'(x)) = 0$.

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((\varphi(x))^2 + (\varphi'(x))^2) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = 0.}$$

3. U est constante sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} U(x) = 0$. Ainsi U est nulle sur $]0, +\infty[$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[$, $A(x) - B_0(x) = 0$.

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, A(x) = B_0(x).}$$

4. $\forall x \in]0, +\infty[$, $A(x) = B_0(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ (d'après **I.5.c.**) et $\lim_{x \rightarrow 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}$ (d'après **II.4.c.**). Ainsi :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.}$$
