DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles à n lignes.

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite positive si et seulement si tous les cœfficients de M sont positifs ou nuls. On notera alors $M \geqslant 0$.
Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite strictement positive si et seulement si tous les cœfficients de M sont strictement positifs. On notera alors $M > 0$.
Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou deux matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la notation $M \geqslant N$ (respectivement $M > N$) signifie que $M - N \geqslant 0$ (respectivement $M - N > 0$).

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite productive si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes : M est positive et il existe une matrice positive P de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - MP > 0$.

I - Étude d'exemples

1. En considérant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que la matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est productive.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas productive.

II - Caractérisation des matrices positives

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si M est positive, alors, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.

2. Réciproquement, montrer que, si, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif, alors la matrice M est positive.

III - Caractérisation des matrices productives

1. Soit A une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le cœfficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté a_{ij}, et P une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $P - AP > 0$. On note $p_1, \ldots, p_n$ les cœfficients de la matrice colonne P.

a. Montrer que $P > 0$.

b. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X \geqslant AX$. On note $x_1, \ldots, x_n$ les cœfficients de la matrice colonne X. On désigne par c le plus petit des réels $\dfrac{x_j}{p_j}$ lorsque l'entier j décrit l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et k un indice tel que $c = \dfrac{x_k}{p_k}$.

Établir que $c\,(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} p_j) \geqslant 0$. En déduire que $c \geqslant 0$ et que X est positive.

c. Soit X appartenant à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $X = AX$. En remarquant que $-X \geqslant A(-X)$, montrer que X est nulle. En déduire que $I_n - A$ est inversible, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d. Montrer que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est positive (on pourra utiliser ***III.1.b***).
En déduire que $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

2. Dans cette question, on considère une matrice positive B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ soit inversible et telle que $(I_n - B)^{-1}$ soit positive. On note $V = (I_n - B)^{-1}U$, où U est la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les cœfficients sont égaux à 1.
Montrer que $V - BV > 0$. Conclure.

3. Donner une caractérisation des matrices productives.

4. *Application* : Soit M une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2M^2 = M$.
Vérifier que $(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n$ et en déduire que M est productive.

SECOND PROBLÈME

PARTIE I - Étude d'exemples

1. $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est positive car ses coefficients sont des réels positifs ou nuls.

$$U - AU = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$U - AU$ est strictement positive.

Ainsi U est une matrice (strictement) positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que la matrice $U - AU$ soit strictement positive.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est productive.}}$$

2. Notons que $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice positive de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Soit $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$P - BP = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x + 4y + z \\ 2x + y + 3z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4y - z \\ -2x - 3z \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le dernier coefficient de $P - BP$ est nul donc cette matrice n'est pas strictement positive.

Ainsi il n'existe pas de matrice positive P de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que $P - BP$ soit strictement positive.

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ n'est pas productive.}}$$

PARTIE II - Caractérisation des matrices productives positives

M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que la matrice $M = (m_{ij})$ est positive. Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ij} \geqslant 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \geqslant 0$.

Posons $Y = MX = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ y_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\, x_j$.

Comme $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ij} \geqslant 0$ et $\forall j \in [\![1,n]\!],\ x_j \geqslant 0 : \forall i \in [\![1,n]\!],\ y_i \geqslant 0$. $Y = MX$ est positive. Ainsi :

> Si M est une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.

2. Réciproquement supposons que pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif.

Montrons que M est positive.

Fixons j dans $[\![1,n]\!]$. Soit $E_j = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ le $j^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$u_j = 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!] - \{j\},\ u_i = 0$.

E_j est donc une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc, par hypothèse, ME_j est une matice positive.

Redémontrons que ME_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de M.

Posons $ME_j = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ v_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ik}\, u_k = m_{ij}\, u_j = m_{ij}$. Nous retrouvons bien le fait que ME_j est la $j^{\text{ème}}$ colonne de M.

Comme ME_j est positive : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ m_{ij} \geqslant 0$.

Ceci étant vrai pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$ on alors $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ m_{ij} \geqslant 0$. M est donc positive.

> Réciproquement si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour toute matrice positive X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le produit MX est positif alors M est une matice positive.

> Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M est positive si et seulement : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \geqslant 0 \Rightarrow MX \geqslant 0$.

PARTIE III - Caractérisation des matrices productives

1. a Posons $W = AP = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. Alors $T = P - AP = \begin{pmatrix} p_1 - w_1 \\ p_2 - w_2 \\ \vdots \\ p_n - w_n \end{pmatrix}$.

Par hypothèse $T > 0$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i - w_i > 0$. Ainsi : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i > w_i$.

A étant productive, A est positive. Comme P est une matrice (strictement) positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $W = AP$ est positive d'après ***II 1.***.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i > w_i \geqslant 0$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i > 0$. Finalement :

$$\boxed{P \text{ est strictement positive.}}$$

b. $X \geqslant AX$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$.

En particulier $x_k \geqslant \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j$. Alors $0 \leqslant x_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j = c\,p_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j$ (car $x_k = c\,p_k$).

Or $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \frac{x_j}{p_j} \geqslant c,\ a_{kj} \geqslant 0$ et $p_j \geqslant 0$ donc $\forall j \in [\![1, n]\!],\ \frac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j \geqslant c\, a_{kj}\, p_j$.

Ceci donne : $\forall j \in [\![1, n]\!],\ -\frac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j \leqslant -c\, a_{kj}\, p_j$. En sommant il vient : $-\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j \leqslant -c \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j$.

En ajoutant $c\,p_k$ on obtient : $c\,p_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j \leqslant c\,p_k - c\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j = c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j\right)$.

Or nous avons vu plus haut que $0 \leqslant c\,p_k - \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{p_j}\, a_{kj}\, p_j$. A fortiori :

$$\boxed{0 \leqslant c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j\right).}$$

$P - AP$ est strictement positive donc tous ses coefficients sont strictement positifs.

En particulier le coefficient de sa $k^{\text{ème}}$ ligne qui n'est autre que $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j$.

Alors $p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j > 0$ et $0 \leqslant c\left(p_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, p_j\right)$. Par conséquent $c \geqslant 0$.

$$\boxed{c \text{ est positif ou nul.}}$$

$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \frac{x_i}{p_i} \geqslant c \geqslant 0$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \frac{x_i}{p_i} \geqslant 0$. Or $\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i > 0$ car P est strictement positive.

Ainsi : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \geqslant 0$. Finalement :

$$\boxed{X \text{ est positive.}}$$

c. $X = AX$ donc nécessairement $-X = A(-X)$. Le tout permet de dire que $X \geqslant AX$ et $-X \geqslant A(-X)$.

Alors ce qui précède montre que X et $-X$ sont des matrices positives. Par conséquent X est nulle.

$$\boxed{\text{Si } X \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telle que } AX = X \text{ alors } X \text{ est nulle.}}$$

Ceci signifie encore que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ (I_n - A)X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ce qui est équivalent à dire que $I_n - A$ est inversible.

$$\boxed{I_n - A \text{ est inversible.}}$$

d. Soit X une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Posons $Y = (I_n - A)^{-1}X$ et montrons que cette matrice est positive.

$0 \leqslant X = (I_n - A)Y = Y - AY$ donc $Y \geqslant AY$. D'après ***III.1.b.*** Y est positive.

$$\boxed{\text{Pour toute matrice positive } X \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{, la matrice } Y = (I_n - A)^{-1}X \text{ est positive.}}$$

Ce qui précède indique que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \geqslant 0 \Rightarrow (I_n - A)^{-1}X \geqslant 0$. ***II.2.*** permet alors de dire que :

$$\boxed{(I_n - A)^{-1} \text{ est positive.}}$$

2. $V = (I_n - B)^{-1}U$ donc $V - BV = (I_n - B)\,V = U$.

$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ étant strictement positive il en est de même de $V - BV$!

$$\boxed{V - BV > 0}$$

$(I_n - B)^{-1}$ est, par hypothèse, une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U est une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $V = (I_n - B)^{-1}U$ est une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

V est finalement une matrice positive de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui vérifie $V - BV > 0$.

Comme par hypothèse B est positive, on peut alors dire que :

$$\boxed{B \text{ est productive.}}$$

3. Grace à ***III.1*** nous pouvons dire que si A est une matrice productive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A est positive, $I_n - A$ est inversible et $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

III.2 vient de nous montrer que si B est une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n - B$ est inversible et $(I_n - B)^{-1}$ est positive alors B est productive. Ainsi :

Une matrice A, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est productive si et seulement si : 1. A est positive ; 2. $I_n - A$ est inversible ; 3. $(I_n - A)^{-1}$ est positive.

4. $(I_n - M)(I_n + 2\,M) = I_n + 2M - M - 2\,M^2 = I_n + 2M - M - M = I_n$.

$$\boxed{(I_n - M)(I_n + 2\,M) = I_n}.$$

Alors $I_n - M$ est inversible et son inverse est $I_n + 2\,M$.

M étant positive il en est de même de $I_n + 2\,M$ (non ?) donc de $(I_n - M)^{-1}$.

M est une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $I_n - M$ est inversible et son inverse est positive. D'après ce qui précède :

$$\boxed{M \text{ est productive.}}$$