LYON 2006 PREMIER PROBLÈME

Préliminaires

1. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$\forall t \in]0,+\infty[,\ \dfrac{t^n\, e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2}\, e^{-t^2} = (t^2)^{\frac{n+2}{2}}\, e^{-t^2}$.

Or par croissance comparée $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^\alpha\, e^{-x}\right) = 0$ donc $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{t\to+\infty} \left((t^2)^\alpha\, e^{-t^2}\right) = 0$.

Alors $\lim\limits_{t\to+\infty} \left((t^2)^{\frac{n+2}{2}}\, e^{-t^2}\right) = 0$. Ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^n\, e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = 0$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ t^n\, e^{-t^2} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}} \left(\frac{1}{t^2}\right).}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $f_n : t \to t^n\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- $f_n(t) = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{o}} \left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
- $\forall t \in [1,+\infty[, f_n(t) \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge car $2 > 1$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge également puisque f_n est continue sur $[0,1]$.

Soit A un réel strictement négatif.

Le changement de variable $u = -t$ donne sans difficulté : $\displaystyle\int_A^0 f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-A}^0 f_n(-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{-A} f_n(-u)\,\mathrm{d}u$.

Observons que $\forall u \in \mathbb{R},\ f_n(-u) = (-u)^n\, e^{-u^2} = (-1)^n\, u^n\, e^{-u^2} = (-1)^n\, f_n(u)$ (f_n a la parité de n).

Alors $\displaystyle\int_A^0 f_n(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^{-A} f_n(u)\,\mathrm{d}u$.

Or $\lim\limits_{A\to-\infty}(-A) = +\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle(-1)^n \int_0^{+\infty} f_n(u)\,\mathrm{d}u$.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\Big(1 + (-1)^n\Big) \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

Remarque *Si n est un élément pair de $\mathbb{N}$,* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Si n est un élément impair de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

2. Soit P un élément de $\mathbb{R}[X]$.

Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ tel que $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{r} a_n\, X^n$.

Pour tout élément n de $[\![0, r]\!]$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{r} a_n\, (t^n\, e^{-t^2})\right)\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{r} a_n\, t^n\right) e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } P \text{ de } \mathbb{R}[X],\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

3. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Soient A et B deux réels.

Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = t^{n+1}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ v(t) = -\dfrac{1}{2}\, e^{-t^2}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = (n+1)\, t^n$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ v'(t) = t\, e^{-t^2}$.

Une intégration par parties simple donne alors :

$$\int_A^B t^{n+2}\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_A^B u(t)\, v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)\, v(t)\Big]_A^B - \int_A^B u'(t)\, v(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_A^B t^{n+2}\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[t^{n+1}\left(-\frac{1}{2}\, e^{-t^2}\right)\right]_A^B - \int_A^B (n+1)\, t^n \left(-\frac{1}{2}\, e^{-t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\int_A^B t^{n+2}\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\, A^{n+1}\, e^{-A^2} - \frac{1}{2}\, B^{n+1}\, e^{-B^2} + \frac{n+1}{2}\int_A^B t^n\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'après **1.a.**, $B^{n+1}\, e^{-B^2} \underset{B\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{B^2}\right)$. Or $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \frac{1}{B^2} = 0$. Ainsi $\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \left(B^{n+1}\, e^{-B^2}\right) = 0$.

$\displaystyle\lim_{A\to-\infty} (-A) = +\infty$. Donc $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \left((-A)^{n+1}\, e^{-(-A)^2}\right) = 0$ d'après ce que nous venons de voir.

Ainsi $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \left((-1)^{n+1}\left(A^{n+1}\, e^{-A^2}\right)\right) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \left(A^{n+1}\, e^{-A^2}\right) = 0$.

Alors $\displaystyle\int_A^B t^{n+2}\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\, A^{n+1}\, e^{-A^2} - \frac{1}{2}\, B^{n+1}\, e^{-B^2} + \frac{n+1}{2}\int_A^B t^n\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\lim_{A\to-\infty} \left(A^{n+1}\, e^{-A^2}\right) = 0$,

$\displaystyle\lim_{B\to+\infty} \left(B^{n+1}\, e^{-B^2}\right) = 0$, $I_{n+1} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+1}\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Alors en faisant tendre A vers $-\infty$, puis B vers $+\infty$ dans l'égalité précédente on obtient : $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{2}\, I_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{n+1}{2}\, I_n.}$$

b. Nous avons vu plus haut que si n est un élément impair de $\mathbb{N}$ alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = 0}.$$

c. Montrons par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,p!}\,\sqrt{\pi}$.

• $I_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Oublions le résultat proposé... pour tester le théorème de changement de variable sur les intégrales généralisées.

Posons $\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}$. φ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Ce qui donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\,\pi}$.

$h : u \to e^{-u^2}$ est continue sur $]-\infty,+\infty[$, $\psi : t \to \dfrac{t}{\sqrt{2}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,+\infty[$, strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$ et définit une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h\big(\psi(t)\big)\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence sont égales.

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\,\mathrm{d}u = I_0$ existe donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h\big(\psi(t)\big)\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t$ existe et vaut I_0.

Ainsi $I_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h\big(\psi(t)\big)\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2\,\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}$.

Alors $I_0 = \sqrt{\pi} = \dfrac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}\,0!}\,\sqrt{\pi}$ et la propriété est vraie pour $p = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément p de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $p+1$.

$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2}\,I_{2p} = \dfrac{(2p+2)\,(2p+1)}{2^2(p+1)}\,I_{2p} = \dfrac{(2p+2)\,(2p+1)}{2^2(p+1)}\,\dfrac{(2p)!}{2^{2p}\,p!}\,\sqrt{\pi} = \dfrac{\big(2(p+1)\big)!}{2^{2(p+1)}\,(p+1)!}\,\sqrt{\pi}$.

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}\,p!}\,\sqrt{\pi}.}$$

I Recherche d'extremums locaux pour une fonction de deux variables réelles

1. Soit x et y deux réels.

$t \to (t-x)^2\,(t-y)^2$ est une fonction polynôme donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente d'après le préliminaire.

Par conséquent $F(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existe.

$\forall t \in \mathbb{R},\ (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2} = (t^2 - 2\,x\,t + x^2)\,(t^2 - 2\,y\,t + y^2)\,e^{-t^2}$. Alors :

$\forall t \in \mathbb{R},\ (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2} = \Big(t^4 - 2\,(x+y)\,t^3 + (x^2 + 4x\,y + y^2)\,t^2 - 2\,(x\,y^2 + y\,x^2)\,t + x^2\,y^2\Big)\,e^{-t^2}$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2} = t^4\,e^{-t^2} - 2\,(x+y)\,t^3\,e^{-t^2} + (x^2+4x\,y+y^2)\,t^2\,e^{-t^2} - 2\,(x\,y^2+y\,x^2)\,t\,e^{-t^2} + x^2\,y^2\,e^{-t^2}$.

Rappelons que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge. Alors, par linéarité, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = I_4 - 2\,(x+y)\,I_3 + (x^2 + 4x\,y + y^2)\,I_2 - 2\,(x\,y^2 + y\,x^2)\,I_1 + x^2\,y^2\,I_0.$$

Or $I_3 = I_1 = 0$. $I_0 = \sqrt{\pi}$, $I_2 = \dfrac{0+1}{2}\,I_0 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$ et $I_4 = \dfrac{2+1}{2}\,I_2 = \dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(x^2 + 4xy + y^2\right) + x^2\,y^2\right)\sqrt{\pi}$.

Ainsi $F(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2\,(t-y)^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(x^2 + 4xy + y^2\right) + x^2\,y^2$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(x^2 + 4xy + y^2\right) + x^2\,y^2.}$$

2. F est une application polynômiale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ donc F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. En particulier F possède des dérivées partielles premières en tout point de $\mathbb{R}^2$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{1}{2}\big(2x + 4y\big) + 2x\,y^2 = x + 2y + 2x\,y^2$.

De même $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{2}\big(4x + 2y\big) + 2x^2\,y = 2x + y + 2x^2\,y$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x + 2y + 2x\,y^2 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x + y + 2x^2\,y.}$$

Soit $X = (x,y)$ un élément de $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} x + 2y + 2x\,y^2 = 0 \\ 2x + y + 2x^2\,y = 0 \end{cases}.$$

En rempaçant la seconde ligne par la seconde moins la première et en factorisant par $x - y$ il vient :

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(X) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2x\,y^2 = 0 \\ (x-y)\,(1+2xy) = 0 \end{cases}$. Alors :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x\,(3 + 2\,x^2) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 2xy = -1 \\ x + 2y + (-1)\,y = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = y \\ x\,(3 + 2\,x^2) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x = y = 0.$$

$$\begin{cases} 2xy = -1 \\ x + 2y + (-1)\,y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \Longleftrightarrow X = (0,0) \text{ ou } X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } X = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$\boxed{F \text{ possède exactement trois points critiques} : O = (0,0),\ A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ et } B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).}$$

3. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ donc si F possède un extremum en un point X de $\mathbb{R}^2$ alors son gradient s'annule en X et ainsi $\dfrac{\partial F}{\partial x}(X) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(X) = 0$.

Alors F ne peut admettre un extremum local qu'en O, A ou B.

Nous avons vu que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Rappelons que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = x + 2y + 2x\,y^2$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x + y + 2x^2\,y$.

Alors $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = 1 + 2y^2,\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = 1 + 2x^2$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) = 2 + 4xy$.

En utilisant les notations de Monge on obtient en $O = (0,0) : rt - s^2 = 1 \times 1 - 2^2 = -3 < 0$. F ne possède pas d'extremum local en $O = (0,0)$.

En $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ on obtient : $rt - s^2 = 2 \times 2 - 0^2 = 4 > 0$ et $r = 2 > 0$.

F possède en $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ un minimum local.

Notons encore que $F(A) = F(B) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - 4\,\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\right) + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot$

En $A = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $B = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ F possède un minimum local qui vaut $\dfrac{1}{2}\cdot$ De plus ce sont les seuls points de $\mathbb{R}^2$ où F possède un extremum local.

Remarque Vous avez dit local ? Mouais ?

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left((x+y)^2 + 2\,xy\right) + (xy)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,(x+y)^2 + (xy)^2 + (xy) + \frac{1}{4}\cdot$$

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ F(x,y)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\,(x+y)^2+\left(xy+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqslant 0.$

Ainsi F admet un minimum global qui vaut $\dfrac{1}{2}$ atteint en les seuls points A et B.

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

---

1. Soit x un réel. $\varphi_x : x\to \sin(xt)\,e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant|\varphi_x(t)|=|\sin(xt)|\,e^{-t^2}\leqslant e^{-t^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $I_0=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\varphi_x(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

$\psi_x : x\to t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant|\psi_x(t)|=|\cos(xt)|\,t\,e^{-t^2}\leqslant t\,e^{-t^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge car $I_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty}|\psi_x(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\sin(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_0^{+\infty} t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ convergent.}}$$

2. Soit a et λ deux réels. sin est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Taylor-lagrange appliquée à sin à l'ordre 1 donne :

$|\sin(a+\lambda)-\sin(a)-(a+\lambda-a)\,\sin'(a)|\leqslant\dfrac{|a+\lambda-a|^2}{2}\displaystyle\operatorname*{Max}_{u\in[\mathrm{Min}(a,a+\lambda),\mathrm{Max}(a,a+\lambda)]}|\sin''(u)|.$

Ainsi $|\sin(a+\lambda)-\sin(a)-\lambda\,\cos(a)|\leqslant\dfrac{\lambda^2}{2}\displaystyle\operatorname*{Max}_{u\in[\mathrm{Min}(a,a+\lambda),\mathrm{Max}(a,a+\lambda)]}|-\sin(u)|\leqslant\dfrac{\lambda^2}{2}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{\forall a\in\mathbb{R},\forall\lambda\in\mathbb{R},\ |\sin(a+\lambda)-\sin(a)-\lambda\,\cos(a)|\leqslant\frac{\lambda^2}{2}\cdot}$$

3. a. Soit x un réel et h un réel non nul. Posons $\Delta_x(h)=\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}-C(x)$.

$\Delta_x(h)=\dfrac{1}{h}\big(S(x+h)-S(x)-h\,C(x)\big).$

$\Delta_x(h)=\dfrac{1}{h}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin\big((x+h)\,t\big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}\sin(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t-h\int_0^{+\infty}t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right).$

$\Delta_x(h)=\dfrac{1}{h}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(\sin(xt+ht)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right).$

Soit A un réel strictement positif.

$$\left|\int_0^A \Big(\sin\big((x+h)\,t\big)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^A \Big|\sin\big((x+h)\,t\big)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big|\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant le résultat de **2.** (avec $a = xt$ et $\lambda = ht$) il vient :

$$\left|\int_0^A \Big(\sin\big((x+h)\,t\big)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^A \frac{(ht)^2}{2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{h^2}{2}\int_0^A t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\sin\big((x+h)\,t\big)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ existent.

En faisant tendre A ver $+\infty$ on obtient alors :

$$\left|\int_0^{+\infty} \Big(\sin\big((x+h)\,t\big)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{|h|^2}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Alors $\displaystyle |\Delta_x(h)| = \frac{1}{|h|}\left|\int_0^{+\infty} \Big(\sin(xt+ht)+\sin(xt)-ht\,\cos(xt)\Big)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

Ainsi $\displaystyle |\Delta_x(h)| \leqslant \frac{|h|}{2}\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout réel h non nul.

En faisant tendre h vers zéro il vient par encadrement : $\displaystyle\lim_{h\to 0}\Delta_x(h) = 0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - C(x)\right) = 0.$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : \lim_{h\to 0}\left(\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - C(x)\right) = 0.}$$

b. Soit x un élément de $\mathbb{R}$: $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{S(x+h)-S(x)}{h} - C(x)\right) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h} = C(x)$.

Alors S est dérivable en x et $S'(x) = C(x)$.

$$\boxed{S \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R},\ S'(x) = C(x).}$$

4. a. Soit x un élément de $\mathbb{R}$.

Soit A un réel strictement positif. Posons ici $\forall t \in \mathbb{R},\ u(t) = \cos(xt)$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ v(t) = -\dfrac{1}{2}\,e^{-t^2}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R},\ u'(t) = -x\,\sin(xt)$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ v'(t) = t\,e^{-t^2}$.

De plus $\displaystyle\int_0^A t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^A u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties il vient alors :

$$\int_0^A t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\cos(xt)\,\left(-\frac{1}{2}\,e^{-t^2}\right)\right]_0^A - \int_0^A \big(-x\,\sin(xt)\big)\,\left(-\frac{1}{2}\,e^{-t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A t\,\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\cos(xA)\,e^{-A^2} - \frac{x}{2}\int_0^A \sin(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad (\bigstar).$$

Notons que $\left|\cos(xA)\,e^{-A^2}\right| = |\cos(xA)|\,e^{-A^2} \leqslant e^{-A^2}$ donc, par encadrement $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\big(\cos(xA)\,e^{-A^2}\big) = 0$ car $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} e^{-A^2} = 0$.

De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge donc en faisant tendre A vers $+\infty$ dans ($\bigstar$) il vient :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$; soit encore : $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\,S(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\,S(x).}$$

b. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell(x) = 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) - \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

$x \to 2\,e^{\frac{x^2}{4}}$ et S sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc $x \to 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$x \to e^{\frac{x^2}{4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors $x \to \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$ est une primitive de cette fonction sur $\mathbb{R}$. Ainsi $x \to \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

ℓ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell'(x) = 2\left(\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) + 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S'(x) - e^{\frac{x^2}{4}} = 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\left(\dfrac{x}{2}\,S(x) - \dfrac{1}{2} + S'(x)\right)$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell'(x) = 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\big(-C(x) + S'(x)\big) = 0$.

Par conséquent ℓ est constante sur $\mathbb{R}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell(x) = \ell(0)$.

Or $\ell(0) = 2\,e^{\frac{0^2}{4}}\,S(0) - \displaystyle\int_0^0 e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t = 2\,S(0) = \int_0^{+\infty} \sin(0\times t)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) - \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t = \ell(x) = 0$. Finalement

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t.}$$

c. $\forall x \in \mathbb{R},\ 2\,e^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \dfrac{1}{2\,e^{\frac{x^2}{4}}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\,S(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{2}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ S(x) = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t \text{ et } S'(x) = C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\,e^{-\frac{x^2}{4}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t.}$$

III Obtention d'un développement limité

---

1. Soit x un réel. $t \to \dfrac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1+x^2\,t^2} \leqslant 1$ et $0 \leqslant e^{-t^2}$. Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2} \leqslant e^{-t^2}$.

La convergence de $I_0 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. a. Soit u un réel positif ou nul. $1-u+u^2-\dfrac{1}{1+u} = \dfrac{(1-u+u^2)\,(1+u)-1}{1+u} = \dfrac{(1+u^3)-1}{1+u} = \dfrac{u^3}{1+u}$.

Or $0 \leqslant \dfrac{1}{1+u} \leqslant 1$ et $0 \leqslant u^3$ donc $0 \leqslant \dfrac{u^3}{1+u} \leqslant u^3$. Ainsi $0 \leqslant 1-u+u^2-\dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3$.

$$\boxed{\forall u \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant 1-u+u^2-\frac{1}{1+u} \leqslant u^3.}$$

b. Soit x un réel. $t \to 1-x^2\,t^2+x^4\,t^4$ est une fonction polynôme donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4-\frac{1}{1+x^2\,t^2}\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

$\forall t \in \mathbb{R},\ x^2\,t^2 \in [0,+\infty[$ donc d'après ce qui précède : $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant 1-x^2\,t^2+x^4\,t^4-\dfrac{1}{1+x^2\,t^2} \leqslant (x^2\,t^2)^3$.

Comme $\forall t \in \mathbb{R},\ e^{-t^2} \geqslant 0 : 0 \leqslant \left(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\right)e^{-t^2} - \dfrac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2} \leqslant x^6\,t^6\,e^{-t^2}$ pour tout réel t.

Alors $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2\,t^2}\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} x^6\,t^6\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ car toutes les intégrales convergent.

Ainsi $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - g(x) \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} x^6\,t^6\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Remarquons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^6\,t^6\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = x^6\,I_6 = x^6\,\frac{4+1}{2}\,I_4 = x^6\,\frac{5}{2}\,\frac{3}{4}\,\sqrt{\pi} = \frac{15\,\sqrt{\pi}}{8}\,x^6$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t - g(x) \leqslant \frac{15\,\sqrt{\pi}}{8}\,x^6.}$$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1-x^2\,t^2+x^4\,t^4\right)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = I_0 - x^2\,I_2 + x^4\,I_4 = \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,x^2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\,x^4$.

Posons $Q = \sqrt{\pi} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,X^2 + \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}\,X^4$. Q est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré 4 donc de degré inférieur ou égal à 5.

Montrons que $g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^5)$ au voisinage de 0. Nous pourrons alors dire que g possède un développement limité à l'ordre 5 en 0 de partie régulière Q.

Pour cela il suffit de montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-Q(x)}{x^5} = 0$ ou que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{Q(x)-g(x)}{x^5} = 0$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant Q(x) - g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - x^2\, t^2 + x^4\, t^4\right) e^{-t^2}\, \mathrm{d}t - g(x) \leqslant \frac{15\sqrt{\pi}}{8}\, x^6.$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |Q(x) - g(x)| = Q(x) - g(x) \leqslant \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}\, x^6 \leqslant \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}\, |x|^6.$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 0 \leqslant \left|\dfrac{Q(x) - g(x)}{x^5}\right| \leqslant \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}\, |x|.$

$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{15\sqrt{\pi}}{8}\, |x| = 0$ donc par encadrement il vient $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{Q(x) - g(x)}{x^5} = 0.$

Ceci achève de montrer que $g(x) = Q(x) + \mathrm{o}(x^5)$ au voisinage de 0 avec $Q = \sqrt{\pi} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\, X^2 + \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}\, X^4$. Ainsi :

$$\boxed{g \text{ admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 qui est : } g(x) = \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, x^2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\, x^4 + \mathrm{o}(x^5).}$$

IV Nature d'une série

---

1. Soit p un élément de $\mathbb{N}$. $t \to \dfrac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \dfrac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{(2p)!}\, t^{2p}\, e^{-t^2}$ et $\dfrac{1}{(2p)!}\, I_{2p} = \dfrac{1}{(2p)!} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t.$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Soit p un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \dfrac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{(2p)!}\, t^{2p}\, e^{-t^2}.$

Ainsi $0 \leqslant u_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(2p)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{(2p)!}\, I_{2p}$ car ces intégrales convergent.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_p \leqslant \frac{I_{2p}}{(2p)!}.}$$

$\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}\, p!}\, \sqrt{\pi}$ donc $\forall p \in \mathbb{N},\ \dfrac{I_{2p}}{(2p)!} = \sqrt{\pi}\, \dfrac{(1/4)^p}{p!}\cdot$ Ainsi $\forall p \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_p \leqslant \sqrt{\pi}\, \dfrac{(1/4)^p}{p!}\cdot$

La convergence de la série de terme général $\dfrac{(1/4)^p}{p!}$ et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général u_p.

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_p \text{ converge.}}$$
