LYON 2006

PROBLÈME II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On considère un n-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P.
On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
On note id l'application identité de $\mathbb{C}^n$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}_0$.
On note $f^0 = \text{id}$ et, pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1.a. Exprimer, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.
b. En déduire : $\forall j \in [\![1; n-1]\!]$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \cdots + a_{n-1} e_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \text{id}$.
a. Vérifier : $g(e_1) = 0$.
b. Montrer : $\forall i \in \mathbb{N}$, $g \circ f^i = f^i \circ g$.
c. En déduire : $\forall i \in [\![1; n]\!]$, $g(e_i) = 0$.
d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f.
Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.
e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P.

3.a. Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$. On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0 \,\mathrm{id} + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$. Calculer $Q(f)(e_1)$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f.

c. Soit λ une racine du polynôme P.
Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-\lambda)R$.
Vérifier que $(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$.

d. Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C.

4.a. Montrer que, pour tout nombre complexe x, la matrice $(C - x\mathrm{I}_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

b. En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5.a. *Application* 2 : Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

b. *Application* 3 : Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^tC$ la matrice transposée de C.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe t, la matrice $(B - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible.

b. En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.

c. Soit λ une valeur propre de B. Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ.

d. On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

7. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ deux à deux distinctes.
L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

a. Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

b. Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1.

CORRECTION

1. a. Par définition même de la matrice C on a,

$$\boxed{\text{pour tout élément } i \text{ de } [\![1, n-1]\!] : f(e_i) = e_{i+1}.}$$

b. Montrons par récurrence que pour tout élément j de $[\![\mathbf{0}, n-1]\!]$, $f^j(e_1) = e_{j+1}$.

La propriété est vraie pour $j = 0$ car $f^0 = \mathrm{id}$.

Supposons la propriété vraie pour un élément j de $[\![0, n-2]\!]$ et montrons la pour $j+1$.

Par hypothèse $f^j(e_1) = e_{j+1}$. Alors $f^{j+1}(e_1) = f\big(f^j(e_1)\big) = f(e_{j+1}) = f(e_{j+1+1})$ d'après **a.**.

Ainsi s'achève la récurrence. Donc $\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ f(e_1) = e_{j+1}$. En particulier :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ f^j(e_1) = e_{j+1}.}$$

Remarque *On a alors* $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n) = \big(e_1, f(e_1), \ldots, f^{n-1}(e_1)\big)$.

Par définition de la matrice C : $f(e_n) = -a_0\, e_1 - a_1\, e_2 - \cdots - a_{n-2}\, e_{n-1} - a_{n-1}\, e_n$.

Donc $f^n(e_1) = f\big(f^{n-1}(e_1)\big) = f(e_{n-1+1}) = f(e_n) = -\big(a_0\, e_1 + a_1\, e_2 + \cdots + a_{n-2}\, e_{n-1} + a_{n-1}\, e_n\big)$.

$$\boxed{f^n(e_1) = -\big(a_0\, e_1 + a_1\, e_2 + \cdots + a_{n-2}\, e_{n-1} + a_{n-1}\, e_n\big) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j\, e_{j+1}.}$$

2. a. $g(e_1) = f^n(e_1) + a_{n-1}\, f^{n-1}(e_1) + \cdots + a_1\, f(e_1) + a_0\, \mathrm{id}(e_1) = f^n(e_1) + \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j\, f^j(e_1)$.

En utilisant **1.** on obtient : $g(e_1) = -\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j\, e_{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, e_{j+1} = 0_{\mathbb{C}^n}$.

$$\boxed{g(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

b. Soit i un élément de $\mathbb{N}$. $g \circ f^i = \left(f^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^k\right) \circ f^i = f^{n+i} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^{k+i}$.

Alors : $g \circ f^i = f^{i+n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^{i+k} = f^i \circ \left(f^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^k\right) = f^i \circ g$.

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N},\ g \circ f^i = f^i \circ g.}$$

c. Soit i un élément de $[\![0, n-1]\!]$.

$f^i(e_1) = e_{i+1}$. Donc $g(e_{i+1}) = g\big(f^i(e_1)\big) = \big(g \circ f^i\big)(e_1) = \big(f^i \circ g\big)(e_1) = \big(f^i(g(e_1)\big) = f^i(0_{\mathbb{C}^n}) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Alors $\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ g(e_{i+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$. Ou :

$$\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ g(e_i) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

Remarque P *est également un polynôme annulateur de* C *donc de sa matrice compagnon.*

d. Ainsi l'endomorphisme g coïncide avec l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$ sur la base $\mathcal{B}_0$.

Ces deux endomorphismes sont donc égaux. Par conséquent $g = 0_{\mathcal{L}(C^n)}$.

Or $g = f^n + a_{n-1}\, f^{n-1} + \cdots + a_1\, f + a_0\, \mathrm{id} = P(f)$. Finalement $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$.

$$\boxed{P = X^n + a_{n-1}\, X^{n-1} + \cdots + a_1\, X + a_0 = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, X^k \text{ est un polynôme annulateur de } f.}$$

Application 1 : Posons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A est la matrice compagnon du polynôme $P_A = X^5 + (-0)\, X^4 + (-1)\, X^3 + (-2)\, X^2 + (-0)\, X + (-1)$!

$P_A = X^5 - X^3 - 2\,X^2 - 1$ et P_A est un polynôme annulateur de A. Alors $A^5 - A^3 - 2\,A^2 - I_5 = 0_{\mathcal{M}_5(\mathbb{C})}$.

Par conséquent $A^5 = A^3 + 2\,A^2 + I_5$.

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_5(\mathbb{C}) \text{ telle que } A^5 = A^3 + 2\,A^2 + I_5.}$$

e. P est un polynôme annulateur de f donc les valeurs propres de f sont des racines de P. Or l'ensemble des valeurs propres de f est aussi l'ensemble des valeurs propres de C. Ainsi

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } C \text{ sont des racines de } P.}$$

3. a. $Q(f)(e_1) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j\, f^j(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j\, e_{j+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1}\, e_i$.

$$\boxed{Q(f)(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j\, e_{j+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1}\, e_i.}$$

b. Reprenons le polynôme Q de la question précédente. Observons que c'est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ **quelconque** .

Supposons que Q est un polynôme annulateur de f. Alors $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$. En particulier $Q(f)(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

Donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i-1}\, e_i = 0_{\mathbb{C}^n}$. Comme la famille $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_{i-1} = 0$.

Alors $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\, X^k$ est le polynôme nul ce qui contredit l'hypothèse.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à } n-1 \text{ et annulateur de } f.}$$

c. Soit λ une racine de P.

$P(f) = \big((X-\lambda)\, R\big)(f) = \big(X-\lambda\big)(f) \circ R(f) = (f - \lambda\, \mathrm{Id}) \circ R(f)$. Comme $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$:

$$\boxed{(f - \lambda\, \mathrm{Id}) \circ R(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}.}$$

d. Reprenons les hypothèses du **c.**

$P = (X-\lambda)\, R$ et P est de degré n donc R est un polynôme de degré $n-1$.

En particulier R est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$. Alors R n'est pas un polynôme annulateur de f.

Ainsi $R(f) \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ donc **il existe** un élément a de $\mathbb{C}^n$ tel que $R(f)(a)$ ne soit pas le vecteur nul.

Posqns $b = R(f)(a)$. b est non nul.

De plus : $\big(f - \lambda\, \mathrm{id}\big)(b) = \big(f - \lambda\, \mathrm{id}\big)\big(R(f)(a)\big) = \big((f - \lambda\, \mathrm{id}) \circ R(f)\big)(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}(a) = 0_{\mathbb{C}^n}$.

b n'est pas le vecteur nul et $\big(f - \lambda\, \mathrm{id}\big)(b) = 0_{\mathbb{C}^n}$ donc λ est une valeur propre de f donc également de C.

$$\boxed{\text{Toutes les racines de } P \text{ sont des valeurs propres de } C.}$$

Remarques 1. On pouvait également raisonner par l'absurde. On supposant que λ n'est pas valeur propre de f on obtient l'existence de $(f - \lambda\, id)^{-1}$ qui permet d'obtenir (par composition) $R(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ donc une contradiction.

2. Notons que **2. e.** *et* **3. d.** *montrent que l'ensemble des valeurs propres de C est l'ensemble des racines de P.*

4. a. Soit x un élément de $\mathbb{C}$. Pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$ notons H_k la $k^{\text{ème}}$ colonne de $C - x\, I_n$.

Pour montrer que $C - x\, I_n$ est de rang au moins $n-1$ il suffit de montrer que la famille $(H_1, H_2, \dots, H_{n-1})$ est libre non ?

Notons encore $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $H_k = -x\, E_k + E_{k+1}$.

Soit $(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$ un élément de $\mathbb{C}^{n-1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} z_k\, H_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$.

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} = \sum_{k=1}^{n-1} z_k\, H_k = \sum_{k=1}^{n-1} \big(z_k\,(-x)\, E_k + z_k\, E_{k+1}\big) = -\sum_{k=1}^{n-1} \big(z_k\, x\, E_k\big) + \sum_{k=1}^{n-1} \big(z_k\, E_{k+1}\big).$$

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} = -\sum_{k=1}^{n-1} \big(z_k\, x\, E_k\big) + \sum_{k=2}^{n} \big(z_{k-1}\, E_k\big) = -z_1\, x\, E_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \big((-z_k\, x + z_{k-1})\, E_k\big) + z_{n-1}\, E_n.$$

$(E_1, E_2, \dots, E_n)$ étant une famille libre on obtient : $-z_1\, x = 0$, $\forall k \in [\![2, n-1]\!], -z_k\, x + z_{k-1} = 0$ et $z_{n-1} = 0$.

Ne reste plus qu'à démontrer par une petite récurrence descendante que $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $z_k = 0$.

La propriété est vraie pour $n-1$. Supposons la vraie pour k dans $[\![2, n-1]\!]$ et montrons la pour $k-1$.

Par hypothèse $z_k = 0$. Or $-z_k\, x + z_{k-1} = 0$ donc $z_{k-1} = 0$. Ce qui achève la récurrence !

Ainsi $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $z_k = 0$. La famille $(H_1, H_2, \dots, H_{n-1})$ est donc libre et $C - x\, I_n$ est au moins de rang $n-1$.

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } x, \text{ la matrice } C - x\, I_n \text{ est de rang supérieur ou égal à } n-1.}$$

Soit λ une valeur propre de C donc de f. La dimension du sous-espace propre SEP (C, λ) de C associé à λ est la même que la dimension du sous-espace propre SEP (f, λ) de f associé à λ.

Ainsi $\dim \mathrm{SEP}\ (C, \lambda) = \dim \mathrm{SEP}\ (f, \lambda) = \dim \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{id}) = \dim \mathbb{C}^n - \mathrm{rg}(f - \lambda\, \mathrm{id}) = n - \mathrm{rg}(C - \lambda\, I_n)$.

Or $\mathrm{rg}(C - \lambda\, I_n) \geqslant n - 1$ donc $n - \mathrm{rg}(C - \lambda\, I_n) \leqslant 1$ Ainsi $\dim \mathrm{SEP}\ (C, \lambda) \leqslant 1$. Or la dimension d'un sous–espace propre est toujours supérieure ou égale à 1. Par conséquent SEP (C, λ) est de dimension 1.

$$\boxed{\text{Chaque sous espace propre de } C \text{ est de dimension 1.}}$$

b. Les sous-espaces propres de C étant de dimension 1, la somme des dimensions des sous-espaces propres de C est égale au nombre de valeurs propres distinctes de C c'est à dire au nombre de racines distinctes de P.

Rappelons que C est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est n. Alors :

$$\boxed{C \text{ est diagonalisable si et seulement si } P \text{ admet } n \text{ racines deux à deux distinctes.}}$$

5. a. *Application 2 :* Notons que A_1 est la matrice compagnon du polynôme $P_{A_1} = X^4 - 1$.

Or P_{A_1} admet quatre racines distinctes dans $\mathbb{C}$: 1, -1, i et $-i$. Ainsi :

$$\boxed{A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable.}}$$

b. *Application 3 :* Notons que A_2 est la matrice compagnon du polynôme $P_{A_2} = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4$.

1 est racine de P_{A_2}. De plus $P_{A_2} = (X-1)(X^3 - X^2 - 4X + 4) = (X-1)\big(X^2(X-1) - 4(X-1)\big)$.

Alors $P_{A_2} = (X-1)^2\,(X^2-4) = (X-1)^2\,(X-2)\,(X+2)$.

P_{A_2} n'a que trois racines distinctes dans $\mathbb{C}$: 1, 2 et -2 donc

$$\boxed{A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

6. a. Le cours indique que si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) alors ${}^tM$ est inversible si et seulement si M est inversible.

Pour tout nombre complexe t : $B - t\,I_n = {}^tC - t\,{}^tI_n = {}^t(C - t\,I_n)$.

Ainsi $B - t\,I_n$ est inversible si et seulement si $C - t\,I_n$ est inversible.

$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe } t,\ B - t\,I_n \text{ est inversible si et seulement si } C - t\,I_n \text{ est inversible.}}$$

b. Soit λ un complexe. Ce qui précède permet de dire que $B - \lambda\,I_n$ n'est pas inversible si et seulement si $C - \lambda\,I_n$ est n'est pas inversible.

Alors λ est valeur propre de B si et seulement si λ est valeur propre de C.

$$\boxed{B \text{ et } C \text{ ont les mêmes valeurs propres.}}$$

c. Soit λ un élément de $\mathbb{C}$ et soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Notons que $B - \lambda\,I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$.

$$U \in \text{SEP}\ (B,\lambda) \iff \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$U \in \text{SEP}\ (B,\lambda) \iff \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ -\lambda\, u_k + u_{k+1} = 0$ et $-a_0\, u_1 - a_1\, u_2 - \cdots - a_{n-2}\, u_{n-1} - (\lambda + a_{n-1})\, u_n = 0.$

$U \in \text{SEP}\ (B,\lambda) \iff \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_{k+1} = \lambda\, u_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, u_{k+1} + \lambda\, u_n = 0.$

$U \in \text{SEP}\ (B,\lambda) \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ u_k = \lambda^{k-1}\, u_1$ et $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (a_k\, \lambda^k\, u_1) + \lambda\, \lambda^{n-1}\, u_1 = 0.$

$U \in \text{SEP}\ (B,\lambda) \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ u_k = \lambda^{k-1}\, u_1$ et $\left(\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k\, \lambda^k + \lambda^n\right) u_1 = 0.$

$U \in \text{SEP}\ (B,\lambda) \iff \forall k \in [\![1, n]\!],\ u_k = \lambda^{k-1}\, u_1$ et $P(\lambda)\, u_1 = 0.$

Or $P(\lambda) = 0$. Donc $U \in \text{SEP}\ (B,\lambda) \iff \forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k = \lambda^{k-1}\, u_1 \iff U \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}\right).$

$$\boxed{\text{Une base du sous-espace propre de } B \text{ associé à la valeur propre } \lambda \text{ est : } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}\right).}$$

d. P admet n racines distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n. Or les valeurs propres de B sont les valeurs propres de C qui sont les racines de P.

Ainsi B admet n valeurs propres deux à deux distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n. B est alors diagonalisable.

Posons pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \end{pmatrix}$.

Pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, (U_k) est une base du sous-espace propre de B associé à la valeur propre λ_k.

Comme B est diagonalisable, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est somme directe des sous-espaces propres de B donc $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de B respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Notons V la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

V est inversible comme matrice de passage et $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ par définition même de U_1, U_2, ..., U_n.

$$\boxed{B \text{ est diagonalisable et la matrice } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \text{ est inversible.}}$$

7. a. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ u(\varepsilon_i) = \mu_i\, \varepsilon_i$ donc $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \forall k \in \mathbb{N},\ u^k(\varepsilon_i) = \mu_i^k\, \varepsilon_i$. Alors :

$\forall k \in \mathbb{N},\ u^k(a) = u^k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n) = u^k(\varepsilon_1) + u^k(\varepsilon_2) + \cdots + u^k(\varepsilon_n) = \mu_1^k\, \varepsilon_1 + \mu_2^k\, \varepsilon_2 \cdots + \mu_n^k\, \varepsilon_n$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, la matrice de $u^k(a)$ dans la base $\mathcal{E}$ est $S_k = \begin{pmatrix} \mu_1^k \\ \mu_2^k \\ \vdots \\ \mu_n^k \end{pmatrix}$.

E étant de dimension n, la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ est une base de E si et seulement si elle est de rang n ou si et seulement si la famille $(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$ est de rang n.

$(S_0, S_1, \ldots, S_{n-1})$ est de rang n si et seulement si sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est de rang n.

Or cette matrice est $W = \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \cdots & \mu_1^{n-1} \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \mu_n & \mu_n^2 & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}$ et sa transposée est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-1} & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}$.

Comme les complexes μ_1, μ_2, ..., μ_n sont deux à deux distincts, d'après **6. d.** cette dernière matrice est inversible. Alors W est inversible donc W est de rang n.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}_a$ est une base de E.

$$\boxed{\text{Si } a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n \text{ alors } \mathcal{B}_a = (a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)) \text{ est une base de } E.}$$

b. Déterminons la matrice de u dans $\mathcal{B}_a$. Constatons que $\forall k \in [\![0, n-2]\!],\ u\big(u^k(a)\big) = u^{k+1}(a)$!

De plus $u\big(u^{n-1}(a)\big) = u^n(a)$. Soit $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})$ la famille des coordonnées de $u^n(a)$ dans la base $\mathcal{B}_a$.

Posons $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ b_k = -c_k$. Alors $u\big(u^{n-1}(a)\big) = u^n(a) = -b_0\, a - b_1\, u(a) - \cdots - b_{n-1}\, u^{n-1}(a)$.

Ainsi la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_a$ est : $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -b_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -b_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -b_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}$.

C'est la matrice compagnon du polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}\,X^{n-1} + \cdots + b_1\,X + b_0$.

$\boxed{\text{Il existe un polynôme } P_1 = X^n + b_{n-1}\,X^{n-1} + \cdots + b_1\,X + b_0 \text{ tel que la matrice associée à } u \text{ relativement à la base } \mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big) \text{ soit la matrice compagnon du polynôme } P_1.}$
