BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

CODE EPREUVE :

295

EML_MATS

Concepteur : EM LYON

1[ère] épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLÈME I

Préliminaires

1.a. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n \, \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \, \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge.

On admet dans tout le problème : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

3.a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.

b. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

c. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

I Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

ote $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $\quad F(x,y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2$.

Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$, et en déduire les trois points critiques de F.

Déterminer les extrémums locaux de F. En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

ote $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\quad \left|\sin(a+\lambda) - \sin a - \lambda\cos a\right| \leqslant \frac{\lambda^2}{2}$.
On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad S'(x) = C(x)$.

À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$.

Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\; 2\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad S(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

III Obtention d'un développement limité

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

ote $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\quad g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Montrer, pour tout $u \in [0\,;+\infty[\;$: $\; 0 \leqslant (1 - u + u^2) - \dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3$.

En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - g(x) \leqslant \frac{15\sqrt{\pi}}{8}x^6$.

Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

IV Nature d'une série

Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ converge.

ote, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $u_p = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{I_{2p}}{(2p)!}$.

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.