BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

295

EML__MATS

Concepteur : EMLYON Business School

Première épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 27 avril 2009 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLÈME 1

Partie I - Calcul d'une intégrale

On note (a, b) un couple de réels strictement positifs.

1. Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$ converge.

2. a. Établir, pour tout (ε, X) appartenant à $]0\,;+\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:

$$\int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

(À cet effet, on pourra utiliser des changements de variable.)

b. En déduire, pour tout (ε, X) appartenant à $]0\,;+\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$:

$$\int_\varepsilon^X \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

3. a. Montrer que l'application $h : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ \ y \longmapsto h(y) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

est continue sur $[0\,;+\infty[$.

b. En déduire : $\displaystyle\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\longrightarrow} \ln\frac{b}{a}\cdot$

c. Établir, pour tout X de $]0\,;+\infty[$: $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{\mathrm{e}^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$

d. En déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}\cdot$

Partie II - Étude d'un produit scalaire

On note E l'ensemble des applications $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, bornées, de classe C^1, telles que $f(0)=0$.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $[0\,;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

2. On considère les applications f_1, f_2, f_3, f_4 définies, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par :
$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = \mathrm{e}^x - 1, \quad f_4(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.$$
Pour chacune de ces applications, indiquer, en le justifiant, si elle est ou non un élément de E.

3. a. Montrer, pour tout $f \in E$: $\displaystyle\frac{f(x)}{x} \underset{x \longrightarrow 0}{\longrightarrow} f'(0).$

b. Montrer que, pour tout $(f,g) \in E^2$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

On note $(.\,|\,.) : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\displaystyle (f,g) \longmapsto (f\,|\,g) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

4. Établir que $(.\,|\,.)$ est un produit scalaire sur E.

5. Démontrer, pour tout $(f,g) \in E^2$: $\displaystyle (f\,|\,g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$

(À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un segment.)

6. On note, pour tout $\alpha \in]0\,;+\infty[$, $u_\alpha : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, par :
$$u_\alpha(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}.$$

a. Vérifier : $\forall \alpha \in]0\,;+\infty[,\quad u_\alpha \in E.$

b. Calculer, pour tout $(\alpha,\beta) \in]0\,;+\infty[^2$, le produit scalaire $(u_\alpha\,|\,u_\beta)$.

(À cet effet, on pourra utiliser les résultats de **II.5** et **I.3.d.**)

c. Établir, pour tout $(\alpha,\beta) \in]0\,;+\infty[^2$: $(u_\alpha\,|\,u_\beta) > 0.$

Partie III - Étude de densités de variables aléatoires

On note c un réel strictement positif.

On considère l'application $v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x, par :
$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^{-c^2x} - \mathrm{e}^{-4c^2x}}{x\ln 4} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que v est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Soit X une variable aléatoire réelle, à valeurs positives ou nulles, admettant v comme densité.

2. Montrer que X admet une espérance et calculer $\mathrm{E}(X)$ en fonction de c.

3. On note Y la variable aléatoire réelle définie par : $Y = \sqrt{X}$.

a. Montrer que Y est une variable aléatoire réelle à densité et calculer une densité de Y.

b. Montrer que la variable aléatoire réelle Y admet une espérance et une variance, et déterminer $\mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{V}(Y)$ en fonction de c.