EML__MATS

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 3 mai 2010 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Définitions et notations

• p désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

• On note $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients complexes, $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices-lignes à p colonnes à coefficients réels, $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels, I_p la matrice diagonale de $\mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ et de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

• On note, pour toute matrice carrée A d'ordre p et tout $(i,j) \in \{1,...,p\}^2$, $(A)_{i,j}$ le coefficient de A situé à la ligne i et à la colonne j.

• On note, pour toute matrice-ligne L de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ et tout $j \in \{1,...,p\}$, $(L)_j$ le coefficient de L situé à la colonne j.

• On dit qu'une suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$, et on note $A_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} A$, si et seulement si : $\forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, \quad (A_n)_{i,j} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (A)_{i,j}$.

• On dit qu'une suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ converge vers une matrice L de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, et on note $L_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} L$, si et seulement si : $\forall j \in \{1,...,p\}, \quad (L_n)_j \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (L)_j$.

• On admet que, si la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice B, alors la suite $(A_nB_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices converge vers la matrice AB.

• On admet que si la suite $(A_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers la matrice A et si L est une matrice-ligne de $\mathbf{M}_{1,p}(\mathbb{R})$, alors la suite $(LA_n)_{n\geqslant 1}$ de matrices converge vers la matrice LA.

• On appelle matrice stochastique toute matrice A de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ telle que : $\begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, \quad (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in \{1,...,p\}, \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1, \end{cases}$

et on note $\mathcal{ST}_p$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$.

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

1. a. On note V la matrice-colonne à p lignes dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Montrer, pour toute $A \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$: $A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in \{1,...,p\}^2, \quad (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V. \end{cases}$

b. En déduire que toutes les matrices de $\mathcal{ST}_p$ ont une valeur propre commune.

2. Démontrer : $\forall A, B \in \mathcal{ST}_p, \quad AB \in \mathcal{ST}_p$.

3. On note : $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

a. Justifier, sans calcul, que A_1 est diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$. Donner la dimension du sous-espace propre pour A_1 associé à la valeur propre 1.

b. En utilisant éventuellement les matrices A_2 et A_3 :

(i) Montrer qu'il existe dans $\mathcal{ST}_3$ au moins un élément non diagonalisable dans $\mathbf{M}_3(\mathbb{C})$;

(ii) Justifier si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 ».

4. Soient $A \in \mathcal{ST}_p$ et λ une valeur propre de A dans $\mathbb{C}$.

On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ.

On note i un élément de $\{1,...,p\}$ tel que : $\forall k \in \{1,...,p\}, \quad |x_k| \leqslant |x_i|$.

a. Montrer : $|\lambda x_i| \leqslant |x_i|$.

b. En déduire : $|\lambda| \leqslant 1$.

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

Soit $A \in \mathcal{ST}_p$. On note $A^0 = \mathrm{I}_p$.

1. a. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \mathcal{ST}_p$.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k \in \mathcal{ST}_p$.

Dans la suite de cette partie **II**, on suppose qu'il existe $r \in \{1,...,p-1\}$, $P \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, $D \in \mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(D)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et distincts de 1 si $i \geqslant r+1$, tels que : $A = PDP^{-1}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D^k$ et $B_n = PM_nP^{-1}$.

On note Δ la matrice de $\mathbf{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux $(\Delta)_{i,i}$ sont égaux à 1 si $i \leqslant r$ et nuls sinon, et on note $B = P\Delta P^{-1}$.

2. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $|x| \leqslant 1$: $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$

3. Montrer : $M_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \Delta$ et en déduire : $B_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} B$.

4. **a.** Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n \in \mathcal{ST}_p$.

b. En déduire : $B \in \mathcal{ST}_p$.

Partie III : Aspect probabiliste

On dispose d'un objet noté T et de trois urnes numérotées 1, 2 et 3.
À chaque instant n ($n \in \mathbb{N}$), T est dans une des trois urnes et une seule.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'urne dans laquelle se trouve l'objet à l'instant n et L_n la matrice suivante de $\mathbf{M}_{1,3}(\mathbb{R})$: $L_n = \big(\mathrm{P}(X_n = 1) \;\; \mathrm{P}(X_n = 2) \;\; \mathrm{P}(X_n = 3)\big)$.
On suppose connues la loi de X_0 et la matrice A de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, \quad (A)_{i,j} = \mathrm{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j).$$

On suppose : $\forall n \in \mathbb{N}, \; \forall (i,j) \in \{1,2,3\}^2, \quad \mathrm{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j) = \mathrm{P}_{(X_0=i)}(X_1 = j)$.

1. Montrer : $A \in \mathcal{ST}_3$.

2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+1} = L_n A$ puis : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = L_0 A^n$.

On suppose dorénavant $A = A_1$, définie dans la partie **I.3**, et on note $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer une matrice $P_1 \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et calculer P_1^{-1}.

4. Déterminer la limite de la suite $(D_1^n)_{n \geqslant 1}$, puis la limite de la suite $(A_1^n)_{n \geqslant 1}$.

5. Déterminer la limite de la suite $(L_n)_{n \geqslant 1}$. Expliquer ce résultat par des arguments probabilistes.

CORRECTION

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

Remarque *Dans la suite nous noterons $[\![1,p]\!]$ l'ensemble $\{1,\dots,p\}$.*

Pour toute matrice C de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et pour tout i dans $[\![1,p]\!]$ nous noterons $(C)_i$ le coefficient de C situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne.

1. a. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$$A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{p} \Big((A)_{i,j} \times 1\Big) = 1 \end{cases}.$$

$$A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{p} \Big((A)_{i,j}\,(V)_j\Big) = (V)_i \end{cases} \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V \end{cases}.$$

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \text{ de } \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V \end{cases}.}$$

1. b. Soit A un élément de $\mathcal{ST}_p$. V n'est pas nul(le) et $AV = V$. Donc 1 est valeur propre de A et V en est un vecteur propre associé.

$$\boxed{\text{1 est une valeur propre commune à toutes les matrices de } \mathcal{ST}_p.}$$

2. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{ST}_p$.

• Soient i et j deux éléments de $[\![1,p]\!]$. $(AB)_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} \Big((A)_{i,k}\,(B)_{k,j}\Big)$.

Or $\forall k \in [\![1,p]\!],\ (A)_{i,k} \geqslant 0$ et $(B)_{k,j} \geqslant 0$ car A et B sont des éléments de $\mathcal{ST}_p$.

Donc $\forall k \in [\![1,p]\!],\ (A)_{i,k}\,(B)_{k,j} \geqslant 0$. Ainsi $(AB)_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{p} \Big((A)_{i,k}\,(B)_{k,j}\Big) \geqslant 0$, et ceci pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$.

• $AV = V$ et $BV = V$ car A et B sont des éléments de $\mathcal{ST}_p$, donc $(AB)V = A(BV) = AV = V$.

Ceci achève de montrer que AB est un élément de $\mathcal{ST}_p$.

$$\boxed{\text{Le produit de deux éléments de } \mathcal{ST}_p \text{ est un élément de } \mathcal{ST}_p.}$$

3. a) A_1 est une matrice triangulaire inférieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux c'est à dire 1, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$.

A_1 est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant 3 valeurs propres distinctes donc A_1 est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

$\boxed{A_1 \text{ est diagonalisable et le sous-espace propre de } A_1 \text{ associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.}}$

Remarque Notons que SEP $(A_1, 1) = \text{Vect}(V)$, SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$, SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

3. b. (i) • Les coefficients de A_3 sont des réels positifs ou nuls.

$$\bullet\ A_3V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V.$$

Donc A_3 est un élément de $\mathcal{ST}_3$.

• A_3 est une matrice triangulaire inférieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

Ainsi les deux valeurs propres de A_3 sont 1 et $\dfrac{1}{2}$.

Cherchons les dimensions des sous-espaces propres de A_3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

•

$$X \in \text{SEP } (A_3, 1) \iff A_3X = X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x \\ (1/2)\,x + (1/2)\,y = y \\ (1/2)\,y + (1/2)\,z = z \end{cases}.$$

$X \in \text{SEP } (A_3, 1) \iff \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$. Ainsi SEP $(A_3, 1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Alors $\dim \text{SEP } (A_3, 1) = 1$.

$$X \in \text{SEP } \left(A_3, \frac{1}{2}\right) \iff A_3X = \frac{1}{2} X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$$X \in \text{SEP } \left(A_3, \frac{1}{2}\right) \iff \begin{cases} x = (1/2)\,x \\ (1/2)\,x + (1/2)\,y = (1/2)\,y \\ (1/2)\,y + (1/2)\,z = (1/2)\,z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Ainsi SEP $\left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Alors $\dim \text{SEP } \left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) = 1$.

$\dim \text{SEP } \left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) + \dim \text{SEP } \left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) = 2 \neq 3$. A_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

A_3 est une matrice de $\mathcal{ST}_3$ qui n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Il existe au moins un élément de $\mathcal{ST}_3$ non diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, par exemple A_3.

3. b. (ii) • Les coefficients de A_2 sont des réels positifs ou nuls.

$$\bullet\ A_2V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V.$$

Donc A_2 est un élément de $\mathcal{ST}_3$. 1 est donc valeur propre de A_2.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \text{SEP } (A_2, 1) \iff A_2X = X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x \\ (1/2)\,y + (1/2)\,z = y \\ (1/2)\,y + (1/2)\,z = z \end{cases}.$$

$X \in \text{SEP } (A_3, 1) \iff z = y$. Ainsi SEP $(A_2, 1)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $y - z = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Par conséquent SEP $(A_2, 1)$ est de dimension 2.

L'affirmation << Pour tout élément A de $\mathcal{ST}_3$, le sous-espace propre pour A associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 >> est fausse .

4. a. $AX = \lambda\, X$ donc $\forall k \in [\![1,p]\!],\ (AX)_k = \lambda\,(X)_k$. En particulier $(AX)_i = \lambda\,(X)_i = \lambda\, x_i$.

Alors : $|\lambda|\,|x_i| = |\lambda\, x_i| = |(AX)_i| = \left|\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}\, x_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{p} |(A)_{i,j}\, x_j| = \sum_{j=1}^{p} |(A)_{i,j}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}\,|x_j|$ (les coefficients de A sont des réels positifs ou nuls).

Or $\forall j \in [\![1,p]\!],\ |x_j| \leqslant |x_i|$ et $(A)_{i,j} \geqslant 0$. Donc : $|\lambda|\,|x_i| \leqslant \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}\,|x_i| = |x_i| \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = |x_i| \times 1 = |x_i|$.

$$\boxed{|\lambda\, x_i| \leqslant |x_i|.}$$

4. b. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ n'est pas nul(le) donc $|x_i|$ n'est pas nul car $|x_i| = \underset{1\leqslant k\leqslant p}{\text{Max}}\ |x_k|$.

Alors $|\lambda|\,|x_i| = |\lambda\, x_i| \leqslant |x_i|$ et $|x_i| > 0$. Par division on obtient : $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1.}$$

Les valeurs propres dans $\mathbb{C}$ des éléments de $\mathcal{ST}_p$ ont un module inférieur ou égal à 1.

Partie II : Suites des moyennes de puissances de matrices stochastiques

1. a. Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, A^n appartient à $\mathcal{ST}_p$.

• I_p est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls. De plus $I_p\,V = V$.

Ainsi I_p est un élément de $\mathcal{ST}_p$. Alors A^0 appartient à $\mathcal{ST}_p$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Supposons que pour un élément n de $\mathbb{N}$, A^n soit un élément de $\mathcal{ST}_p$.

A et A^n sont alors deux éléments de $\mathcal{ST}_p$. D'après **I 2.** leur produit est un élément de $\mathcal{ST}_p$.

Alors A^{n+1} appartient à $\mathcal{ST}_p$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \text{ de } \mathcal{ST}_p \text{ et pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ A^n \text{ est une matrice de } \mathcal{ST}_p.}$$

1. b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

• Pour tout k dans $\mathbb{N}$, A^k appartient à $\mathcal{ST}_p$. Donc pour tout k dans $\mathbb{N}$, A^k est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls.

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls.

Il en est de même pour $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

• Pour tout k dans $\mathbb{N}$, A^k appartient à $\mathcal{ST}_p$. Donc pour tout k dans $\mathbb{N}$, $A^k\,V = V$. Alors :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) V = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (A^k\,V) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V = \frac{1}{n}(n\,V) = V.$$

Ceci achève de montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ appartient à $\mathcal{ST}_p$.

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \text{ de } \mathcal{ST}_p \text{ et pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k \text{ est une matrice de } \mathcal{ST}_p.}$$

Exercice Montrer que $\mathcal{ST}_p$ est un convexe de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et retrouver le résultat précédent.

2. Soit x un réel tel que $|x| \leqslant 1$ et soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \begin{cases} n & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$. Ce qui donne encore : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$.

Donc si $x = 1$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = 1$! Supposons que x ne vaut pas 1. Alors $x \in [-1, 1[$, donc $|x| \leqslant 1$.

$$0 \leqslant \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right| = \frac{1}{n} \frac{|1-x^n|}{1-x} \leqslant \frac{1}{n} \frac{1+|x|^n}{1-x} \leqslant \frac{1}{n} \frac{1+1}{1-x} = \frac{1}{n} \frac{2}{1-x}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \frac{2}{1-x} \right) = 0$ il vient par encadrement $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = 0$.

Finalement : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ tel que } |x| \leqslant 1 : \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}.}$$

3. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit (i, j) un élément de $[\![1, p]\!]^2$.

• Supposons i et j distincts. Notons que pour tout k dans $\mathbb{N}$, D^k est une matrice diagonale.

Alors : $(M_n)_{i,j} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k \right)_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (D^k)_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 0 = 0$. Par conséquent $\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,j} = 0$.

Soit encore $\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,j} = (\Delta)_{i,j}$.

• Montrons maintenant que $\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,i} = (\Delta)_{i,i}$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, $(D^k)_{i,i} = \left((D)_{i,i} \right)^k$ (car D^k est diagonale).

Alors : $(M_n)_{i,i} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k \right)_{i,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (D^k)_{i,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left((D)_{i,i} \right)^k$.

D est semblable à A donc D a les mêmes valeurs propres que A. Or D est diagonale donc ses valeurs propres sont ses élément diagonaux. Ainsi le spectre de D est l'ensemble $\{(D)_{i,i} \,;\, i \in [\![1, p]\!]\}$.

Les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ ont un module inférieur ou égal à 1. Ainsi pour tout i dans $[\![1, p]\!]$, $(D)_{i,i}$ est un réel dont la valeur absolue est au plus 1.

Rappelons que par hypothèse $(D)_{i,i} = 1$ si $i \in [\![1, r]\!]$ et $(D)_{i,i} \neq 1$ sinon.

Plus de doute alors, d'après ce qui précède : $\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,i} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left((D)_{i,i} \right)^k \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in [\![1, r]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit encore $\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,i} = (\Delta)_{i,i}$.

Finalement $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2$, $\lim_{n\to+\infty} (M_n)_{i,j} = (\Delta)_{i,j}$ et ainsi la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers Δ.

$$\boxed{\text{La suite } (M_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \Delta.}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = P$ et $V_n = P^{-1}$.

La suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers P et la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers P^{-1}.

D'après ce qui est admis la suite $(U_n\, M_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $P\, \Delta$.

Toujours en utilisant la même propriété, on peut alors dire que la suite $\Big((U_n\,M_n)\,V_n\Big)_{n\geqslant 1}$ converge vers $(P\,\Delta)\,P^{-1}$.

Notons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (U_n\,M_n)\,V_n = P\,M_n\,P^{-1} = B_n$ et que $B = P\,\Delta\,P^{-1}$. Plus de doute :

$$\boxed{\text{la suite } (B_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } B.}$$

N'en restons pas là et observons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = P\,M_n\,P^{-1} = P\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D^k\right)P^{-1}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(P\,D^k\,P^{-1}) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(P\,D\,P^{-1})^k = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } P\,\Delta\,P^{-1}.}$$

4. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Nous venons de voir que $B_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$. Alors d'après **II 1. b.**, B_n appartient à $\mathcal{ST}_p$ car A appartient à $\mathcal{ST}_p$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n \in \mathcal{ST}_p.}$$

4. b. Rappelons que B est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et que $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ B_{i,j} = \lim\limits_{n\to+\infty}(B_n)_{i,j}$.

De plus pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, B_n appartient à $\mathcal{ST}_p$.

- $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (B_n)_{i,j} \geqslant 0$. En passant à la limite il vient : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ B_{i,j} \geqslant 0$.
- $\forall i \in [\![1,p]\!], \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p}(B_n)_{i,j} = 1$. En passant à la limite il vient : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} B_{i,j} = 1$.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{B \text{ appartient à } \mathcal{ST}_p.}$$

Remarque Pour le second point il était tentant de passer à la limite sur $B_n\,V = V$ sauf que le préliminaire n'évoque pas cette possilbilité !.

Exercice Montrer que toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{ST}_p$ a sa limite dans $\mathcal{ST}_p$ (et qu'ainsi $\mathcal{ST}_p$ est un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$).

Partie III : Aspect probabiliste

Remarque Nous ne serons pas plus royaliste que le "roi concepteur" et nous ne soulèverons pas de difficulté au niveau des probabilités conditionnelles sur la nullité de la probabilité de l'événement qui conditionne...

1. • Pour tout (i,j) dans $[\![1,3]\!]^2$, $A_{i,j}$ est une probabilité donc $A_{i,j}$ est un réel positif ou nul.

• Soit i dans $[\![1,3]\!]$.

Rappelons que $P_{(X_0=i)}$ est une probabilité et que $\big((X_1=j)\big)_{j\in[\![1,3]\!]}$ est un système complet d'événements.

Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{3} P_{(X_0=i)}(X_1=j) = P_{(X_0=i)}\left(\bigcup_{j=1}^{3}(X_1=j)\right) = P_{(X_0=i)}(\Omega) = 1.$

Donc $\forall i \in [\![1,3]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} A_{i,j} = 1$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{A \in \mathcal{ST}_3.}$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Soit j un élément de $[\![1,3]\!]$.

$\big((X_n=i)\big)_{i\in[\![1,3]\!]}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$P(X_{n+1}=j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\Big(P(X_n=i)\,P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)\Big).$

Or $\forall i \in [\![1,3]\!],\ P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) = P_{(X_0=i)}(X_1=j) = A_{i,j}$.

Alors : $(L_{n+1})_j = P(X_{n+1}=j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\Big(P(X_n=i)\,A_{i,j}\Big) = \sum_{i=1}^{3}\Big((L_n)_i\,A_{i,j}\Big).$

Finalement $\forall j \in [\![1,3]\!],\ (L_{n+1})_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\Big((L_n)_i\,A_{i,j}\Big)$. Ce qui signifie que $L_{n+1} = L_n\,A$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} = L_n\,A.}$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = L_0\,A^n$.

• La propriété est vraie pour $n=0$ car $A^0 = I_3$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$L_{n+1} = L_n\,A = (L_0\,A^n)\,A = L_0\,A^{n+1}$. Ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = L_0\,A^n.}$$

3. Nous savons déjà que les valeurs propres de A_1 sont 1, 1/2 et 1/3, que ses sous-espaces propres sont de dimension 1 et que A_1 est diagonalisable.

Nous savons également que SEP $(A_1, 1) = \text{Vect}(V) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Observons que : $A_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1/2&0\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1/3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est un élément non nul de SEP $\left(A_1,\dfrac{1}{3}\right)$ qui est une droite vectorielle.

Ainsi SEP $\left(A_1,\dfrac{1}{3}\right)=\text{Vect}(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$.

Déterminons SEP $\left(A_1,\dfrac{1}{2}\right)$. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$X\in\text{SEP}\left(A_1,\dfrac{1}{2}\right)\iff A_1X=\dfrac{1}{2}X\iff\begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1/2&0\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(1/2)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$X\in\text{SEP}\left(A_1,\frac{1}{2}\right)\iff\begin{cases}x=(1/2)\,x\\(1/2)\,x+(1/2)\,y=(1/2)\,y\\(1/3)\,x+(1/3)\,y+(1/3)\,z=(1/2)\,z\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\\0+(1/2)\,y=(1/2)\,y\\0+(1/3)\,y+(1/3)\,z=(1/2)\,z\end{cases}.$$

$$X\in\text{SEP}\left(A_1,\frac{1}{2}\right)\iff\begin{cases}x=0\\(1/3)\,y=(1/6)\,z\end{cases}\iff\begin{cases}x=0\\z=2\,y\end{cases}.$$

Alors SEP $\left(A_1,\dfrac{1}{2}\right)=\text{Vect}(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix})$.

$\mathcal{B}_1=(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$, $\mathcal{B}_2=(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix})$ et $\mathcal{B}_3=(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$ sont respectivement des bases de SEP $(A_1,1)$, SEP $\left(A_1,\dfrac{1}{2}\right)$ et SEP $\left(A_1,\dfrac{1}{3}\right)$.

Rappelons que : $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})=\text{SEP}\ (A_1,1)\oplus\text{SEP}\left(A_1,\dfrac{1}{2}\right)\oplus\text{SEP}\left(A_1,\dfrac{1}{3}\right)$.

Alors $\mathcal{B}=''\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup\mathcal{B}_3''=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_1 respectivement associés aux valeurs propres 1, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$.

Notons P_1 la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{pmatrix}$, P_1 est inversible et $P_1^{-1}\,A\,P=\text{Diag}(1,1/2,1/3)=D_1$.

Notons que $A=P_1\,D_1\,P_1^{-1}$.

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A = P_1\, D_1\, P_1^{-1}$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ tels que $P_1\, X = X'$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Donc $\begin{cases} x = x' \\ x + y = y' \\ x + 2y + z = z' \end{cases}$.

Ce qui donne aisément : $\begin{cases} x = x' \\ y = -x + y' = -x' + y' \\ z = -x - 2y + z' = -x' - 2(-x' + y') + z' \end{cases}$. Ainsi $\begin{cases} x = x' \\ y = -x' + y' \\ z = x' - 2y' + z' \end{cases}$.

Ceci permet d'affirmer que :

$$\boxed{P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4. $D_1 = \mathrm{Diag}\,(1, 1/2, 1/3)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_1^n = \mathrm{Diag}\,(1, (1/2)^n, (1/3)^n)$.

Or $\lim_{n \to +\infty} (1/2)^n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} (1/3)^n = 0$ car $|(1/2)| < 1$ et $|(1/3)| < 1$.

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} D_1^n = \mathrm{Diag}\,(1, 0, 0)$.

$$\boxed{\text{La suite } (D_1^n)_{n \geqslant 1} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$A_1 = P_1\, D_1\, P_1^{-1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_1^n = (P_1\, D_1\, P_1^{-1})^n = P_1\, D_1^n\, P_1^{-1}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = P_1$ et $S_n = P_1^{-1}$. Posons encore $\widehat{D_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(R_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers P_1 et $(D_1^n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $\widehat{D_1}$ donc $(R_n\, D_1^n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $P_1\, \widehat{D_1}$.

Comme $(S_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers P_1^{-1}, $\big((R_n\, D_1^n)\, S_n\big)_{n \geqslant 1}$ converge vers $(P_1\, \widehat{D_1})\, P_1^{-1}$.

Ce qui signifie que $(P_1\, D_1^n\, P_1^{-1})_{n \geqslant 1}$ converge vers $P_1\, \widehat{D_1}\, P_1^{-1}$ ou que $(A_1^n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $P_1\, \widehat{D_1}\, P_1^{-1}$.

$$P_1\, \widehat{D_1}\, P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{La suite } (A_1^n)_{n \geqslant 1} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_n = L_0\, A_1^n$. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = L_0$.

La suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers L_0, la suite $(A_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ donc la suite $(H_n\, A_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $L_0\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

Ainsi la suite $(L_0\, A_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $L_0\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. La suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $L_0\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

$$L_0\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = \big(P(X_0=1)\ P(X_0=2)\ P(X_0=3)\big)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$L_0\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} = \big(P(X_0=1)+P(X_0=2)+P(X_0=3)\ 0\ 0\big) = (1\ 0\ 0).$$

$$\boxed{\text{La suite } (L_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } (1\ 0\ 0).}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1,\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n=2)=0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} P(X_n=3)=0.}$$

$$\boxed{\text{Donc la suite } (X_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge en loi vers la variable certaine égale à } 1.}$$

Observons que pour obtenir $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1$, $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=2)=0$ et $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=3)=0$ il suffit d'obtenir $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1$.

Rappelons que $A_1 = \begin{pmatrix}1&0&0\\1/2&1/2&0\\1/3&1/3&1/3\end{pmatrix}$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) = (A_1)_{i,j}$.

Alors : $\begin{cases} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=1,\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=0,\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3)=0 \\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1/2,\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=1/2,\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)=0 \\ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1)=1/3,\ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2)=1/3,\ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=3)=1/3 \end{cases}$.

Notons que l'urne 1 est "absorbante" car si à un instant n l'objet est dans cette urne il y reste aux instants suivants (presque sûrement...). Donc si presque sûrement il se trouve à un instant dans l'urne 1, presque sûrement il y restera et nous aurons $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1$.

C'est le cas si au départ il est dans l'urne 1.

Supposons maintenant qu'au départ l'objet soit dans l'urne 2. La probabilité pour qu'à l'instant suivant il ne soit pas dans l'urne 1 est $1/2$. La probabilité pour qu'il ne soit pas dans l'urne 1 au cours des n premiers instants ($n \in \mathbb{N}^*$) est $(1/2)^n$. La probabilité pour qu'il ne soit jamais dans l'urne 1 est $\lim_{n\to+\infty}(1/2)^n$ donc 0. Donc presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1 et ainsi $\lim_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1$.

Supposons maintenant qu'au départ l'objet soit dans l'urne 3. La probabilité pour qu'à l'instant suivant il reste dans l'urne 3 est $1/3$. La probabilité pour qu'il soit dans l'urne 3 au cours des n premiers instants ($n \in \mathbb{N}^*$) est $(1/3)^n$. La probabilité pour qu'il reste toujours dans l'urne 3 est $\lim_{n \to +\infty} (1/3)^n = 0$ donc 0. Donc presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1 ou dans l'urne 2. Comme dans le cas précédent si à un instant il se trouve dans l'urne 2, presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1. Ainsi si l'objet se trouve au départ dans l'urne 3, presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1 et nous aurons encore $\lim_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = 1$.