LYON 2010

# PROBLÈME 2

Dans tout le problème, $J$ désigne l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

Le but du problème est l'étude de l'application $f$ définie, pour tout $x$ de $J$, par : $f(x)=\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

## Préliminaires

**1.** Justifier la convergence des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}\,,\quad \sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{(2k+1)^2}\,,\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n^2}.$$

**2.** En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, montrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

**3.** En déduire : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$.

## Partie I : Éléments d'étude de $f$

**1.** Justifier, pour tout $x\in J$, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

**2.** Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

**3.** Montrer : $\forall x\in J,\quad 0\leqslant f(x)\leqslant \dfrac{1}{x+1}$, et en déduire : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

**4.** **a.** Montrer : $\forall (x,y)\in J^2,\quad \forall t\in]0\,;1],\quad \big(\,x\leqslant y \implies t^x\geqslant t^y\,\big)$.

**b.** En déduire que $f$ est décroissante sur $J$.

**5.** Montrer : $\forall x\in J,\quad f(x)+f(x+1)=\dfrac{1}{x+1}$.

**6.** Déduire des résultats précédents : $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2x}$.

**7.** Soit $x\in J$.

**a.** Montrer : $\forall n\in\mathbb{N},\quad f(x)=(-1)^{n+1}f(n+1+x)+\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

**b.** En déduire que la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{k+1+x}$ converge et que $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1+x}$.

**8.** **a.** Montrer : $\forall (x,y)\in J^2,\quad \forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \left|\dfrac{1}{k+1+x}-\dfrac{1}{k+1+y}\right|\leqslant |x-y|\,\dfrac{1}{k^2}$,

puis : $\forall (x,y)\in J^2,\quad |f(x)-f(y)|\leqslant |x-y|\left(\dfrac{1}{(x+1)(y+1)}+\dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

**b.** En déduire que $f$ est continue sur $J$.

**9.** Montrer : $f(x)\underset{x\to-1}{\sim}\dfrac{1}{x+1}$. En déduire la limite de $f$ en $-1$.

## Partie II : Dérivabilité de $f$

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k$ l'application de classe $C^2$ de $J$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x$ de $J$ par :

$$g_k(x) = \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

**1.** Montrer : $\forall (x,y) \in J^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left| g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x) \right| \leqslant \dfrac{|x-y|^2}{k^3}.$

**2.** **a.** Justifier la convergence des séries $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^3}$ et $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} g_k'(x)$, pour tout $x \in J$.

**b.** En déduire que $f$ est dérivable sur $J$ et que : $\forall x \in J, \quad f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.$

**c.** Déterminer $f'(0)$.

**3.** Tracer l'allure de la courbe représentative de $f$. On donne la valeur approchée : $\ln 2 \approx 0{,}69$.