ALGÈBRE BILINÉAIRE 1

P mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique de l'algèbre bilinéaire ...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SF mentionne des savoirs faire.

S repère un exercice simple.

PC repère un exercice où il faut chercher.

Sauf mention du contraire dans la suite $(E, < .,. >)$ est un espace préhilbertien.

SF 1 Montrer qu'une application est un produit scalaire.

Pour montrer qu'une application est un produit scalaire on utilise le plus souvent la caractérisation suivante.

P Soit $(x,y) \to < x, y >$ une application de E^2 dans $\mathbb{R}$.

$< .,. >$ est un produit scalaire sur E si et seulement si :

1. $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < \lambda\, x + y, z >= \lambda\ < x, z > + < y, z >$

   (ou $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < x, \lambda\, y + z >= \lambda\ < x, y > + < x, z >$).
2. $\forall (x,y) \in E^2,\ < y, x >=< x, y >$.
3. $\forall x \in E,\ < x, x > \geqslant 0$.
4. $\forall x \in E,\ < x, x >= 0 \Longrightarrow x = 0_E$.

★ On n'oubliera pas de dire et même de montrer, lorsque cela n'est pas une évidence, que l'application $< .,. >$ est bien définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Penser aux produits scalaires définis par des intégrales généralisées ou des séries.

★ On fera attention à être rigoureux dans la preuve de "$< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0_E$".

★ Lorsque $< .,. >$ est définie par une intégrale généralisée on n'oubliera pas de dire au niveau de la linéarité à droite ou à gauche, que toutes les intégrales convergent.

Exercice 1 S Par ♡ Produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{\mathbf{n},\mathbf{p}}(\mathbb{R})$.

► *Basique, classique et incontournable*

On trouve cela dans oral ESCP 1997 2-7, 1999 2-11, 1999 2-15, 2003 2.2, 2004 2.6, 2005 2.8, 2009 2.9, exercice 1 ECRICOME 2001, exercice 2 ECRICOME 2003, exercice 2 ECRICOME 2007, exercice 1 ECRICOME 2009, exercice 3 EDHEC 2003, exercice 2 EDHEC 2007, ESSEC 1999.

$E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. $\forall (A,B) \in E^2,\ < A, B >= \mathrm{tr}({}^t AB)$.

Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 2 S Encore un exemple de produit scalaire usuel.

► *Basique, classique et incontournable*

On trouve cela dans oral ESCP 1998 2-24, 2007 2.2, 2011 2.11 (ou presque...), problème d'EDHEC 1998, exercice 2 EDHEC 2011, problème 1 LYON 1998.

Par ♡ $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose $\forall (P,Q) \in E^2,\ < P,Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que pour tout élément R de $\mathbb{R}[X]$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Exercice 3 **S** **Par ♡** **Toujours un produit scalaire usuel D'après LYON 2008**.

► *Basique, classique et bon entraînement*

On note E l'ensemble des applications u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

On note F l'ensemble des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (que l'on confondra avec $\mathbb{R}[X]$).

Pour tout élément n de $\mathbb{N}$, on note F_n l'ensemble des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n (que l'on confondra avec $\mathbb{R}_n[X]$).

Q1. Montrer que $\forall (\alpha,\beta) \in [0,+\infty[^2,\ \alpha\,\beta \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(\alpha^2+\beta^2\Big)$.

Q2. En déduire que si u et v sont deux éléments de E, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

On note $(.\,|\,.)$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui, à tout couple (u,v) d'éléments de E associe $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Q3. a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) Montrer que $(.\,|\,.)$ est un produit scalaire sur E.

Q4. Montrer que F est contenu dans E.

On retrouve ce produit scalaire dans oral ESCP 2007 2.3, 2.12, ESSEC 2002, ESCP MI 1997, LYON 2008.

Exercice 4 **S** **Un générateur de produits scalaires. Produits scalaires canoniques.**

Q1. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

On pose : $\forall x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\,e_k \in E,\ \forall y = \sum_{k=1}^{n} y_k\,e_k \in E,\ < x,y >= \sum_{k=1}^{n} x_k\,y_k$.

a) Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

b) Montrer que $< .,. >$ est l'unique produit scalaire sur E qui rend la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ orthonormée.

Q2. Préciser ce produit scalaire dans les cas suivants.

a) $E = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. b) $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

c) $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. d) $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 5 **S** **Produit scalaire**.

E est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge.

Rappel si a et b sont deux réels : $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$

Q1. Montrer que E est un espace vectoriel réel.

Q2. Si $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n \geqslant 0}$ sont deux éléments de E, on pose : $\varphi(u, v) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$.

Montrer que φ produit scalaire sur E. On note $\|.\|$ la norme associé.

En plus Q3. A tout élément $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ de E, on associe la suite $f(u) = (v_n)_{n \geqslant 0}$ définie par :

$$v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n = u_{n-1}.$$

a) Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme f de E.

b) Montrer que : $\forall u \in E, \ \|f(u)\| = \|u\|$.

c) Montrer que f n'est pas surjectif. Est-il injectif ?

Exercice 6 **Encore un produit scalaire.**

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose $\forall (f, g) \in E^2, \ < f, g >= \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\, g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

On trouve cela dans oral ESCP 2001 2.2, 2006 2.10, 2009 2.17.

En plus 1 E est l'espace vectoriel des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

α et β sont deux réels strictement supérieurs à -1. On pose $\forall (f, g) \in E^2, \ < f, g >= \int_{-1}^{1} (1-t)^{\alpha}\, (1+t)^{\beta}\, f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

En plus 1' Oral ESCP 2000 2-2, 2008 2.20.

$E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\forall (P, Q) \in E^2, \ < f, g >= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\, P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

En plus 1" Oral ESCP 2002 2.10

$E = \mathbb{R}[X]$. On pose $\forall (P, Q) \in E^2, \ < f, g >= \int_{0}^{1} \frac{P(t)\, Q(t)}{\sqrt{1-t}}\, \mathrm{d}t$. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

En plus 2 Oral ESCP 1999 2-1, 2001 2.23, exercice 1 ECRICOME 2011.

a_0, a_1, ..., a_n sont $n+1$ réels quelconques. $E = \mathbb{R}_n[X]$.

On pose $\forall (P, Q) \in E^2, \ < P, Q >= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)\, Q^{(k)}(a_k)$. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

En plus 2' Oral ESCP 1998 2-5, ECRICOME 2012 exercice 1

a est un réel et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

On pose $\forall (P, Q) \in E^2, \ < P, Q >= \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)\, Q^{(k)}(a)$. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

En plus 3 Contenu dans LYON 2009 PB 1.

E est l'ensemble des applications f de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, bornées et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ telles que $f(0)=0$.

Q1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Q2. On pose : $\forall (f,g)\in E^2,\ <f,g>=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f(x)\,g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Montrer $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

En plus 4 Oral ESCP 1998 2-20.

n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$. E est l'ensemble des éléments P de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $P(0)=P(1)=0$.

Q1. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.

Q2. $\forall (P,Q)\in E^2,\ <P,Q>=-\displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q''(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $<.,.>$ est produit scalaire sur E.

En plus 5 ESCP MI 1999 Construction de produit scalaire.

En plus 6 QSP ESCP 2003.

Soit $E=\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a,b,c,d) réels pour que φ définie sur E^2 par

$$\varphi(X,Y)={}^t\!X\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}Y$$

soit un produit scalaire sur E.

Réponse : $c=b,\ a>0$ et $ad-b^2>0$.

En plus 7 Oral ESCP 2001 (3-6)

Dans cet exercice, Ω désigne un ensemble fini non vide, $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω et $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),P)$ un espace probabilisé.

On note $\mathcal{F}$ l'espace vectoriel des applications de Ω dans $\mathbb{R}$.

Montrer que l'application φ définie sur $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$ par :

$$\varphi:\ (X,Y)\mapsto E(XY)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{F}$ si et seulement si pour tout $\omega\in\Omega,\ P(\{\omega\})>0$.

En plus 7 Oral ESCP 2010 1.21

Dans cet exercice, on pose : $\mathcal{S}=\{f\in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\ /\ \forall\,(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ \displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}x^pf^{(q)}(x)=0\}$ où $f^{(q)}$ désigne la dérivée $q^{\text{ème}}$ de f.

Q1. En considérant la fonction $\varphi:\ x\mapsto e^{-x^2}$, montrer que $\mathcal{S}$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

(On montrera que pour tout entier naturel q, $\varphi^{(q)}(x)=(-1)^qH_q(x)\varphi(x)$, où H_q est un polynôme dont on donnera le degré et le coefficient dominant.)

Q2. Montrer les propriétés suivantes :

a) si $f\in\mathcal{S}$, alors $f'\in\mathcal{S}$.

b) si $f \in \mathcal{S}$, pour toute fonction polynôme P, $Pf \in \mathcal{S}$

c) si f et g sont dans $\mathcal{S}$, alors $fg \in \mathcal{S}$

d) si $f \in \mathcal{S}$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

e) l'application définie sur $\mathcal{S}^2$ par : $(f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(t)dt$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{S}$ noté $\langle\ ,\ \rangle$.

Q3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_k(x) = \varphi(x-k)$.

a) Montrer que tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_k \in \mathcal{S}$.

b) En déduire que $\mathcal{S}$ n'est pas de dimension finie.

Q4. Pour tout entier naturel q, on pose $\psi_q(x) = H_q(x)\,e^{-x^2/2}$. Calculer pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p \neq q$, $\langle \psi_p, \psi_q \rangle$.

$\boxed{\textbf{SF 2}}$ **"Manipuler" des produits scalaires et des normes.**

$\boxed{\textbf{SF 3}}$ **Utiliser les identités remarquables.**

$\boxed{\textbf{SF 4}}$ **Utiliser les identités de polarisation (donc savoir exprimer le produit scalaire en fonction de la norme).**

Rappelons quand même que :

1. $\boxed{\forall x \in E,\ < x, 0_E > = < 0_E, x > = 0.}$
2. $\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ < -x, y > = - < x, y > = < x, -y > .}$

p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$. $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(y_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont deux familles d'éléments de E.

$(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ et $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant q}$ sont deux familles d'éléments de $\mathbb{R}$. Alors :

$$\boxed{< \sum_{i=1}^{p} \lambda_i\, x_i, \sum_{j=1}^{q} \mu_j\, y_j > = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_i\, \mu_j\ < x_i, y_j >}$$

x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2} \quad \boxed{\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2 < x, y > + \|y\|^2}$$

$$\boxed{< x+y, x-y > = \|x\|^2 - \|y\|^2}$$

x_1, x_2, ..., x_p sont p éléments de E.

$$\boxed{\|x_1 + x_2 + \cdots + x_p\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} < x_i, x_j >}$$

x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{< x, y > = \frac{1}{2}\left[\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right]} \quad \boxed{< x, y > = \frac{1}{2}\left[\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right]}$$

$$\boxed{< x, y > = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right]}$$

x et y sont deux éléments de E. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$

$\boxed{\textbf{Exercice 7}}$ $\boxed{\text{S}}$ avec l'indication. **Oral ESCP 2001 2.24, QSP HEC 2006 et QSP ESCP 2009.**

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille de vecteurs unitaires de E telle que $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$.

Q1. Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une famille orthonormée de E.

Q2. Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Attention au départ rien n'indique que n est la dimension de E.

Indication : $\|x-\sum_{k=1}^{n}<x,e_k>\,e_k\|^2=$...

Exercice 8 **PC** **Oral ESCP 2000 2-12. QSP ESCP 2009 et QSP ESCP 2011.**

Soit $n\in[\![2,+\infty[\![$. E un espace vectoriel euclidien de dimension n. $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E.

On suppose encore que : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ \forall j\in[\![1,n]\!],\ i\neq j\Rightarrow\|e_i-e_j\|=1$.

Montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

Exercice 9 **S** avec l'indiction **Une caractérisation des isométries vectorielles.**

f est un endomorphisme de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\forall(x,y)\in E^2,\ <f(x),f(y)>=<x,y>$.

ii) $\forall x\in E,\ \|f(x)\|=\|x\|$.

Indication : Utiliser une identité de polarisation.

Exercice 10 **S** avec l'indication **Une caractérisation des endomorphismes antisymétriques.**

f est un endomorphisme de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\forall(x,y)\in E^2,\ <f(x),y>=-<x,f(y)>$.

ii) $\forall x\in E,\ <f(x),x>=0$.

Indication : $<f(x+y),x+y>=$...

Exercice 11 **S** **ECRICOME 1997 exercice 1**

► *Basique et bon entraînement*

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à deux. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. On note Id_E l'application identique de E dans lui-même.

Lorsque x et y sont deux vecteurs de E, le produit scalaire de x par y s'écrit $<x,y>$ et $\|x\|$ représente la norme de x.

Quand u est un vecteur *non nul* de E, on définit l'application φ_u de E dans lui-même par

$$\forall x\in E\quad \varphi_u(x)=2\frac{<x,u>}{<u,u>}u-x$$

Dans Q1, Q2, Q3 et Q4, u est un vecteur non nul de E.

Q1 Montrer que φ_u est un endomorphisme involutif de E (c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $\varphi_u\circ\varphi_u=\mathrm{Id}_E$).

Q2 Démontrer que u est un vecteur propre de φ_u associé à une valeur propre que l'on précisera.

Q3 Établir que φ_u conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que : $\forall(x_1,x_2)\in E^2,\ <\varphi_u(x_1),\varphi_u(x_2)>=<x_1,x_2>$.

En déduire que φ_u conserve la norme, c'est-à-dire que $\forall x\in E,\ \|\varphi_u(x)\|=\|x\|$.

Q4 On désigne par $\mathcal{D}_u$ la droite vectorielle de base u, et par $\mathcal{H}_u$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à u (autrement dit, $\mathcal{H}_u=\mathcal{D}_u^{\perp}$, supplémentaire orthogonal de $\mathcal{D}_u$).

a) Montrer que $\mathcal{H}_u$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre -1 pour φ_u.

b) φ_u est-il diagonalisable ?

c) t étant un réel non nul, comparer les applications φ_u et φ_{tu}.

Q5 *Etude d'une réciproque.* On suppose que ψ est un endomorphisme de E tel qu'il existe une droite vectorielle Δ de E vérifiant

$$\forall y \in \Delta \quad \psi(y) = y \quad \text{ et } \quad \forall z \in \Delta^{\perp} \quad \psi(z) = -z$$

a) Montrer que ψ est involutif et conserve le produit scalaire.

b) Établir qu'il existe au moins un vecteur u non nul de Δ tel que l'on ait : $\psi = \varphi_u$.

c) Soit $\mathcal{M} = (m_{i,j})$ la matrice de ψ dans une base orthonormé $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

Soit $a_{i,j}$ (où i et j désignent des entiers compris entre 1 et n) le coefficient de la i-ième ligne et j-ième colonne de la matrice ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M}$.

Montrer que $a_{i,j} = <\psi(e_i), \psi(e_j)>$. En déduire que : ${}^t\mathcal{M}\mathcal{M} = I_n$. où I_n désigne la matrice unité d'ordre n.

Exercice 12 **PC** **QSP HEC 2007 et HEC 2012**

n appartient à $[\![2, +\infty[\![$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n.

f est un endomorphisme de E tel que : $\forall (x, y) \in E^2,\ <x, y> = 0 \Rightarrow <f(x), f(y)> = 0$.

Q1. Montrer que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$ (considérer $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$).

Q2. En déduire qu'il existe un réel c tel que : $\forall (x, y) \in E^2,\ <f(x), f(y)> = c <x, y>$.

Q3. Réciproque ?

En plus 1 x_1, x_2, ..., x_p sont des éléments d'un espace vectoriel euclidien E.

Montrer que $\|\sum_{k=1}^{p} x_k\|^2 \leqslant p \sum_{k=1}^{p} \|x_k\|^2$.

Indication : remarquer que $2 <x, y> \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2$

En plus 2 f est une application de E dans E telle que : $\forall (x, y) \in E^2,\ <f(x), f(y)> = <x, y>$.

Montrer que f est linéaire.

Indication : $\|f(\alpha\, x + y) - \alpha\, f(x) - f(y)\|^2 = \ldots$

En plus 3 QSP ESCP 2008

Soit $(E, \langle ., . \rangle)$ un espace euclidien. Trouver toutes les fonctions f définies sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (u, v) \in E^2,\ f(u + v) - f(u - v) = 4\langle u, v \rangle.$$

En plus 4 QSP ESCP 2010

Soit E un espace euclidien de dimension n, avec $n \geqslant 2$.

On suppose qu'il existe $n + 1$ vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ tels que pour $i \neq j : \langle e_i, e_j \rangle < 0$.

a) Montrer, en utilisant la norme de u, que si $u = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} |\lambda_i| e_i = 0$

b) Montrer que n quelconques de ces vecteurs forment une base de E.

En plus 5 L'exercice 3 EDHEC 2001.

étude de l'endomorphisme $(x, y, z) \to (yc - zb, za - xc, xb - ya)$ de $\mathbb{R}^3$ et de son carré.

En plus 6 QSP HEC 2010

n est un entier supérieur ou égal à deux. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que le rang de A est égal au rang de ${}^tAA$.

SF 5 **Calculer des produits scalaires et des normes lorsque l'on travaille dans une base orthonormée.**

SF 6 **Trouver l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel.**

SF 7 **Trouver l'orthogonal d'une droite vectorielle, d'un hyperplan.**

SF 8 **Utiliser $\mathbf{E}^{\perp} = \{\mathbf{0_E}\}$.**

Rappels.

PP Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont othonormées pour les produits scalaires canoniques de ces espaces vectoriels.

PP Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une **base orthonormée** de E. Soit x un élément de E.

$$\boxed{x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > \, e_k} \qquad \boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \big(< x, e_k > \big)^2}}$$

PP Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une **base orthonormée** de E. Soient x et y deux vecteurs de E de coordonnées respectives $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dans cette base. Soient X et Y les matrices de x et y dans $\mathcal{B}$

$$\boxed{< x, y > = \sum_{k=1}^{n} x_k \, y_k = {}^t XY} \qquad \boxed{\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{{}^t XX}}$$

1. $E^{\perp} = \{0_E\}$ **P**
2. $\{0_E\}^{\perp} = E$
3. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   - $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$.
   - $F \subset F^{\perp\perp}$.

★ **P** $E^{\perp} = \{0_E\}$ s'utilise souvent de la manière suivante. Pour montrer qu'un vecteur de E est nul on montre qu'il est orthogonal à tous les éléments de E. Ou pour montrer que deux vecteurs x et y de E sont égaux on montre que $x - y$ est orthogonal à tous les éléments de E.

F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. $F \subset G$ donne $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

P F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G sont orthogonaux alors $F \cap G = \{0_E\}$.

F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) F et G sont orthogonaux.

ii) $F \subset G^{\perp}$.

iii) $G \subset F^{\perp}$.

F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E respectivement engendrés par $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ et $(v_1, v_2, \dots, v_q)$.

P 1. $F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, u_i >= 0\}$.

P 2. F et G sont orthogonaux si et seulement si : $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!],\ < u_i, v_j >= 0$.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E.

• $\boxed{E = F \oplus F^\perp}$ et $\boxed{F^{\perp\perp} = F}$.

• $F^\perp$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F.

★ Ce résultat ne vaut pas dans un espace préhilbertien réel quelconque. Néanmoins il reste vrai dans le cas important où E est un espace préhilbertien réel et oû Fest un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

★★ Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels orthogonaux de E, on évitera de dire que $G = F^\perp$ ou $F = G^\perp$.

F et G orthogonaux signifie $F \subset G^\perp$ ou (et ! !) $G \subset F^\perp$. Cependant :

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux et supplémentaires alors $G = F^\perp$ (et $F = G^\perp$)

P $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E. a_1, a_2, ..., a_n sont n réels non tous nuls.

1. L'orthogonal de la droite vectorielle engendrée par $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$ est l'hyperplan d'équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$.

2. L'orthogonal de l'hyperplan d'équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$ dans $\mathcal{B}$ est la droite vectorielle engendrée par $a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n$.

Exercice 13 **S** **Un peu de pratique.**

► *Bon entraînement pour les débutants en algèbre bilinéaire.*

Q1. $E = \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique.

Trouver l'orthogonal du sous-espace vectoriel $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) \mid x + 2y - z = 0 \text{ et } x - y + z + t = 0 \right\}$.

Q2. On considère les sous-espaces vectoriels $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = P(-1) = 0\}$ et $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P'' = 0_E\}$ de $E = \mathbb{R}_3[X]$.

a) Trouver l'orthogonal de F (resp. de G) lorsque $E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni du produit scalaire canonique.

b) Trouver l'orthogonal de H lorsque $E = \mathbb{R}_3[X]$ est muni du produit scalaire défini par :

$\forall (P, Q) \in E,\ < P, Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

Exercice 14 **Orthogonal de la somme de deux sous-espaces vectoriels**.

F et G sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien E.

Q1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$.

Q2. On suppose ici que E est de dimension finie.

a) Utiliser Q1 pour montrer que : $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

b) En déduire que si F et G sont supplémentaires il en est de même pour $F^\perp$ et $G^\perp$. Retrouver ce résultat directement.

Exercice 15 **$\mathbf{F}^\perp$ n'est pas nécessairement un supplémentaire de F en dimension infinie.**

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. $\forall (f,g)\in E^2,\ <f,g>=\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

On considère $F=\{f\in E \mid f(0)=0\}$.

Q1. Montrer rapidement que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E et que F est un sous-espace vectoriel de E.

Q2. Soit g un élément de $F^\perp$. On pose $\forall t\in[0,1],\ g_1(t)=\begin{cases} 2tg(t) & \text{si } t\in[0,1/2]\\ g(t) & \text{si } t\in]1/2,1]\end{cases}$

Montrer que g_1 est dans F et en déduire que g est nulle. En déduire que F et $F^\perp$ ne sont pas supplémentaires.

Q3. Que dire de $F^{\perp\perp}$?

Exercice 16 **PC** **$\mathbf{F}^\perp$ n'est pas nécessairement un supplémentaire de F en dimension infinie again**

$E=\mathbb{R}[X]$. Si $P=\sum\limits_{k=0}^{p} a_kX^k$ et $Q=\sum\limits_{k=0}^{q} b_kX^k$ sont deux éléments de E, on pose : $\varphi(P,Q)=\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{Min}(p,q)} a_kb_k$.

Q1. Montrer rapidement que φ est un produit scalaire sur E

Q2. Montrer que $(X^k)_{k\geqslant 0}$ est une famille orthonormée de E.

Q3. $F=\{P\in E\mid P(0)=0\}$ et $G=\{P\in E\mid P(1)=0\}$.

a) Montrer que F et G sont deux sous espaces vectoriels de E.

b) Montrer que $F^\perp=\mathbb{R}_0[X]$ et que $G^\perp=\{0_E\}$.

F et $F^\perp$ sont-ils supplémentaires ? Même question pour G et $G^\perp$.

c) Comparer F et $F^{\perp\perp}$ puis G et $G^{\perp\perp}$.

Exercice 17 **S** Par ♡ **Un classique.**

► *Clairement à savoir faire. Thème abordé dans oral ESCP 2003 2.2, 2004 2.6 ECRICOME 2003 exercice 2*

$E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall (A,B)\in E^2,\ <A,B>=\mathrm{tr}({}^tAB)$. On rappelle que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

$\mathcal{S}_n$ (resp. $\mathcal{A}_n$) est l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathcal{A}_n$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{S}_n$.

Exercice 18 **S** **Une propriété intéressante des endomorphismes symétriques (resp. antisymétriques).**

Soit F un sous-espace vectoriel de E et f un endomorphisme symétrique (resp. antisymétrique) de E.

Montrer que si F est stable par f, $F^\perp$ est stable par f.

Exercice 19 **S** **Utilisation de $\mathbf{E}^\perp=\{\mathbf{0_E}\}$. Encore une propriété intéressante des endomorphismes symétriques (resp. antisymétriques).**

► *Pratique usuelle et résultat qui peut être utile.*

Soit f un endomorphisme symétrique (resp. antisymétrique) de E. Montrer que $(\mathrm{Im}\, f)^\perp=\mathrm{Ker}\, f$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont orthogonaux.

En déduire que si E est un espace vectoriel euclidien $(\mathrm{Ker}\, f)^\perp=\mathrm{Im}\, f$.

Ici Ker f et Im f sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 20 **PC** **Utilisation de $\mathbf{E}^{\perp} = \{\mathbf{0_E}\}$.**

f et g sont deux applications de E dans E telles que $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), y > = < x, g(y) >$.

Montrer que f et g sont linéaires.

En plus 1 Utilisation de $\mathbf{E}^{\perp} = \{\mathbf{0_E}\}$.

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est symétrique si et seulement si $\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2,\ < AX, Y > = < X, AY >$.

Caractériser de même les matrices antisymétriques.

En plus 2 Utilisation de $\mathbf{E}^{\perp} = \{\mathbf{0_E}\}$.

E est un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E.

Q1 Montrer que : $\forall (x,y) \in E^2,\ < f(x), f(y) > = < x, y > \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

Q2 Montrer que deux quelconques des propriétés suivantes donnent la troisième.

i) $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

ii) $\forall x \in E,\ < x, f(x) > = 0$.

iii) $f^2 = -Id_E$.

(on pourra si nécessaire s'intéresser à $< x + f(y), f\big(x + f(y)\big) >$).

En plus 3 Utilisation de $\mathbf{E}^{\perp} = \{\mathbf{0_E}\}$.

f et g sont deux applications de E dans E telles que $\forall (x,y) \in E,\ < f(x), y > = < x, g(y) >$. Montrer que f et g sont deux endomorphismes de E.

En plus 4 Utilisation de $\mathbf{E}^{\perp} = \{\mathbf{0_E}\}$.

f et g sont deux endomorphismes symétriques de E (qui n'est pas nécessairement euclidien).

Montrer que $f \circ g$ est un endomorphisme symétrique si et seulement si f et g commutent.

En plus 5 Un exemple où $\mathbf{F}^{\perp} + \mathbf{G}^{\perp}$ est strictement contenu dans $(\mathbf{F} \cap \mathbf{G})^{\perp}$.

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On munit E du produit scalaire $< .,. >$ défini par : $\forall (f,g) \in E^2,\ < f, g > = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

On considère $F = \{f \in E \mid \forall x \in [0, \frac{1}{2}],\ f(x) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid \forall x \in [\frac{1}{2}, 1],\ f(x) = 0\}$.

Q1. Montrer que $F^{\perp} = G$ et $G^{\perp} = F$.

Q2. Montrer que $F^{\perp} + G^{\perp}$ est strictement contenu dans $(F \cap G)^{\perp}$.

$\boxed{\text{SF 9}}$ **Construire une base orthogonale ou une base orthonormée.**

$\boxed{\text{SF 10}}$ **Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour construire une base orthogonale ou une base orthonormée à partir d'une base.**

$\boxed{\text{SF 11}}$ **Montrer qu'une base est LA base orthonormée déduite d'une base donnée par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.**

Rappels sur le procédé d'orthonormalisation de Schmidt

• Le résultat théorique.

Soit $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base quelconque de E.

Il existe une base $\boxed{\text{orthonormée}}$ de E et une seule $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ telle que pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$:

1. $\text{Vect}(w_1, w_2, \ldots, w_k) = \text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$.
2. $< w_k, u_k >$ est strictement positif.

$(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ est la base orthonormée déduite de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par le procédé d'**orthonormalisation de Schmidt**.

Il convient de noter que :

• w_1 est **LE** vecteur unitaire de $\text{Vect}(u_1)$ qui vérifie $< w_1, u_1 > > 0$.

• Pour tout k élément de $[\![2, n]\!]$, w_k est **LE** vecteur unitaire de la droite vectorielle constituée par l'orthogonal de $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1})$ $\boxed{\text{dans}}$ $\text{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ qui vérifie $< w_k, u_k > > 0$.

• Pratiquement.

$(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est une base de l'espace vectoriel E euclidien. Pour construire LA base orthonormée $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ de E déduite de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt il est fortement conseillé de commencer par construire une base orthogonale $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de E de la manière suivante.

Étape 1 On pose $v_1 = u_1$.

Étape 2 On pose $v_2 = u_2 + \alpha\, v_1$ et on cherche α pour que v_2 soit orthogonal à v_1.

Étape 3 On pose $v_3 = u_3 + \beta\, v_1 + \gamma\, v_2$ et on cherche β et γ pour que v_3 soit orthogonal à v_1 et v_2.

Et ainsi de suite...

Ne reste plus qu' à poser, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $w_k = \dfrac{1}{\|v_k\|}\, v_k$ et à dire que $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ est LA base orthonormée de E déduite de $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Pour une mise en forme propre du processus voir le résumé de cours.

• Pour finir.

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est assez lourd dans sa pratique. "La machine" le fait très bien, nous un peu moins... On l'utilisera donc avec discernement.

Par exemple pour construire une base orthogonale, puis orthonormée d'un sous-espace vectoriel F de dimension 3 il est souvent plus simple de prendre deux vecteurs non nuls et orthogonaux de F et de construire un vecteur non nul de F orthogonal aux précédents...

Ne pas oublier que les endomorphismes symétriques sont de bons générateurs de bases orthogonales ou orthonormées.

Exercice 21 **S** **Orthonormalisation de Schmidt : exemple 1.**

▶ *Basique et bon entraînement.*

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormée de E. F est l'hyperplan d'équation $x + 2y - z + t = 0$ dans $\mathcal{B}$.

Q1. On pose : $u_1 = e_1 + e_3$, $u_2 = e_2 - 2e_4$ et $u_3 = e_3 + e_4$. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de F.

Q2. Construire une base orthonormée de F.

Exercice 22 **S** **Orthonormalisation de Schmidt : exemple 2.**

Basique et bon entraînement.

$E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall (P,Q) \in E^2,\ < P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. On rappelle que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Construire à partir de la base $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ de E une base orthonormée de E.

Exercice 23 **Construction d'une base orthogonale..**

▶ *Q2 constitue un très bon entraînement.*

$n \in \mathbb{N}^*$. $E = \mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire canonique. $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

Q1. Montrer que F est un sous espace vectoriel de E et que $\mathcal{B} = \Big(X - 1, X(X-1), X^2(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1)\Big)$ en est une base (les deux en 1 ou presque).

Q2. Dans cette question on suppose que $n = 3$. Construire à partir de $\mathcal{B}$ une base orthonormée de F.

Frise $\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$, $\sqrt{\frac{2}{3}}(X^2 - (1/2)X - (1/2))$ et $\sqrt{\frac{3}{4}}(X^3 - (1/3)X^2 - (1/3)X - (1/3))$.

Q3. On pose pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $P_k = \sqrt{\dfrac{k}{k+1}}\left(X^k - \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} X^i\right)$.

Montrer que $(P_1, P_2, \dots, P_n)$ est la base orthonormée de F déduite de la base $\mathcal{B}$ par le procédé de Schmidt.

▶ *Il est fortement conseillé de traiter l'un des deux exercices suivants, si possible le second dont les questions 4 et 5 sont incontournables. Notons que le produit scalaire du second est moins général que celui du premier.*

Exercice 24 **Par ♡** **Construction d'une base orthonormée dans $\mathbb{R}_n[X]$.**

▶ *Classique et incontournable*

n est in élément de $\mathbb{N}^*$. $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Q1. a) Montrer que pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, il existe un polynôme normalisé (le coefficient du terme de plus haut degré est 1) P_k et un seul appartenant à $\mathbb{R}_k[X]$ et orthogonal à $\mathbb{R}_{k-1}[X]$.

b) Montrer que pour tout élément k de $[\![1, n]\!]$, P_k est de degré k.

On pose $P_0 = 1$ et $\forall k \in [\![0, n]\!],\ Q_k = \dfrac{1}{\|P_k\|}\, P_k$.

Q2. a) Montrer que $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ est une base orthonormée de E.

b) Montrer que $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ est la base orthonormée de E déduite de la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de E par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Exercice 25 **Par ♡** **Construction d'une base orthonormée dans $\mathbb{R}_n[X]$.**

▶ *Classique et incontournable*

a et b sont deux réels tels que $a < b$. p est une application continue et strictement positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout élément n de $\mathbb{N}$: $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

Si P et Q sont deux éléments de $E = \mathbb{R}[X]$ on pose : $< P, Q >= \displaystyle\int_a^b P(t)\, Q(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E.

Q2. k est élément de $\mathbb{N}^*$. D_k est l'ensemble de éléments de E_k orthogonaux à E_{k-1}.

a) Montrer que D_k est une droite vectorielle.

b) Montrer que D_k contient un polynôme P_k normalisé (ou unitaire) de degré k et un seul.

Q3. On pose $P_0 = 1$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n.

Q4. n est élément de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\forall Q \in E_{n-1},\ < Q, P_n >= 0$.

b) Si P_n n'a pas de racine d'ordre impair dans $]a, b[$ on pose $D = 1$. Si P_n a, dans $]a, b[$, r racines d'ordre impair, y_1, y_2, ..., y_r, on pose $D = (X - y_1)(X - y_2) \ldots (X - y_r)$.

Montrer rapidement que DP_n garde un signe constant sur $[a, b]$. En déduire en raisonnant par l'absurde que $r = n$. Que dire alors pour P_n ?

Q5. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. a) Montrer qu'il existe un élément $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+2}$ tel que : $XP_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \gamma_k P_k$.

Montrer que $\gamma_i = 0$ si i appartient à $[\![0, n-2]\!]$ $(< XP_n, P_i >=< P_n, XP_i >)$

b) Montrer $\gamma_{n+1} = 1$ et qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $P_{n+1} = (X + a_n)P_n + b_n P_{n-1}$.

Montrer que $a_n = -\dfrac{< XP_n, P_n >}{\|P_n\|^2}$ et $b_n = -\dfrac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2}$.

Remarque *On peut encore renforcer cet exercice de la manière suivante. On suppose que* $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ *et que* p *est continue et strictement positive sur* $]a, b[$ *et telle que* $\displaystyle\int_a^b R(t)\, p(t)\, \mathrm{d}t$ *converge pour tout élément* R *se* $\mathbb{R}[X]$*... ou de* $\mathbb{R}_{2n}[X]$.

Exercice 26 **PC** **Construction d'une base orthonormée. EDHEC 2011 exercice 3.**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal 2. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

Q1. Montrer que, pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ est convergente.

On admet que l'application, notée $\langle ., . \rangle$, *de* $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$, *définie par :*

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X],\ \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$$

est un produit scalaire. On note $\|\ \|$ *la norme associe.*

Q2. (a) Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, P' et Q' leurs polynômes dérivés respectifs. Établir la relation suivante :

$$\langle P', Q \rangle + \langle P, Q' \rangle = \langle P, Q \rangle - P(0)\, Q(0).$$

(b) En déduire que si P est un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$, orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur, alors on a $|P(0)| = \|P\|$.

Q3. On se propose de démontrer dans cette question qu'il existe une unique famille de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant :

$$(\mathcal{R}) \quad \begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ \deg L_k = k \\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ L_k(0) = 1 \\ (L_0, L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{R}_n[X] \end{cases}$$

(a) On suppose qu'il existe deux familles de polynômes $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ et $(M_0, M_1, \dots, M_n)$ vérifiant les relations $(\mathcal{R})$.

Montrer que, pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, $L_k = M_k$.

(b) On note $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ la famille obtenue à partir de la base canonique $(1, X, ..., X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$) par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

i) Justifier, pour tout k de $[\![0, n]\!]$, la relation $P_k(0) \neq 0$.

ii) En déduire une famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ vérifiant $(\mathcal{R})$.

(c) Conclure et calculer explicitement L_1 et L_2.

En plus 1 Construction d'une base orthonormée.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de E. Construire une base orthonormée de l'hyperplan d'équation $x - y + 2z - 3t = 0$ dans la base $\mathcal{B}$.

En plus 2 Pratique du procédé d'orthonormalisation de Schmidt

$E = \mathbb{R}_2[X]$. Si P et Q sont deux éléments de E on pose :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(1)Q'(1) + P''(X)Q''(X).$$

Q1. Montrer que φ est un produit scalaire.

Q2. Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour trouver une base orthonormée de E.

En plus 3 Pratique du procédé d'orthonormalisation de Schmidt

n est un élément de $\mathbb{N}^*$, a est un élément de $\mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ \Phi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)$$

Q1. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.

Q2. Ici $n = 2$. Construire une base orthonormale de E.

Q3. Trouver une base orthonormale de E dans le cas général (on pourra éventuellement s'inspirer du résultat de Q2).

En plus 4 L'aspect théorique du procédé d'orthonormalisation de Schmidt QSP HEC 2011

Soit $(E, < .,. >)$ un espace euclidien et u un endomorphisme de E pour lequel il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure (on pourra penser au procédé d'orthonormalisation de Schmidt)

En plus 5 Orthonormalisation de schmidt. Oral ESCP 2006 2.12 largement inspiré du problème d'EDHEC 2000.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel non nul et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$. Un vecteur de E est dit unitaire s'il est de norme égale à 1.

Q1. Soit k un réel et A la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j}$ tel que pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et $n+1$, $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ k & \text{sinon} \end{cases}$.

Déterminer pour quelles valeurs de k la matrice A est non inversible.

Q2. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs unitaires de E, tels que, pour tout couple (i,j) d'indices distincts de $[\![0,n]\!]$, $\langle x_i, x_j\rangle = k$.

a) Justifier l'existence de $n+1$ réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$.

b) Déduire de ce qui précède que $k \in \left\{1, -\dfrac{1}{n}\right\}$.

c) Montrer que si $k \neq 1$, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est une base de E.

Q3. Montrer que si $n = \dim E = 2$, il existe trois vecteurs unitaires x_0, x_1, x_2 de E tels que pour tout couple (i,j) d'indices distincts de $[\![0,2]\!]$, $\langle x_i, x_j\rangle = -\dfrac{1}{2}$.

Q4. On se propose de montrer le résultat analogue en dimension 3.

a) Montrer que si $n = \dim E = 3$ et que x_0, x_1, x_2, x_3 sont 4 vecteurs unitaires de E tels que pour tout couple (i,j) d'indices distincts de $[\![0,3]\!]$, $\langle x_i, x_j\rangle = -\dfrac{1}{3}$, on peut appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la famille (x_1, x_2, x_3).

b) Exprimer alors les vecteurs x_0, x_1, x_2, x_3 dans la base orthonormée ainsi construite.

c) Conclure.

En plus 6 Oral ESCP 2007 2.11

Soit N une variable aléatoire gaussienne centrée réduite.

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions f continues telles que $[f(N)]^2$ admet une espérance.

Q1. Montrer que, pour tout $(f,g) \in \mathcal{E}^2$, la variable $f(N)g(N)$ admet une espérance, que l'on note $\langle f, g\rangle$ dans la suite de l'exercice.

Q2. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ contenant $\mathbb{R}[X]$.

Q3. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

Q4. Calculer, pour tout entier naturel n, la valeur de l'intégrale $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^n\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

(*On pourra séparer les cas n pair et n impair.*)

Q5. Soit $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ la base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ (pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$) obtenue par le procédé de Schmidt à partir de la base canonique.

a) Calculer P_0 et P_1

b) Montrer que pour tout entier k tel que $n \geqslant k \geqslant 1$, il existe un triplet de réels (a_k, b_k, c_k) tel que

---

En plus 7 Oral ESCP 2012 2.15

Dans cet exercice $E = \mathbb{R}_3[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 et à coefficients réels.

Q1. Montrer que l'application $(P, Q) \to \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ défini un produit scalaire sur E qu'on note $\langle ., . \rangle$. On note $||.||$ la norme euclidienne associée.

Q2. Montrer qu'il existe une base orthonormale $L_0, \ldots, L_3$ de E et une seule telle que pour tout $i \in [\![0, 3]\!]$:

$$\mathrm{Vect}(L_0, \ldots, L_i) = \mathrm{Vect}(1, \ldots, X^i) \text{ et } \langle L_i, X^i \rangle > 0.$$

Calculer L_0, L_1 et L_2. On admet que $L_3 = \dfrac{5\sqrt{14}}{4}\left(X^3 - \dfrac{3}{5}\,X\right)$

Soit $\mathcal{S} = \{P \in E \;/\; \|P\| = 1\}$. *Dans la suite de l'exercice P est un élément de $\mathcal{S}$.*

Q3. On écrit P sous la forme $P = \sum\limits_{i=0}^{3} a_i L_i$.

a) Calculer $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i^2$.

b) En déduire que pour tout réel $x : |P(x)| \leqslant \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{3} |L_i(x)|^2\right)^{1/2}$.

Q4. Montrer que $\displaystyle\mathop{\mathrm{Sup}}_{x \in [-1,1]} |P(x)| \leqslant 2\sqrt{2}$.

SF 12 **Utiliser Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité.**

Rappelons que :

x et y sont deux éléments de E.

$\boxed{|<x,y>| \leqslant \|x\|\,\|y\|}$ et $\boxed{|<x,y>| = \|x\|\,\|y\| \text{ si et seulement si } (x,y) \text{ est liée}}$.

Les deux applications usuelles.

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\Big|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}}$$

Soit f et g deux fonctions numériques continues sur $[a,b]$.

$$\boxed{\Big|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t}\ \sqrt{\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t}}$$

Exercice 27 **PC** **QSP ESCP 2005**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. x_1, x_2, ..., x_n sont n réels strictement positifs dont la somme vaut 1.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geqslant n^2$.

Exercice 28 **PC** **Oral ESCP 1999 2-20 et QSP HEC 2011 (ou presque)**

Soit n un élément de $[\![2,+\infty[\![$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\displaystyle\operatorname*{Max}_{(a_{i,j})\in O_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ existe et en donner la valeur.

Indication *On pourra faire intervenir l'élément U de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.*

Exercice 29 **Utilisation de Cauchy-Schwarz, et de son cas d'égalité, dans un problème d'optimisation.**

▶ *Intéressant mais il faut savoir qu'une fonction numérique de n variables continue sur un fermé borné F possède un maximum et un minimum sur F.*

n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $F=\{(x_1,x_2,\dots,x_n) \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leqslant 1\}$.

$$\forall X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in F,\ f(X)=\sum_{i\neq j} x_i\,x_j$$

Q1. Soit $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ un élément de F. Exprimer $f(X)$ en fonction de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Q2. Montrer que f possède un maximum que nous noterons M. Montrer que $M=n-1$ et trouver les éléments de F qui réalisent ce maximum.

Exercice 30 **PC** f est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(0)=0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f'(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{f^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (on pourra montrer que $A \to \int_1^A \frac{f^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est majorée en utilisant une intégration par parties et Cauchy-Schwarz).

En plus 1 x et y sont deux éléments de E.

Retrouver Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité en calculant $\| \|y\|^2 \, x - < x, y > \, y\|^2$.

En plus 2 $\|.\|$ est la norme associé au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $|\operatorname{tr} A| \leqslant \sqrt{n}\,\|A\|$ ou $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{i,j})^2$.

Voir ECRICOME 2003 exercice 2.

En plus 3 f est une application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''^2(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,f''(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge (on pourra raisonner par l'absurde).

En plus 4 f est une fonction numérique de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$.

Montrer que, pour tout élément x de $[a, b]$, $\displaystyle(f(x) - f(a))^2 \leqslant (x - a)\int_a^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$.

En déduire que : $\displaystyle\int_a^b (f(t) - f(a))^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(t))^2\,\mathrm{d}t$.

En plus 5 QSP HEC 2005

f et g sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$ et telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)\,g(x) \geqslant 4$.

Montrer que $\displaystyle 36 \leqslant \left(\int_{-2}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-2}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

En plus 6 Oral ESCP 2012 2.9

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit E un espace euclidien de dimension n.

On note $\langle u, v\rangle$ le produit scalaire de deux vecteurs u et v de E, et $||.||$ la norme euclidienne associée.

On dit qu'un endomorphisme f de E est *orthogonal* si sa matrice dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.

Q1. Montrer que f est orthogonal si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Q2. Soit f un endomorphisme de E.

a) Montrer que si f est orthogonal, alors pour tout x de E : $||f(x)|| = ||x||$.

b) Montrer réciproquement que, si pour tout vecteur x de E, on a $||f(x)|| = ||x||$, alors f est orthogonal.

Q3. On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et on considère un endomorphisme f orthogonal dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est notée A.

On pose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}$.

a) Exprimer $a_{i,j}$ en fonction de f et des vecteurs e_i et e_j.

b) Montrer qu'il existe un vecteur u de E tel que $S = \langle u, f(u) \rangle$.

c) En déduire que $|S| \leqslant n$.

d) Montrer que $n \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant n\sqrt{n}$.

$\boxed{\textbf{SF 13}}$ **Passer d'une base orthonormée à une autre.**

$\boxed{\textbf{SF 14}}$ **Monter qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale.**

Complément $\boxed{1}$: **Des caractérisations des matrices orthogonales.**

Rappel $\boxed{\text{Une matrice } \mathbf{P} \text{ de } \mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{R}) \text{ est orthogonale si elle vérifie } {}^{\mathbf{t}}\mathbf{PP} = \mathbf{P}^{\mathbf{t}}\mathbf{P} = \mathbf{I_n}.}$ Donc :

les assertions suivantes sont équivalentes.

i) P est orthogonale.

ii) P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$.

iii) ${}^tPP = I_n$.

iv) $P^tP = I_n$.

La matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée est une matrice orthogonale.

$\boxed{\textbf{Exercice 31}}$ **Caractérisations des matrices orthogonales.**

▶ *Les résultat de Q2 sont intéressants pour econnaître rapidement une matrice orthogonale.*

Q1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien E.

$({e'}_1, {e'}_2, \dots, {e'}_n)$ est une famille déléments de E de cardinal n et P est la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.

Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée de E si et seulement si P est une matrice orthogonale.

Contenu dans oral ESCP 1998 2-17

Q2. $\boxed{\mathbf{P}}$ P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

P est orthogonale si et seulement si les colonnes de P constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, ou, c'est la même chose :

P est orthogonale si et seulement si les colonnes de P constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

P est orthogonale si et seulement si les lignes de P constituent une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique, ou, c'est la même chose :

P est orthogonale si et seulement si les lignes de P constituent une base orthonormée de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique.

$\boxed{\textbf{Exercice 32}}$ **Caractérisations des matrices orthogonales again.**

▶ *Le résultat de Q1 a) est essentiel.*

Q1. P est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) $\boxed{\mathbf{P}}$ Montrer que si P est orthogonale : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|$.

b) Réciproquement on suppose que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|$.

Montrer que $\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2,\ < PX, PY > = < X, Y >$. En déduire que P est orthogonale.

Finalement $\boxed{P \text{ est orthogonale si et seulement si } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|PX\| = \|X\|.}$

Q2. f est un endomorphisme de E de matrice P dans la base $\boxed{\textbf{orthonormée}}$ $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E.

P est orthogonale si et seulement si $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$.

Exercice 33 **QSP HEC 2005**

Existe une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, symétrique, orthogonale et dont la première ligne est $(1 \quad 0 \quad 0)$.

JF Mieux encore, trouver au moins trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ont ces qualités.

JF Mieux encore, trouver l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui ont ces qualités.

La correction portera sur la dernière question.

Deux énoncés pour un même exercice... Si possible utiliser le second...

Exercice 34 **S** **Décomposition d'Iwasawa d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{R})$.**

Soit M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. E est un espace vectoriel de dimension n. $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.
$\mathcal{B}'$ est la base de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M (autrement dit M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).

$\mathcal{B}''$ est la base orthonormée de E déduite de $\mathcal{B}'$ par le procédé d'orthormalisation de Schmidt.

On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$.

On note R la matrice de passage de $\mathcal{B}''$ à $\mathcal{B}'$.

Montrer que $M = QR$, que $Q^{-1} = {}^tQ$ et que R est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.

Exercice 34 **PC** **Décomposition d'Iwasawa d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{R})$.**

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice triangulaire supérieure R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$.

On Pourra interpréter la matrice A comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à d'une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et utiliser la base déduite de $\mathcal{B}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

En plus 1 QSP ESCP 2010

u_1, u_2, ..., u_n sont n réels tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = 1$. A est la matrice $(u_i\, u_j)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = 2\,A - I_n$.

Montrer que B est orthogonale. Quelles-sont les valeurs propres de A ?

En plus 2 Trouver l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures et orthogonales.

SF 15 **Définir analytiquement une projection orthogonale.**

SF 16 **Reconnaître une projection orthogonale.**

Complément 2 : Des caractérisations des projections orthogonales.

Quelques rappels.

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. La **projection orthogonale** sur F n'est autre que la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

★ Si F est un sous-espace vectoriel de l'espace préhilbertien E on peut définir la projection orthogonale sur F dès que $F^\perp$ est un supplémentaires de F dans E. C'est par exemple le cas si F est de dimension finie.

F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. p_F est la projection orthogonale sur F.

Si x et y sont deux éléments de E :

$$\boxed{p_F(x) = y \iff \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}}$$

En clair les propriétés $p_F(x) \in F$ et $x - P_F(x) \in F^\perp$ sont caractéristiques de la projection orthogonale de x sur F.

F est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel euclidien E. p_F est la projection orthogonale sur F.

Si x et y sont deux éléments de E :

$$\boxed{p_F(x) = y \iff \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F, \; < x - y, z >= 0 \end{cases}}$$

On retiendra de ce résultat qu'il n'est pas nécessaire de connaître $F^\perp$ pour trouver la projection orthogonale de x sur F.

PP F est un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est **une base orthonormée de F**.

p_F est la projection orthogonale sur F. Pour tout élément x de E :

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} < x, u_k > \; u_k}$$

P E est un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B}$ est une **base orthonormée** de E.

F est un sous-espace vectoriel de E et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est **une base orthonormée** de F.

Pour tout k dans $[\![1, p]\!]$, U_k est la matrice de u_k dans la base $\mathcal{B}$. p_F est la projection orthogonale sur F.

Alors la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$ est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} U_k \, {}^tU_k$, donc $\boxed{M_{\mathcal{B}}(p_F) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} U_k \, {}^tU_k}$.

Notons que ce résultat est un "+" du programme 2014.

P D est une droite vectorielle de E et p_D est la projection orthogonale sur D.

Si u est **un vecteur unitaire de D**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_D(x) = < x, u > u.}$

Si u **est un vecteur non nul de D**, pour tout élément x de E : $\boxed{p_D(x) = \dfrac{< x, u >}{\|u\|^2}\, u.}$

P E est un espace vectoriel euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2. H est un hyperplan de E et p_H est la projection orthogonale sur H.

Si u est **un vecteur unitaire orthogonal à H** Pour tout élément x de E : $\boxed{p_H(x) = x - < x, u > u.}$

Si u est **un vecteur non nul orthogonal à H** Pour tout élément x de E : $\boxed{p_H(x) = x - \dfrac{< x, u >}{\|u\|^2}\, u.}$

P L'aspect pratique.

$(E, < ., . >)$ est un espace vectoriel euclidien (ou un préhilbertien....). F est un sous-espace vectoriel de E et p_F est la projection orthogonale sur F. $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une base **quelconque** de F.

x est un élément de E. Pour trouver $p_F(x)$ on peut :

M1 • Utiliser $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$.

M2 • Construire une base orthonormée $(w_1, w_2, \ldots, w_p)$ de F et utiliser : $p_F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} < x, w_k > \, w_k$.

M3 • Poser $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k\, u_k$. On cherche alors $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ en écrivant que $x - p_F(x)$ est orthogonal à F donc à tous les éléments de la base $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de F . On obtient alors rapidement :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ < x, u_i >= \sum_{k=1}^{p} < u_k, u_i > \, x_k.$$

Ceci donne un système linéaire de p équations à p inconnues que l'on résout.

Ce système s'écrit matriciellement $AX = B$ où $A = (< u_i, u_j >)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} < x, u_1 > \\ < x, u_2 > \\ \vdots \\ < x, u_p > \end{pmatrix}$.

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (A est la matrice de la restriction du produit scalaire à F dans la base $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$). Le système admet donc une solution et une seule (ce qui n'est pas un scoop...).

Par exemple cette démarche apparaît clairement dans EDHEC 1999 PB et elle est implicite dans LYON 1997 PB 1.

• Ne pas oublier de regarder au préalable si F est un hyperplan. Dans ce cas on détermine $p_{F^\perp}$ ($F^\perp$ est une droite vectorielle...) et on utilise $p_F = \mathrm{Id}_E - p_{F^\perp}$.

Exercice 35 **S** **Reconnaître une projection orthogonale**.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien E.

p est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Montrer que p est une projection orthogonale et préciser sa base.

Exercice 36 **S** **Recherche de la matrice d'une projection orthogonale 1.**

► *Un entraînement à ne pas négliger.*

$\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base orthonormée de E. F est le plan d'équation $x+2y-z=0$ dans $\mathcal{B}$. p est la projection orthogonale sur F. Montrer que :

$$M_{\mathcal{B}}(p)=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}$$

On donnera trois méthodes.

Exercice 37 **S** **Recherche de la matrice d'une projection orthogonale 2.**

► *Un entraînement à ne pas négliger.*

$\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ est une base orthonormée de E. F est l'intersection des deux hyperplans d'équations $x+2y-z=0$ et $x-y-z+t=0$ dans $\mathcal{B}$.

Montrer que la matrice de la projection orthogonale p sur F dans la base $\mathcal{B}$ est : $\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix}7 & -1 & 5 & -3\\ -1 & 1 & 1 & 3\\ 5 & 1 & 7 & 3\\ -3 & 3 & 3 & 9\end{pmatrix}$.

Exercice 38 **S** **Projection et projection orthogonale.**

Un bon exercice... sur les polynômes.

$E=\mathbb{R}_n[X]$ et A un élément non constant de E de degré a $(0<a\leqslant n)$. A tout élément P de E on associe le reste $f(P)$ dans la division de P par A.

$\forall (P,Q)\in E^2,\ <P,Q>=\displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$. $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

Q1. Montrer que f est un projecteur de E. Trouver une base de son noyau et une base de son image.

Q2. Ici $a<n$. On suppose que f est une projection orthogonale. Montrer que si i appartient à $[\![0,n-a]\!]$ et si j appartient à $[\![0,a-1]\!]$, $<AX^i,X^j>=0$. En déduire que $<A,A>=0$. Moralité ?

Q3. Ici $a=n$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit une projection orthogonale.

Exercice 39 **S** **Matrice de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.**

Modeste mais pas aussi simple que cela à mettre en forme. C'est dans ESSEC 2012.

$(U_1,U_2,\dots,U_k)$ est une base orthonormée d'un sous espace vectoriel F de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que la matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la projection orthogonale sur F est $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} U_i\,{}^tU_i$.

Exercice 40 **PC** **D'après HEC 2005 Projection orthogonale**

n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$. $E=\mathbb{R}_n[X]$. On rappelle que l'application qui à tout élément (P,Q) de E^2 associe $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E. On munit E de ce produit scalaire que l'on note $<.,.>$.

Q1. Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. Montrer que $0=k!+\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{(j+k)!}{(j+1)!}$ (on pourra considérer la valeur en 1 de $P_k=\left((1-X)^n\,X^k\right)^{(k-1)}$).

Q2. Déterminer la projection orthogonale de $P = 1$ sur $\mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^n)$.

Exercice 41 **S** **Caractérisation d'une projection orthogonale 1.**

★ Ce résultat fait partie du programme de 2014

p est une projection de l'espace vectoriel euclidien E.

P Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si p est un endomorphisme symétrique.

Contenu dans oral ESCP 1998 2-17, 2001 2.1

On retiendra aussi qu'une application p de E dans E est une projection orthogonale si et seulement si p est une endomorphisme symétrique qui vérifie $p \circ p = p$.

Exercice 42 **PC** **Caractérisation d'une projection orthogonale 2.**

p est une projection de l'espace vectoriel euclidien E.

Montrer que p est une projection orthogonale si et seulement si $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Contenu dans Oral ESCP 1999 2.26, 2011 2.7

En plus 1 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormée de E. F est l'hyperplan d'équation $x - y + 2z + 3t = 0$ dans $\mathcal{B}$.

Montrer que la matrice de la projection orthogonale p sur F dans la base $\mathcal{B}$ est : $\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 14 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 14 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 11 & -6 \\ -3 & 3 & -6 & 6 \end{pmatrix}$.

En plus 2 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormée de E. F est l'intersection des deux hyperplans d'équations $2x + y + t = 0$ et $x + y - z + t = 0$ dans $\mathcal{B}$.

Montrer que la matrice de la projection orthogonale p sur F dans la base $\mathcal{B}$ est : $\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

En plus 3 $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

On munit E du produit scalaire $< ., . >$ défini par : $\forall (P, Q) \in E^2,\ < P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

Trouver la matrice de la projection orthogonale p sur F dans la base $(1, X, X^2)$ (qui n'est pas orthonormée...)

R. $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 8 & 11 & 8 \\ -10 & -10 & -7 \end{pmatrix}$

En plus 4 E est un espace vectoriel euclidien de dimension n supérieure ou égale à 2. x et y sont deux vecteurs de E tels que $< x, y >= \|y\|^2$.

Montrer qu'il existe un hyperplan H de E tel que y soit la projection orthogonale de x sur H.

En plus 5 F et H sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E. p et q sont les projections orthogonales respectivement sur F et H. On pose $F' = F \cap (F \cap H)^\perp$ et $H' = H \cap (F \cap H)^\perp$.

Q1. Montrer que si F et H sont orthogonaux : $p \circ q = q \circ p$.

Q2. Montrer que si $p \circ q = q \circ p$ alors F' et H' sont orthogonaux.

Q3. Ici $p \circ q = q \circ p$. Montrer que $p \circ q$ est la projection orthogonale sur $F \cap H$. Que dire de $p + q - p \circ q$?

En plus 6 Symétrie orthogonale par rapport à une droite

E est un espace vectoriel euclidien de dimension n ($n \in [\![2, +\infty[\![$).

Q1. Montrer que si a est un vecteur unitaire de E, l'application s définie par $\forall x \in E,\ s(x) = 2 < x, a > a - x$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Q2. Envisager une réciproque.

Thème abordé dans oral ESCP 2004 2.8, 2007 2.2, ECRICOME 1997 exercice 1. On parle aussi de symétrie orthogonale dans le problème d'EDHEC 2002.

En plus 7 Exercice 3 d'EDHEC 2003.

$\boxed{\textbf{SF 17}}$ **Utiliser une projection orthogonale pour traiter un problème d'optimisation.**

$\boxed{\textbf{SF 18}}$ **Calculer la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.**

$\boxed{\textbf{SF 19}}$ **Utiliser le théorème concernant la métode des moindres carrés.**

Complément $\boxed{\textbf{3}}$: **Distance d'un vecteur à une partie (resp à un sous-espace vectoriel) dans un espace préhilbertien.**

Complément $\boxed{\textbf{4}}$: **Pseudo inverse, pseudo solution.**

Rappelons que :

Soient A une partie non vide d'un espace préhilbertien E et x un élément de E.

La distance de x à A est la borne inférieure de l'ensemble $\{\|x-z\|\,;\,z\in A\}$. On la note $\mathbf{d(x,A)}$.

$\boxed{d(x,A)=\operatorname*{Inf}_{z\in A}\|x-z\|.}$

★ Il convient de remarquer que $d(x,A)$ existe toujours car $\{\|x-z\|\,;\,z\in A\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ mais qu'il n'existe pas toujours un élément a de A tel que $d(x,A)=\|x-a\|$. Autrement dit $\operatorname*{Min}_{z\in A}\|x-z\|$ n'existe pas toujours.

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\boxed{\text{euclidien}}$ E et p_F (resp. $p_{F^\perp}$) la projection orthogonale sur F (resp. $F^\perp$).

Soit x un élément de E.

1. • $\forall z\in F,\ \|x-p_F(x)\|\leqslant\|x-z\|$.

 • Si t est un élément de F tel que : $\forall z\in F,\ \|x-t\|\leqslant\|x-z\|$ alors $t=p_F(x)$.

2. Autrement dit $\operatorname*{Min}_{z\in F}\|x-z\|$ existe et vaut $\|x-p_F(x)\|$. De plus $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum.

$p_F(x)$ est donc l'unique élément de F tel que $d(x,F)=\|x-p_F(x)\|$.

$\boxed{\text{La projection orthogonale de } x \text{ sur } F \text{ est } \textbf{la meilleure approximation} \text{ de } x \text{ par un élément de } F.}$

3. $d^2(x,F)=\|x-p_F(x)\|^2=\|x\|^2-\|p_F(x)\|^2=\|x\|^2-<x,p_F(x)>=\|p_{F^\perp}(x)\|^2$.

★ On est prié de remarquer que ce théorème contient 3 choses.

• $\boxed{\text{L'existence d'un minimum}}$ pour la partie $\{\|x-z\| \mid z\in F\}$ de $\mathbb{R}^+$.

• $p_F(x)$ est l'unique élément de F qui réalise ce minimum ou qui "réalise la distance de x à F".

• Le carré de la distance de x à F vaut $\|x-p_F(x)\|^2$ ou $\|x\|^2-\|p_F(x)\|^2$ ou $\|x\|^2-<x,p_F(x)>$ ou encore $\|p_{F^\perp}(x)\|^2$.

La formulation du programme...

Caractérisation de la projection orthogonale par minimisation de la norme.

Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\boxed{\text{euclidien}}$ E et p_F la projection orthogonale sur F.

x et y sont deux éléments de E.

$$\boxed{y=p_F(x)\Longleftrightarrow y\in F \text{ et } \|x-y\|=\operatorname*{Inf}_{z\in F}\|x-z\|} \text{ ou } \boxed{y=p_F(x)\Longleftrightarrow y\in F \text{ et } \|x-y\|=\operatorname*{Min}_{z\in F}\|x-z\|}$$

★★ Il est important de savoir que ce qui précède vaut encore dans un espace préhilbertien réel E pourvu que $F \oplus F^{\perp} = E$. Rappelons que c'est le cas lorsque F est de dimension finie. D'où l'importance de connaître les démonstrations de ces résultats que les concepteurs recyclent souvent lorsqu'ils souhaitent vous faire travailler dans les préhilbertiens réels quelconques.

Méthode des moindres carrés.

A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $\boxed{\text{le rang de } A \text{ est } p}$.

$\|.\|$ est la norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ associée au produit scalaire canonique.

1. $\underset{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}} \|AX - B\|$ existe.
2. Il existe un unique élément X_0 de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ tel que $\|AX_0 - B\| = \underset{X\in\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}{\text{Min}} \|AX - B\|$.
3. ${}^tAA$ est inversible.
4. $X_0 = ({}^tAA)^{-1}({}^tAB)$ ou ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.

Notons que le programme de 2014 dit que *"la formule donnant la valeur du point réalisant le minimum n'est pas exigible"*. Alors il est sans doute utile d'apprendre à la retrouver...

▶ *Sans doute faire l'un des deux exercices suivants, si possible le second sans regarder le premier...*

Exercice 43 **S** **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation**.

▶ *Bon entraînement.*

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x+y-2)^2 + (x-1)^2 + (2x+y-1)^2$

On se propose de montrer l'existence et de donner la valeur de $\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} f(x,y)$

On pose $E = \mathbb{R}^3$. $< .,. >$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\|.\|$ est la norme associée.

Q0. Repréciser $< .,. >$ et $\|.\|$.

Q1. Pour (x,y) dans $\mathbb{R}^2$, écrire $f(x,y)$ comme le carré de la norme d'un élément de E.

Q2. Trouver un sous-espace vectoriel F de E et un élément u de E tel que le problème posé se ramène à montrer l'existence et à donner la valeur de $\underset{v\in F}{\text{Min}} \|u-v\|$ ou $\underset{v\in F}{\text{Min}} \|u-v\|^2$.

Q3. Résoudre le problème posé.

Exercice 43 **PC** **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation**.

▶ *Bon entraînement.*

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x+y-2)^2 + (x-1)^2 + (2x+y-1)^2$

Montrer l'existence et de donner la valeur de $\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} f(x,y)$

Exercice 44 **PC** **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation**.

Oral ESCP 1999 1-17, 2000 1-4, 2000 2-15 ou presque.

▶ *Bon entraînement.*

Q1. a) Rappeler la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout élément P de $\mathbb{R}[X]$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,e^{-t}\,dt$ converge.

Q2. $\forall (a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ f(a,b,c)=\displaystyle\int_0^{+\infty}(t^3-at^2-bt-c)^2e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

En se ramenant à un problème de projection orthogonale montrer que f possède un minimum sur $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera. *Frise* $9X^2-18X+6$ *** 36

Exercice 45 **S** **Meilleure approximation. Calcul d'une distance** D'aprs̀ ECRICOME 2001.

$E=\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique ($\forall (A,B)\in E^2 < A,B >= \mathrm{tr}({}^tAB)$).

$U=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ et $F=\mathrm{Vect}(I_4,U,U^2,U^3)$.

Q0. $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ sont deux éléments de E. Rappeler la valeur de $< A,B >$.

Q1. Montrer que (I_4,U,U^2,U^3) est une base orthogonale de F.

Q2. Soit V l'élément de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0.

Trouver la meilleure approximation W de V par un élément de F et calculer la distance de V à F.

On retrouve un thème analogue dans oral ESCP 2005 2.8, EDHEC 2003 exercice 3.

Exercice 46 **S** **Méthode des moindres carrés.**

▶ *Il faut bien en faire un...*

Utiliser la méthode des moindres carrés pour montrer l'existence et trouver la valeur de :

$$\underset{(x,y)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}}\left[(x-10)^2+(2x+y-1)^2+(2y-1)^2+(-x+3y-2)^2\right]$$

▶ *On pourra sans doute faire l'un des exercices suivants*

Exercice 47 **PC** **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation**.

Existence et valeur de : $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}}\displaystyle\int_0^{\pi}(a\cos t+b\sin t-t)^2\,\mathrm{d}t$

(munir l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur $[0,\pi]$ d'un bon produit scalaire et se ramener à un problème de projection orthogonale... dans un euclidien).

Exercice 48 **PC** **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation**.

Existence et valeur de : $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{\mathrm{Min}}\displaystyle\int_0^{1}t^2\,(\ln t-at-b)^2\,\mathrm{d}t.$

Exercice 49 **PC** **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation**.

Attention piège à c.

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{F}=\{f\in E \mid \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=1\}$.

Montrer l'existence et donner la valeur de $\underset{f\in\mathcal{F}}{\mathrm{Min}}\displaystyle\int_0^1\big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$

Exercice 50 **PC** **Distance d'un vecteur à une partie non vide dans un préhilbertien. Un exemple où la distance n'est pas réalisée.**

E est un espace vectoriel préhilbertien, A est une partie non vide de E et x est un élément de E.

Q1. Montrer que $\{\|x-a\|;\ a\in A\}$ possède une borne inférieure. Cette borne inférieure est **la distance de x à A** que l'on note $d(x,A)$.

On écrit le plus souvent $d(x,A)=\operatorname*{Inf}_{a\in A}\|x-a\|$

Q2. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique et $\|.\|$ est la norme associée. M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer qu'il existe un élément p_0 de $\mathbb{N}^*$ tel que pour tout p dans $[\![p_0,+\infty[\![$, $M-\dfrac{1}{p}I_n$ est inversible.

b) En déduire que $d\big(M,GL_n(\mathbb{R})\big)=0$.

c) On suppose que M n'est pas inversible. Montrer qu'il n'existe pas d'élément P de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $\|M-P\|=d\big(M,GL_n(\mathbb{R})\big)$.

Notons que dans cet exercice on montre que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 51 **PC** **Réalisation de la distance d'un vecteur à un sous-espace dans un espace préhilbertien.**

► *Démarche utile lorsque les conditions d'application du théorème de meilleure approximation ne sont pas toutes réunies*

E est un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E. x est un élément de E.

Q1. Montrer qu'il existe au plus un élément y de F tel que : $\|x-y\|=\operatorname*{Inf}_{z\in F}\|x-z\|=d(x,F)$

Q2. Soit y un élément de F. Montrer que : $\|x-y\|=\operatorname*{Inf}_{z\in F}\|x-z\|=d(x,F)$ si et seulement si $x-y$ est orthogonale à F.

Exercice 52 **PC** **La distance n'est pas réalisée again.**

$E=\mathbb{R}[X]$. Si $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ et $Q=\sum_{k=0}^{q}b_kX^k$ sont deux éléments de E, on pose : $\varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{\mathrm{Min}(p,q)}a_kb_k$. φ est un produit scalaire sur E

On pose encore $F=\{P\in E\mid P(0)=1\}$ et $P_0=X^0=1$.

Utiliser l'exercice précédent pour montrer qu'il n'existe pas délément P de F tel que $d(P_0,F)=\|P_0-P\|$.

On pourra utiliser la famille $(X^{i+1}-X^i)_{i\in\mathbb{N}}$

► *L'exercice qui suit est sans doutes à faire... sauf si vous avez le temps de faire ESSEC 2012. On pourra aussi voir LYON 2003 PB 2, et les sujets 1 et 2 de la sélection de problèmes. Thème aussi abordé dans oral ESCP 2001 2.9. Voir aussi oral ESCP 2002 2.15.*

Exercice 53 **PC** **Pseudo inverse**

E et E' sont deux espace vectoriels euclidiens de dimensions non nulles p et n. f est une application linéaire de E dans E' et b' est un élément de E'.

Q1. Montrer que $\operatorname*{Min}_{x\in E}\|b'-f(x)\|$ existe.

Q2. $\mathcal{S}$ est l'ensemble des éléments de E qui réalisent ce minimum et b_0 est un élément de $\mathcal{S}$.

a) Exprimer les éléments de $\mathcal{S}$ en fonction de b_0 et d'un sous-espace vectoriel classique.

b) Montrer que $\mathcal{S}$ contient un élément de norme minimum et un seul que nous noterons b.

c) Montrer que b est caractérisé par $b' - f(b) \in \operatorname{Im} f^{\perp}$ et $b \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

Q3. a) Montrer que l'application g de E' dans E qui a tout élément b' de E' associe l'élément b obtenu dans Q2, est linéaire.

g est le pseudo inverse de f.

b) Donner la nature de $f \circ g$ et de $g \circ f$.

En supposant f de rang p donc f injective il n'est pas difficile avec Q1 et Q2 de retrouver le résultat du théorème sur les moindres carrés.

Q1 et Q2 permettent même de montrer un théorème un peu plus général en supprimant l'hypothèse $\operatorname{rg} A = p$. *Notons qu'alors on perd l'unicité de X_0 et l'invsersibilité de ${}^tAA$.*

Exercice 54 **S** **Utilisation d'une projection orthogonale dans un problème d'optimisation. EDHEC 1999 PB**.

► *Bon entraînement.*

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions réelles $f_0, f_1, \ldots, f_n$ définies par : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_0(x) = e^{-x}$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_k(x) = x^k\, e^{-x}$.

On appelle E_n, l'espace vectoriel engendré par la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$.

On note d l'application qui à toute fonction de E_n, associe sa fonction dérivée.

Partie 1

1) Montrer que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de E_n.

2) a. Calculer $d(f_0)$, puis montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ d(f_k) = k f_{k-1} - f_k$.

b. Montrer que d est un endomorphisme de E_n.

3) a. Vérifier que d est un automorphisme de E_n.

b. Justifier que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ d\left(\dfrac{1}{k!} f_k\right) = \dfrac{1}{(k-1)!}\, f_{k-1} - \dfrac{1}{k!}\, f_k$.

c. En déduire, pour tout j de $[\![0, n]\!]$, l'expression de $d^{-1}(f_j)$ dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$.

4) Utiliser la question précédente pour montrer que, pour tout entier naturel j, l'intégrale $I_j = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^j\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ converge, puis donner sa valeur en fonction de j.

5) Montrer que l'application qui à tout couple (f, g) de E_n, associe $(f \mid g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) g(x)\, e^{x}\, \mathrm{d}x$ est un produit scalaire sur E_n.

Pour tout f de E_n, on note désormais $\|f\|$ la norme de f.

Partie 2

1) On pose $E_{n-1} = \operatorname{Vect}(f_0, f_1 \ldots, f_{n-1})$.

a. Rappeler le théorème qui assure l'existence d'un unique élément h de E_{n-1} vérifiant : $\|f_n - h\| = \operatorname*{Inf}_{g \in E_{n-1}} \|f_n - g\|$.

On pose désormais $h = -\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j f_j$.

b. Pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, rappeler pourquoi $f_n - h \perp f_k$.

c. En déduire que pour tout k élément de $[\![0, n-1]\!]$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j (j+k)! + (k+n)! = 0$.

2) On considère la fonction P définie pour tout x réel par : $P(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_j (x+1)\dots(x+j) + (x+1)(x+2)\dots(x+n)$.

a. Vérifier que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P(k) = 0$.

b. En déduire explicitement P, puis vérifier que $P(n) = n!$.

3) a. Montrer que $\|f_n - h\|^2 = (f_n - h \mid f_n)$.

b. En déduire la valeur de $m = \displaystyle\operatorname*{Inf}_{(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k x^k \right)^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

En plus 1 Théorème de meilleur approximation.

a et b sont deux éléments d'un espace vectoriel euclidien E. On suppose a non nul.

Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{t\in\mathbb{R}} \|ta + b\|$.

En plus 2 Distance. Oral ESCP 1999 2-15

On munit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ du produit scalaire φ défini par :

$$\forall\ A = (a_{ij}) \text{ et } B = (b_{ij})\ \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \varphi(A, B) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} b_{ij}$$

On note $||A||$ la norme de A associée à ce produit scalaire. Soit J la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

On considère l'application f de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ associe la matrice JM.

Q1. Montrer que f est linéaire. Déterminer l'image de f.

Q2. Soit $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Montrer que B n'est pas élément de $\operatorname{Im} f$.

Calculer la distance de B à $\operatorname{Im} f$. Trouver toutes les matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $d(B, \operatorname{Im} f) = \|B - f(M)\|$.

En plus 3 Le problème d'EDHEC 1999 qui met le théorème de meilleure approximation au service de

$\displaystyle\operatorname*{Min}_{(a_0,a_1\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, x^k \right)^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

En plus 4 ESSEC 1997 MI : ajustement polynomiale d'un nuage de points par la méthode des moindres carrée.

En plus 5 ESSEC 2000 MI I. On cherche $\displaystyle\operatorname*{Min}_{(a_0,a_1,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \sqrt{\int_{-1}^{1} (t^n + a_{n-1}\, t^{n-1} + a_{n-2}\, t^{n-2} + \dots + a_1 t + a_0)^2\,\mathrm{d}t}$.

En plus 6 LYON 2003 PB 2 qui traite de pseudo inverse ou d'inverse généralisé.

En plus 7 ESSEC 2012 MI qui traite de pseudo solution et de pseudo inverse.

En plus 8 HEC 2003 MI Approximation d'un nuage de points.

En plus 9 HEC 2012 MI Projection sur un convexe fermé.

En plus 10 Oral ESCP 1999 2-24

$\mathbb{R}_2[X]$ est muni du produit scalaire canonique. $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$. Calculer $d(X, F)$.

En plus 11 Théorème de meilleur approximation. Oral ESCP 1997 2-19

Existence et valeur de $\underset{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3}{\mathrm{Min}} \displaystyle\int_{-1}^{1} (e^t - a - bt - ct^2)^2 \, \mathrm{d}t$.

En plus 12 Pseudo solution. Oral ESCP 20026 2-15

$n \in [\![2, +\infty[\![$. On considère la matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = 1 \text{ ou } i = n \text{ ou } j = 1 \text{ ou } j = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

Q1. Diagonaliser A, dans le cas $n = 2$.

Dans la suite on suppose $n \geqslant 3$.

Q2. a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

b) Comparer $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.

c) Diagonaliser $f_{|\,\mathrm{Im}(f)}$ (endomorphisme de $\mathrm{Im}\, f$ induit par f).

d) Diagonaliser A.

Q3. On considère l'équation $AX = B$ avec $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Dans cette question, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ \vdots \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Trouver une solution particulière de cette équation et en déduire sa solution générale.

b) Donner la forme générale des matrices B pour lesquelles le problème admet au moins une solution. Quelle est alors la solution générale de l'équation ?

c) On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel. Pour $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, existe-t-il des vecteurs X qui minimisent $\|AX - B\|$? Si oui, les déterminer.

En plus 13 Oral ESCP 2008 2.9

Soit $p \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p. On se donne $(p+1)$ réels distincts $x_0, \ldots, x_p$ (*JF : ? ? ?*).

Soit deux polynômes A et B de $\mathbb{R}_p[X]$; on pose : $\langle A, B\rangle = \dfrac{1}{p+1} \displaystyle\sum_{i=0}^{p} A(i)\, B(i)$. On note alors :

- $\|A\|^2 = \langle A, A\rangle$;
- $E(A) = \langle A, 1\rangle$;
- $C(A, B) = \langle A - E(A), B - E(B)\rangle$;
- $V(A) = C(A, A)$.

Q1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$.

Q2. Démontrer, pour tous polynômes A et B de $\mathbb{R}_p[X])^2$, les relations suivantes :

a) $V(A) = \|A\|^2 - E(A)^2$ et $C(A, B) = \langle A, B\rangle - E(A)E(B)$.

b) $|C(A, B)| \leqslant \sqrt{V(A)V(B)}$. Dans quel cas cette inégalité est-elle une égalité ?

Q3. Soit $A \in \mathbb{R}_p[X]$ fixé.

a) Déterminer, en fonction de $E(A)$ et de $V(A)$ le projeté orthogonal de A sur le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_0[X]$, puis la distance de A à ce sous-espace vectoriel.

b) Si $\deg(A) \geqslant 1$, on note F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_p[X]$ engendré par les polynômes 1 et A.

Déterminer une base orthonormale de F, dont le premier vecteur est le polynôme 1.

c) Soit B un élément de $\mathbb{R}_p[X]$ différent de A.

Déterminer, en fonction de $E(A), E(B), V(A)$ et de $C(A, B)$, le projeté orthogonal du polynôme B sur le sous-espace vectoriel F, sous la forme $\lambda A + \mu$. Préciser la distance de B à F.

En plus 14 Théorème de meilleur approximation. Oral ESCP 2006 1.11

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose : $\Delta = \displaystyle\operatorname*{Inf}_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 (1 + x_1 t + \ldots + x_n t^n)^2\, dt$.

Q1. Justifier l'existence de Δ.

Q2. En considérant le produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$ défini sur $\mathbb{R}_n[X]$, établir l'existence et l'unicité de $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\Delta = \int_0^1 (1 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)^2\, dt$$

On définit alors la fonction F par : $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \ldots, -n-1\}, F(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{a_1}{x+2} + \cdots + \dfrac{a_n}{x+n+1}$.

Q3. Montrer que : $\Delta = F(0)$.

Q4. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to -1} (x+1)F(x)$.

Q5. Prouver que : $\forall\, k \in [\![1, n]\!], F(k) = 0$.

Q6. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \ldots, -n-1\}, F(x) = \frac{P(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}.$$

Q7. Établir que : $P(X) = \dfrac{1}{n+1}\,(1-X)(2-X)\cdots(n-X)$.

Q8. En déduire que : $\Delta = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

Complément $\boxed{5}$: Matrice d'un produit scalaire.

Ce thème figure implicitement ou explicitement dans oral ESCP 2000 2-13, 2008 2.11, 2011 2.6, LYON 1997 PB 1, ESCP MI 1999.

Exercice 55 **Matrice d'un produit scalaire.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base **quelconque** d'un espace vectoriel euclidien $(E, <.,.>)$.

On considère la matrice $A = (< e_i, e_j >)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A est la matrice du produit scalaire $<.,.>$ dans la base $\mathcal{B}$.

Q1. x et y sont deux éléments de E de matrices X et Y dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer que $\boxed{< x, y >= {}^tXAY = {}^tYAX =< X, AY >=< Y, AX >}$ et que $\boxed{\|x\| = \sqrt{{}^tXAX}}$.

Q2. $\mathcal{B}'$ est une seconde base de E, A' est la matrice du produit scalaire dans $\mathcal{B}'$ et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$. Montrer que $A' = {}^tPAP$.

Q3. Montrer que A est une matrice symétrique à coefficients réels dont les valeurs propres sont strictement positives.

Q4. Réciproquement montrer que toute matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives est la matrice d'un produit scalaire.

Exercice 56 **ESCP 2000 2-13 et 2.6 2011.** **Endomorphisme associé à la matrice d'un produit scalaire. Etude de $\mathbf{x} \to \sum\limits_{k=1}^{n} < \mathbf{x}, \mathbf{e_k} > \mathbf{e_k}$.**

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et E est un espace vectoriel euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $<.,.>$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base **quelconque** de E. On pose : $\forall x \in E,\ f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$.

Q1 a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Montrer que f est un automorphisme de E.

c) Que dire de f lorsque $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E. Enoncer et démontrer une réciproque.

Q2 a) Montrer que f est symétrique.

b) Prouver que les valeurs propres de f sont strictement positives.

Q3 a) Soit i un élément de $[\![1, n]\!]$.

Montrer qu'il existe un unique élément e'_i de E orthogonal aux vecteurs e_1, e_2, ..., e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n et tel que $< e'_i, e_i >= 1$.

b) Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base de E et préciser la matrice de f relativement aux base $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$.

Q4 Montrer qu'il existe un automorphisme symétrique s de E, à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ f)^{-1}$. Vérifier que $\big(s(e_1), s(e_2), \ldots, s(e_n)\big)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 57 **LYON 1997 PB 1 Utilisation de la matrice d'un produit scalaire pour trouver une projection dans un problème d'approximation d'une fonction continue par un polynôme.**

► *Bon entraînement.*

On note E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\textbf{Q1}}$ **On passe...** Montrer que l'application $\Phi:\ E\times E\longrightarrow\mathbb{R}\ (f,g)\longmapsto\displaystyle\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. On note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ et de degré inférieur ou égal à $n-1$, et, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, e_i l'application de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}: t\mapsto t^{i-1}$.

On rappelle que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E_n.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ Calculer, pour tout (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, $\Phi(e_i,e_j)$.

On considère la matrice carrée réelle d'ordre $n: H_n=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1}\end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ **Etude du cas** $n=2$

$\boxed{JF}$ Rappeler un résultat essentiel sur l'inversibilité d'une matrice d'ordre 2.

a) Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2.

b) La matrice H_2 est-elle diagonalisable ?

c) Montrer que la matrice H_2 est inversible et calculer son inverse.

Dans toute la suite du problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

$\boxed{\textbf{Q4}}$ Etablir que la matrice H_n est diagonalisable.

$\boxed{\textbf{Q5}}$ a) Soient $P\in E_n$, $Q\in E_n$.

On note $a_1,\ldots,a_n$ les réels tels que $P=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$, $b_1,\ldots,b_n$, les réels tels que $Q=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}b_ie_i$, A et B les matrices-colonnes définies par : $A=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$.

Montrer : $\Phi(P,Q)={}^tAH_nB$ où ${}^tA$ désigne la transposée de A.

b) En déduire que les valeurs propres de la matrice H_n sont toutes strictement positives ($\boxed{JF}$ Ok on utilise ce qui précède mais on est prié de faire très propre et surtout dans le bon sens).

c) La matrice H_n est-elle inversible ?

$\boxed{\textbf{Q6}}$ Soit $f\in E$. On note, pour $i\in[\![1,n]\!]$, $\beta_i=\Phi(e_i,f)$.

On considère les matrices-colonnes B et A_0 définies par $B=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$ et $A_0=H_n^{-1}B$.

On note $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ les réels tels que $A_0=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, et P_0 le polynôme défini par : $P_0=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i$.

On considère l'application $d: E_n \longrightarrow \mathbb{R}$ $P \longmapsto \|P - f\|$

a) Montrer : $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \Phi(e_i, P_0 - f) = 0$.

b) En déduire : $\forall Q \in E_n,\ \Phi(Q, P_0 - f) = 0$.

c) Etablir : $\forall P \in E_n,\ \|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2$.

d) Démontrer que d admet un minimum et que ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.

e) Montrer : $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.

f) **Un exemple :** On choisit ici $n = 2$ et $f:\ [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $t \longmapsto \left|t - \dfrac{1}{3}\right|$. Calculer P_0 et $d(P_0)$.

En plus Oral ESCP 2008 2.11

Il faut noter que la notion de matrice d'un produit scalaire n'est pas du programme. Il faudra comprendre qu'il s'agit d'une matrice symétrique définie positive

Q 1. Soit $(A, B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A - B \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1} - B^{-1}$ appartient à $GL_n(\mathbb{R})$ et que
$$(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B - A)^{-1}A.$$

Q2. Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour C^{-1}.

Q3. On suppose que A et B sont les matrices de deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $B - A$ soit aussi la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $B(B - A)^{-1}A = A + A(B - A)^{-1}A$.

b) Montrer que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Quelques exercices supplémentaires en vrac.

Exercice 58 **Approximation discrète.**

$n \in \mathbb{N}$. f est une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. x_0, x_1, ..., x_p sont $p+1$ points deux à deux distincts de I. On se propose d'approximer f par une fonction polynômiale de degré au plus n. On cherche alors P dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$h(P) = \sum_{k=0}^{p} (P(x_k) - f(x_k))^2 \quad \text{soit minimale.}$$

h est donc une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^+$ dont on cherche le minimum et les "points" où ce minimum est atteint.

Q1. On considère l'application ψ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ qui à P élément de $\mathbb{R}_p[X]$ associe

$$\psi(P) = (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_p)).$$

a) Montrer que ψ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ sur $\mathbb{R}^{p+1}$.

b) En déduire qu'il existe un élément P_f de $\mathbb{R}_p[X]$ et un seul tel que : $\forall k \in [\![0, p]\!],\ P_f(x_k) = f(x_k)$.

Q2. Dans cette question $n \geqslant p$.

a) Montrer que le minimum de h existe et en donner la valeur.

b) Trouver l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ sui réalisent le minimum de h (on distinguera deux cas, $n = p$ et $n > p$).

Q3. Désormais $n < p$. On pose : $\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}_p[X])^2,\ < P, Q >= \displaystyle\sum_{k=0}^{p} P(x_k) Q(x_k)$.

a) Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_p[X]$. On notera $\|.\|$ la norme associée.

b) Montrer que pour tout élément P de $\mathbb{R}_n[X]$, $h(P) = \|P - P_f\|^2$. Résoudre le problème initial en utilisant le cours.

Exercice 59 Oral HEC 2007

Bon exercice d'entraînement

Q1. Définition et propriétés d'un produit scalaire.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique (noté $< .,. >$) et de la norme euclidienne associée (notée $\|.\|$).

Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|g(x)\|$.

Q2. Montrer que $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >=< g(x), g(y) >$.

Q3. On suppose, pour cette question seulement, que l'application f est bijective.

Montrer qu'il existe un unique endomorphisme u de E tel que $g = u \circ f$.

Montrer de plus que, pour tout x dans E, $\|u(x)\| = \|x\|$.

Q4. On ne suppose plus nécessairement que f est bijective.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g$.

b) Soit $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ une base orthonormée de $\operatorname{Im} f$ (*JF : mouais ?*).

Montrer qu'il existe une famille $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ d'éléments de E telle que, pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, $f_i = f(e_i)$.

Montrer que la famille $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ définie, pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, par $g_i = g(e_i)$ est une base orthonormée de $\operatorname{Im} g$.

c) Justifier que les familles $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ et $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ peuvent être complétées en des bases orthonormées $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ respectivement, de E.

Soit u l'endomorphisme de E tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(f_i) = g_i$.

d) Montrer que $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$ et que $g = u \circ f$.

e) L'endomorphisme u ainsi défini est-il unique ? *JF Hum, la réponse est oui ! Il faut comprendre : u est-il le seul endomorphisme de E vérifiant les deux qualités du d) ?*

Exercice 60 n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

$$\forall (P, Q) \in E^2,\ \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, \mathrm{d}t.$$

Q1. Justifier la définition de φ et montrer que c'est un produit scalaire sur E.

Q2. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \exists !\, T_k \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ T_k(\cos x) = \cos kx$.

Q3. Montrer que $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4. Montrer que T_n admet n zéros dans $]-1, 1[$. Nous noterons x_0, x_1, ...,x_{n-1} ces zéros $(1 > x_0 > x_1 > \cdots > x_{n-1} > -1)$.

Q5. Montrer que si P est un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(x_k).$$

Montrer que ceci vaut encore pour P élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (on pourra diviser P par T_n).

Exercice 61 **Endomorphisme orthogonal.**

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien E. f est un endomorphisme de E.

Q1. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

i) $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), f(y) >=< x, y >$

ii) $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est une base orthonormée de E.

iii) $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$

(on pourra se rappeler qu'il est possible d'exprimer le produit scalaire à l'aide de la norme).

Si f vérifie l'une des propriétés précédentes on dit que f est un **endomorphisme orthogonal**. Il fortement conseillé de faire le lien entre endomorphisme orthogonale et matrice orthogonale...

On retrouve cette notion d'endomorphisme orthogonal dans oral ESCP 2004 2.8, 2006 2.1, 2008 2.22, 2012 2.9.

Q2. Dans toute la suite f vérifie i). Montrer que f est un automorphisme de E et que f^{-1} vérifie également i).

Q3. $g = f - Id_E$. Montrer que $\operatorname{Ker} g$ et $\operatorname{Im} g$ sont supplémentaires et orthogonaux.

Q4. $\forall n \in N^*,\ f_n = \dfrac{1}{n}\,(Id_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1})$.

a) Calculer $f_n(y)$ pour n dans $\mathbb{N}^*$ et y dans $\operatorname{Ker} g$.

b) Si z est dans $\operatorname{Im} g$, montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f_n(z)\| = 0$.

c) Déduire de ce qui précède que, pour tout élément x de E, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ converge dans E vers un élément que nous noterons $\ell(x)$. Que dire de l'application ℓ ?

On retrouve ce thème dans oral ESCP 2004 2.12, 2008 2.18.

Exercice 62 **ESCP 2001 2.9**

Soit $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels. Pour tout $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note ${}^tA$ la matrice transposée de A.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$, on pose :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{p} x_k y_k$$

Si $x \in \mathbb{R}^p$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme euclidienne de x.

Enfin, si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$, on note $E^\perp$ l'orthogonal de E.

Q1. Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\mathrm{Im}(A) \subset [\mathrm{Ker}({}^tA)]^\perp$.

b) Montrer que $[\mathrm{Im}(A)]^\perp \subset \mathrm{Ker}({}^tA)$.

c) En déduire que $\mathrm{Im}(A) = [\mathrm{Ker}({}^tA)]^\perp$.

Q2. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{p-1} & 0 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer le noyau de ${}^tA$.

b) Montrer que tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ se décompose de manière unique sous la forme : $x = x' + Ax''$, avec $x' \in \mathrm{Ker}({}^tA)$ et $x'' \in \mathrm{Im}({}^tA)$.

On pose alors $x'' = u(x)$. Vérifier que l'on définit ainsi un endomorphisme de $\mathbb{R}^p$. Déterminer la matrice B associée à u dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

c) Montrer que AB est la matrice de la projection orthogonale sur l'image de A.

d) Calculer BA. Que constatez-vous ?

Q3. Reprendre la construction et les calculs précédents pour une matrice A quelconque de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Exercice 63 Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note E le $\mathbb{R}$- espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $< .,. >$ et de norme associée notée $\|.\|$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$, qui est orthonormée pour ce produit scalaire.

On considère l'endomorphisme f de E tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$.

On note I la matrice carrée unité d'ordre n .

Étant donnés n réels $a_1, a_2, \dots, a_n$, on pose $m = \text{Min}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ et on suppose que $m > n$.

On note d l'endomorphisme de E tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $d(e_i) = a_i\, e_i$.

On note enfin g l'endomorphisme de E défini par $g = f + d$.

Q1 a) Montrer que le vecteur $w = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ est un vecteur propre de f. A quelle valeur propre est-il associé ?

b) Déterminer $\text{Im}\, f$ et en préciser une base orthonormée.

c) Prouver que $\text{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel de E de base $\mathcal{B}' = (e_2 - e_1, e_3 - e_1, \dots, e_n - e_1)$.

d) Justifier que $\text{Im}\, f = (\text{Ker}(f))^\perp$.

e) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f, et que pour tout vecteur u de E, $\|f(u)\| \leqslant n\, \|u\|$.

Q2 a) Justifier que d est un automorphisme de E .

b) Montrer que pour tout u de E, $\|d(u)\| \geqslant m\, \|u\|$, et que pour tout v de E, $\|d^{-1}(v)\| \leqslant \dfrac{1}{m}\, \|v\|$.

c) Prouver que pour tout vecteur non nul u de E, $\|f(u)\| < \|d(u)\|$.

d) En déduire en étudiant $\text{Ker}(g)$ que l'endomorphisme g est un automorphisme de E .

Q3 Soit un vecteur v fixé de E. Il existe d'après le 2 d) un unique vecteur u de E tel que $g(u) = v$.

On considère alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de E définie par : $u_0 = v$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = d^{-1}(v) - \big(d^{-1} \circ f\big)(u_k)$.

a) Vérifier que $u = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel k : $u_{k+1} - u = -\big(d^{-1} \circ f\big)(u_k - u)$.

c) En déduire que pour tout entier naturel k : $\|u_{k+1} - u\| \leqslant \dfrac{n}{m}\, \|u_k - u\|$. Montrer enfin que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|u_k - u\| = 0$.

Exercice 64 E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. F est un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale de E sur F.
Q1. Si x est élément de E et si $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in F \times F^\perp$, on pose : $\sigma(x) = x_1 - x_2$.
a) Exprimer σ en fonction de p et Id_E.
b) Montrer que σ est un automorphisme involutif de E.
c) Montrer que : $\forall x \in E,\ \|\sigma(x)\| = \|x\|$.

Q2. q est une seconde projection orthogonale de E sur un sous-espace G de E. On pose $\sigma' = 2q - Id_E$. Montrer que :

$$\forall u \in E,\ \|p(u) - q(u)\| \leqslant \|u\|.$$

Q3. a et b sont deux vecteurs non nuls de E tels que : $\|a - b\| = \|a\| + \|b\|$.
Montrer que : $- < a, b >= \|a\|\, \|b\|$. En déduire en s'inspirant de la démonstration de Cauchy-Schwarz qu'il existe un réel strictement positif λ tel que : $b = -\lambda a$.

Q4. On suppose qu'il exite un élément non nul u de E tel que : $\|p(u) - q(u)\| = \|u\|$.
Montrer que : $\|\sigma(u) - \sigma'(u)\| = \|\sigma(u)\| + \|\sigma'(u)\|$. En déduire que : $\sigma(u) = -\sigma'(u)$.
Prouver alors que : $F \cap G^\perp \neq \{0_E\}$ ou $F^\perp \cap G \neq \{0_E\}$.

Q5. Montrer que si $\forall u \in E - \{0_E\},\ \|p(u) - q(u)\| < \|u\|$ alors $\dim F = \dim G$.

Exercice 65

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée d'un espace vectoriel euclidien $(E, < .,. >)$. On note $\|.\|$ la norme associée au produit scalaire de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Q1 Vérifier que $A^2 = I_3$. Qu'en déduire pour f ?

Q2 a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ est un plan vectoriel dont on donnera une base **orthonormée**.

Montrer que $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ est une droite vectorielle dont on donnera une base **orthonormée**.

b) Vérifier que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux.

c) En déduire que le peut trouver une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}'$ soit $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Q3 On pose pour tout n dans $\mathbb{N}^*$: $f_n = \dfrac{1}{n}\Big(\mathrm{Id}_E + f + f^2 + \cdots + f^{n-1}\Big)$.

a) En travaillant dans la base $\mathcal{B}'$, montrer qu'il existe un endomorphisme ℓ de E tel que :

$$\forall u \in E, \quad \lim_{n \to +\infty} \|f_n(u) - \ell(u)\| = 0.$$

b) Préciser la nature et les éléments de ℓ et en donner la matrice dans la base $\mathcal{B}$.

On retrouve ce thème dans oral ESCP 2004 2.12.

Exercice 66 E est un espace vectoriel euclidien de dimension n non nulle.

Q1. $p \in [\![2, +\infty[\![$. Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ une famille d'éléments de E obtusangle c'est à dire telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \ i \neq j \Rightarrow < x_i, x_j > < 0.$$

$F = \Big(\mathrm{Vect}(x_p)\Big)^{\perp}$. Pour tout i dans $[\![1, p-1]\!]$, on note y_i la projection orthogonale de x_i sur F.

Montrer que la famille $(y_1, y_2, \ldots, y_{p-1})$ est encore obtusangle.

Q2. a) Montrer qu'une famille obtusangle de E est de cardinal au plus $n+1$.

b) Montrer E possède une famille obtusangle de cardinal $n+1$.

On retrouve ce thème dans oral ESCP 2011 2.14.

Exercice 67 **Développement en série de Fourier**. ESCP 1998 1-21

E est l'ensemble des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $2\pi-$périodique. Pour tout couple (f,g) d'éléments de E on pose :

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

On pourrait sans doute se rappeler que : $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\Big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\Big]$.

Q1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E. On notera $\|.\|$ la norme associée.

Q3. Pour tout n élément de $\mathbb{N}$ on considère $c_n : x \to \cos(nx)$.

a) Montrer que si n est dans $\mathbb{N}$, c_n appartient à E.

b) p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$. Calculer $< c_p, c_q >$ (TROIS cas).

c) Montrer que $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ est une famille libre de E pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Q4. λ est un réel tel que $0 < |\lambda| < 1$ et $f : x \to \dfrac{1}{\lambda^2 - 2\lambda \cos x + 1}$.

Montrer que f appartient à E (ne pas oublier de montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$).

Q5. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}$, $a_n =< c_n, f >$.

a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+\lambda^2)a_{n+1} - \lambda(a_{n+2} + a_n) = 0$.

b) Montrer, par exemple à l'aide d'une intégration par parties, que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 (on se contentera d'utiliser le fait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 2\pi]$).

c) Déduire des deux résultats précédents l'existence d'un réel α tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \alpha\lambda^n$.

d) Calculer $(1+\lambda^2)a_0 - 2\lambda a_1$, et en déduire la valeur de α.

Q6. On pose pour tout n dans $\mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{< c_k, f >}{\|c_k\|^2}\ c_k$.

Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, la suite de terme général $S_n(x)$ est convergente et calculer sa limite (on calculera $S_n(x)$ en remarquant que $\cos(kx)$ est la partie réelle de $(e^{ix})^k$ et on passera à la limite).

Exercice 68 **Formes linéaires d'un espace vectoriel euclidien**.

Q1. E est un espace vectoriel euclidien et f est une application de E dans $\mathbb{R}$.

Montrer que f est une forme linéaire sur E si et seulement si : $\exists\,!\, u \in E,\ \forall v \in E,\ f(v) =< u, v >$.

Thème abordé dans oral ESCP 2007 2.17

Q2. $E = \mathbb{R}[X]$. On munit E du produit scalaire $< .,. >$ défini par : $\forall (P,Q) \in E^2,\ < P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$.

On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P(0)$.

a) Montrer que f est une forme linéaire sur E.

b) Montrer qu'il n'existe pas d'élément A de E tel que $\forall P \in E,\ f(P) =< A, P >$.

On pourra considérer les ploynômes $P_n = \sqrt{n}\,(1-X)^n$... *et CS.*

On retrouve ce thème dans oral ESCP 2012 2.6.

Exercice 69 **ESCP 2004 2.8 Symétrie orthogonale. Endomorphisme orthogonal.**

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, $a \in E$ de norme 1 ($n \in [\![2, +\infty[\![$).

On désigne par f_a l'application de E dans lui-même définie par : $\forall\, x \in E, f_a(x) = x - 2\langle x, a\rangle a$.

Q1. Montrer que f_a est un automorphisme de E et déterminer son automorphisme réciproque.

Q2. Montrer que f_a est diagonalisable.

Q3. Montrer que f_a est un endomorphisme orthogonal (c'est-à-dire que l'on a : $\forall (x,y) \in E^2, \langle f_a(x), f_a(y)\rangle = \langle x, y\rangle$).

Q4. Montrer que si g est un endomorphisme orthogonal de E, alors $g \circ f_a \circ g^{-1} = f_{g(a)}$.

Q5. Soit b un vecteur unitaire de E.

a) Montrer que $f_a = f_b$ si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

b) Déterminer les vecteurs unitaires c de E tels que $f_a \circ f_c = f_c \circ f_a$.
