INTEGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE 1

P mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratiques des intégrales sur un intervalle quelconque...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SF mentionne des savoirs faire.

S repère un exercice simple.

PC repère un exercice où il faut chercher.

SF 1 **Montrer la convergence d'une intégrale impropre "simple".**

SF 2 **Calculer des intégrales impropre "simples".**

SF 3 **Utiliser la condition nécessaire et suffisante de convergence d'une intégrale impropre de fonction positive.**

SF 4 **Utiliser les critères de comparaison pour les fonctions positives.**

SF 5 **PAR CŒUR :**

▲ Convergence de :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ avec $n \in \mathbb{N}$

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^n\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ avec $n \in \mathbb{N}$

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha \in]0,+\infty[$

$\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin(at+b)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(at+b)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ avec a non nul et $\alpha > 0$

▲ n appartient à $\mathbb{N}$ et α est un réel strictement positif. Existence et calcul de :

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} t^n\, e^{-\alpha\, t}\,\mathrm{d}t$ $\displaystyle\int_{0}^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$ $\displaystyle\int_{0}^{1} t^n\, \ln t\,\mathrm{d}t$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\, t}\, \sin t\,\mathrm{d}t$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha\, t}\, \cos t\,\mathrm{d}t$

▲ α et β sont deux réels. Nature de :

$\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,(\ln t)^\beta}$ $\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha\,(|\ln t|)^\beta}$ $\displaystyle\int_{0}^{1} t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ $\displaystyle\int_{0}^{1} (-\ln t)^\alpha\,(1-t)^\beta\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t$ $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t$ $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} (\ln t)^x\, t^y\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$

SF 6 **Utiliser l'intégration par parties pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale impropre.**

SF 7 **Utiliser un changement de variable pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale impropre.**

SF 8 **Utiliser les densités de probabilité du programme pour obtenir la nature ou la valeur d'une intégrale impropre.**

Complément 1 : Intégrales de Bertrand.

Complément 2 : Intégrale de Dirichlet.

Complément 3 : Fonction bêta.

Quelques rappels.

► Les références.

1. a et α sont deux réels. On suppose que a est strictement positif.

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

2. b et α sont deux réels. On suppose que b est strictement négatif.

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1}$$

1. b et α sont deux réels. On suppose que b est strictement positif.

$$\boxed{\int_0^{b} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

2. b et α sont deux réels. On suppose que b est strictement négatif.

$$\boxed{\int_b^{0} \frac{\mathrm{d}t}{|t|^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

a, h et α sont trois réels. On suppose que h est strictement positif.

$$\boxed{\int_a^{a+h} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

$$\boxed{\int_{a-h}^{a} \frac{\mathrm{d}t}{(a-t)^\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1}$$

Si x est dans $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

Si $n \in \mathbb{N}$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{n}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $n!$.

Si λ est un réel strictement positif, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda\, t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{\lambda}$.

Si n est un élément de $\mathbb{N}$ et si α est un réel strictement positif, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-\alpha\, t}\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{n!}{\alpha^{n+1}}\cdot$

Si b et ν sont deux réels strictement positifs : $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}\, e^{-\frac{t}{b}}\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $b^\nu\, \Gamma(\nu)$.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$ convergent et valent $\sqrt{2\,\pi}$.

▶ Le cas des fonctions positives.

Le théorème fondamental

SD $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. Soit f une application de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ **positive** (★★) et continue sur $[a,b[$.

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x \to \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge : $\forall x \in [a,b[,\ 0 \leqslant \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
- **P** Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors : $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$.

Th. 1 $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. Soit f une application de $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ **positive** (★★) et continue sur $]a,b]$.

- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x \to \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $]a,b]$
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge : $\forall x \in]a,b],\ 0 \leqslant \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$
- **P** Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors : $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$

Comparaison 1 : majoration ou minoration.

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a,b[$.

On suppose qu'il existe un élément c de $[a,b[$ tel que : $\forall t \in [c,b[,\ \boxed{0} \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ (★★)

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

$-\infty \leqslant a < b < +\infty$. f et g sont deux applications de $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues.

On suppose qu'il existe un réel c tel que : $\forall t \in]a,c],\ \boxed{0} \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ (★★)

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

★★ Le principe des deux théorèmes précédents est **la comparaison des fonctions** pas des intégrales. Il ne faut donc pas les confondre avec le théorème fondamental.

Comparaison 2 : les équivalents.

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose que :

1. Il existe un réel c tel que $\boxed{\text{l'une des deux fonctions soit positive sur } [c, b[}$ ★★
2. $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$.

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

On a un résultat analogue sur $]a, b]$.

La convergence absolue.

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

On suppose que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

ALORS : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ (★)

On a un résultat analogue sur $]a, b]$.

Remarque ★★ La réciproque est fausse ; une intégrale peut être convergente sans être absolument convergente ; elle est alors semi-convergente.

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente et il convient de savoir le démontrer.

Remarque ★★ $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

Il importe de se convaincre que l'inégalité $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ ne peut être écrite que si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Qu'on se le dise et que l'on se le vérifie.

Remarque **PP** $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. f est une application de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $[a, b[$.

Si f garde un signe constant sur $[a, b[$ ou sur un voisinage de b, $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Comparaison 3 : la négligeabilité.

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose que :

1. il existe un réel c tel que : $\boxed{\forall t \in [c, b[,\ g(t) \geqslant 0}$ (★★)
2. $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de b.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

On a un résultat analogue sur $]a, b]$.

★★★ Notons que de 2005 à 2012 le programme du résulat du programme était :

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. f et g sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $[a, b[$.

On suppose que :

1. il existe un réel c tel que : $\boxed{\forall t \in [c, b[,\ f(t) \geqslant 0 \ \boxed{\text{et}}\ g(t) \geqslant 0}$ (★★)
2. $f = \mathrm{o}(g)$ au voisinage de b.

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

Ce résultat est largement contenu dans le précédent. Dans les corrections d'avant 20013 c'est celui qui est utilisé. Qu'on se le dise.

Les corrections qui suivent ont été écrites avant 2013 donc utilisent ce résulat. Il faut donc faire l'effort de traduire avec le nouvel énoncé. Désolé...

★★★ Il est absolument indispensable de mentionner clairement l'hypothèse de posivité en utilisant ces critères de comparaison. Toute omission à ce niveau rendra nulle votre solution.

► Intégration par parties.

$-\infty < a < b \leqslant +\infty$. u et v sont deux applications de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$.

(★) On suppose que $\boxed{uv \text{ admet une limite finie à gauche en } b}$.

Alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence :

$$\boxed{\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} [u(x)v(x)] - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t}$$

On a des résultats analogues sur $]a, b]$ et sur $]a, b[$.

★★ Le programme dit : **"on effectuera une intégration par parties sur un segment et on fera un passage à la limite" on s'abstiendra donc de faire des intégrations par parties sur des intégrales impropres.**

PP Non seulement il faut être capable d'utiliser une intégration par parties pour calculer une intégrale impropre mais il faut être capable de justifier la convergence d'une intégrale impropre en utilisant une intégration par parties.

► Changement de variable.

Le résultat du programme $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty$.

f est une application continue de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$. φ est une bijection strictement croissante de $]\alpha, \beta[$ sur $]a, b[$, de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi'(t)\, f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

En cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \varphi'(t)\, f\big(\varphi(t)\big)\,\mathrm{d}t$.

Énoncé analogue lorsque φ est décroissante.

Remarque Ce théorème n'a que peu d'intérêt dans la mesure où il ne recouvre pas directement toutes les situations usuelles.

PP **Ne pas faire de changement de variable sur une intégrale impropre. Toujours revenir à des intégrales sur un segment.**

PP Non seulement il faut être capable d'utiliser un changement de variable pour calculer une intégrale impropre mais il faut être capable de justifier la convergence d'une intégrale en utilisant un changement de variable.

Exercice 1 **S** **Des calculs simples.**

Montrer l'existence et donner la valeur de :

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$; b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$; c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\, t}\,\mathrm{d}t$ $(\alpha > 0)$; d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{e^t + a}$ $(a > 0)$;

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(x\,e^t+1)(y\,e^t+1)}\,\mathrm{d}t$ $(x > 0$ et $y > 0)$ oral ESCP 2011 1.5.

Exercice 2 **S** **Nature d'une intégrale impropre.**

Étudier la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\,\sqrt{t^2-4}}$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^3-1}\,\mathrm{d}t$; c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t^3-t^2}}$; d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - e^{-\frac{1}{t^2}}\right)\mathrm{d}t$; e) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 **S** **Nature d'une intégrale impropre.**

Étudier la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\sin\left(\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin t\,\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$; c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\ln t}}$; d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{t})}{t\,\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$; e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{\ln(1-t)}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 **S** **Nature d'une intégrale impropre. Déjà Bertrand.**

Étudier la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,\ln t}$; b) $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$; c) $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$; d) $\displaystyle\int_0^{\frac12} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ln t}$;

e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\,\ln t}$; f) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$; g) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$; h) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2\,\ln t}$.

Exercice 5 **S** **Nature d'une intégrale impropre.**

Étudier la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$; b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{t^2}}{\ln(1+\sqrt{t})}\,\mathrm{d}t$; c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - t\,\arctan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$; d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\,\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$;

Exercice 6 **S** **Nature d'une intégrale impropre à paramètres.**

α est un réels Étudier la nature de :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^\alpha}$; c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$; d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{t-t^\alpha}\,\mathrm{d}t$; e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin t)^t - t^t}{(\tan t)^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7 **S** **Nature d'une intégrale impropre à paramètres. Oral ESCP 2001 1.11**

α et β sont deux réels. Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t$.

Représenter dans $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des points de coordonnées (α, β) tels que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 8 **S** **Nature d'une intégrale impropre à paramètres.**

α et β sont deux réels strictement positifs. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha\,\ln(1+\frac{1}{t^\beta})\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9 **S** **Nature d'une intégrale impropre à paramètres. Fonction bêta.**

► *Incontournable.*

α et β sont deux réels. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$.

Voir oral ESCP 2012 1.4.

Exercice 10 **PC** **Nature d'une intégrale impropre à paramètres.**

α et β sont deux réels. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^{\alpha}\,(1-t)^{\beta}\,\mathrm{d}t$.

Voir oral ESCP 2002 1.19 ou le sujet 6.

Exercice 11 **En vue des produits scalaires usuels.**

▶ *Incontournable.*

Q1. Soit f une application continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. R appartient à $\mathbb{R}[X]$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(t)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Exercice 12 **S** **En vue des produits scalaires usuels again.**

E est l'ensemble des applications continues f de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$.

Q1. Montrer que si f et g sont deux éléments de E, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Q2. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (pour les opérations usuelles sur les fonctions numériques...)

Exercice 13 **PC** **QSP HEC 2005. Intégrales impropres et séries. Utilisation du théorème fondamental sur la convergence des intégrales impropres de fonctions positives et sur la convergence des séries à termes positifs.**

X est une variable aléatoire de densité f nulle sur $]-\infty,0[$ et continue sur $[0,+\infty[$. On pose $Y=\mathrm{Ent}\,(X)$ (partie entière...)

Montrer que X possède une espérance si et seulement si Y possède une espérance.

Exercice 14 **PC** **Intégrale de Bertrand**

▶ *Apprendre le résultat et la pratique.*

Étudier la nature de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}\,(\ln t)^{\beta}}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha}\,(|\ln t|)^{\beta}}$.

Exercice 15 **S** **Nature d'une intégrale impropre à paramètres. Bertrand toujours.**

p est dans $\mathbb{N}$ et x est dans $\mathbb{R}$. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^p\,t^{x-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

▶ *Sans doute utile pour parler des dérivées de la fonction* Γ.

Exercice 16 **S** **Intégration par parties**

Q1. Existence et valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

Q2. Existence et valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q3. Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17 **S** **Intégration par parties**

α est un réel strictement positif et β est un réel.

Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\,t}\,\sin(\beta\,t)\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\,t}\,\cos(\beta\,t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 18 **S** **Intégration par parties**

α est un réel. Étudier l'existence de $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha\,\ln t\,\mathrm{d}t$ et là calculer le cas échéant.

Exercice 19 **S** **Intégration par parties. Vers les moments d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.**

► *Classique, sans doute à faire.*

On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que I_n existe pour tout élément n de $\mathbb{N}$.

Q2. Montrer que si n est impair, I_n est nulle.

Q3 a) p est élément de $\mathbb{N}$. Exprimer I_{2p+2} en fonction de I_{2p}.

b) En déduire la valeur de I_{2p} pour tout élement p de $\mathbb{N}$ (on rappelle que $I_0 = \sqrt{2\pi}$).

Exercice 20 **PC** **Intégration par parties. Endomorphisme de polynômes.**

Soit u l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ associe $u(P)$ défini par : $\forall\,x \in \mathbb{R},\ u(P)(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t} P(t)\,dt$.

Montrer que u est un endomorphisme de E.

Contenu dans oral ESCP 2001 2.14. Dans LYON 1990 Pb 1 on traite de "$P \to \left[e^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^t\,P(t)\,\mathrm{d}t\right]$".

Exercice 21 **PC** **Intégration par parties. Intégrale de Dirichlet.**

► *Très classique. À savoir faire.*

α, β, et γ sont trois réels. On suppose que α est non nul.

Q1. a) Montrer que si $\gamma > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

b) Montrer que si $0 < \gamma \leqslant 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t+\beta)}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais n'est pas absolument convergente (on pourra remarquer que $|\sin u| \geqslant \dfrac{1-\cos(2u)}{2} \geqslant 0$).

c) Conclure cette première question.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente mais n'est pas absolument convergente.

Q3. γ est un réel strictement négatif. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$ divergent (considérer $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}+k\,\pi}^{\frac{\pi}{3}+k\,\pi} \frac{\sin t}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$ et...).

Et si $\gamma = 0$?

Q4. Faire le point sur la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\gamma}\,\mathrm{d}t$.

On trouve l'intégrale de Dirichlet, par exemple dans LYON 1984, LYON 2004 PB 1, oral ESCP 2000 1-6, ESCP 2000 1-12, ESCP 2010 1.19

Exercice 22 **PC** **Intégration par parties.**

f est une application continue de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que si $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 23 **PC** **Intégration par parties.**

f est une application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f''^2(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,f''(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge (on pourra raisonner par l'absurde).

Exercice 24 **PC** **Intégration par parties. Condition nécessaire et suffisante de convergence d'une intégrale impropre de fonction positive.**

f est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

On suppose que $f(0) = 0$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(f'(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$ converge.

Q1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{1} \frac{f^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (on pourra montrer que $A \to \displaystyle\int_1^{A} \frac{f^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est majorée en utilisant une intégration par parties et ...).

Exercice 25 **S** **Changement de variable**.

Q1. Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2 - t}}$ $(u = \dfrac{1}{t})$.

Q2. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$ $(u = \sqrt{1-t})$.

Q3. Existence et calcul de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^3 \ln t}{(1+t^4)^3}\,\mathrm{d}t$ $(u = t^4)$.

Q4. Calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (\cos t)^2}$ $(u = \tan t)$ contenu dans oral ESCP 2007 1.3.

Q5. $x \in]0, 1[$. Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t$ $(u = \cdots)$ contenu dans oral ESCP 2011 1.8.

En plus Existence et calcul de :

a) $\displaystyle\int_0^{1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}}\right)\mathrm{d}t$ $(u = \sqrt{1-t^2}$, R. : $-\ln 2)$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-t}}$ $(u = 1/t$, R. : $2)$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}$ ($t = \tan\theta$), R. : $\pi/4$) d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, \ln(\tan t)\,\mathrm{d}t$ ($u = \sin t$, R. : $-\ln 2$)

Exercice 26 **S** **Changement de variable. Dans ESCP 2012 1.10.**

Trouver le domaine de définition de $F : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et montrer que la courbe représentative de F admet un axe de symétrie ($u = \frac{1}{t}$).

Exercice 27 **S** **Changement de variable.**

n est un élément de $\mathbb{N}$ et α est un réel strictement positif.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-\alpha\, t}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{n!}{\alpha^{n+1}}$.

Exercice 28 **S** **Changement de variable.**

Q1. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q2. α est un réel. Étudier la nature de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}\,\mathrm{d}t$ (faire très simple).

Q3. α est un réel tel que J converge. Montrer $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^\alpha}{(1+u^2)(1+u^\alpha)}\,\mathrm{d}u$ existe et vaut J.

En déduire la valeur de J (calculer $2J$! !).

Exercice 29 **S** **Changement de variable.**

Q1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. Montrer que $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t$ et $K = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2\,t))\,\mathrm{d}t$ convergent et sont égales à I.

Q3. Montrer $I = J = K = -\dfrac{\pi \ln 2}{2}$ (on pourra faire intervenir $I + J$)

On trouve cela dans ESCP MI 1995. Dans oral ESCP 2004 on étudie $x \to \displaystyle\int_0^x \ln\left(2\,\sin\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$.

Exercice 30 **S** **Changement de variable.**

$n \in [\![2, +\infty[\![$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t+\sqrt{t^2-1})^n}$ converge et vaut $\dfrac{1}{n^2-1}$ ($u = (t + \sqrt{t^2-1}...$)

Figure dans l'oral ESCP 1994 1.3

Exercice 31 **S** **Changement de variable.**

Q1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut 0.

Q2. a est un réel strictement positif. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\dfrac{\pi \ln a}{2\,a}$.

Exercice 32 **S** **Changement de variable.**

Q1. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. x est un élément de $]0,1[$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \ln 2$. En déduire I.

Thème abordé dans EDHEC 1996 ex1.

Exercice 33 **PC** **Changement de variable**.

Q1. α est un réel. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > -1$.

Q2 $\alpha \in]-1,+\infty[$ et $x \in]0,1[$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t^\alpha - 1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Calculer $\displaystyle\int_x^{x^{\alpha+1}} \frac{1}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$ et en déduire que $I_\alpha = \ln(\alpha+1)$

Exercice 34 **S** **Changement de variable éventuel. Utilisation des densités usuelles.**

► *Technique à dominer.*

a, b et c sont trois réels. On suppose que a est strictement positif.

Montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2+bt+c)}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$.

Figure dans HEC MII 2004. Dans HEC MII 2008 on trouve $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2+bt}\,\mathrm{d}t$

Exercice 35 **S** **Changement de variable. Intégration par parties.**

α et β sont deux réels strictement positifs.

Q1 Éudier la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{t^\beta}\right)\mathrm{d}t$.

Q2. Calculer I lorsque $\beta = 2(1+\alpha)$... $\left(\frac{\pi}{\alpha+1}\right)$.

Exercice 36 **S** **Intégration par parties. Changement de variable.**.

p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$.

Q1. Montrer l'existence de $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 t^p\,(\ln t)^q\,\mathrm{d}t$.

Q2. Calculer $I(p,q)$ en utilisant l'intégration par parties.

Q3. Retrouver le résultat de Q2 en utilisant le changement de variable $u = -(p+1)\ln t$.

Exercice 37 **S** **Intégration par parties. Changement de variable. Fonction bêta again**.

► *Très classique. À savoir faire.*

Q1. α et β sont deux réels.

Montrer que $B(\alpha,\beta) = \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1}\,(1-t)^{\beta-1}\,\mathrm{d}t$ existe si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Q2. α et β sont deux réels strictement positifs.

a) Montrer que $B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$.

b) Exprimer $B(\alpha,\beta+1)$ en fonction de $B(\alpha+1,\beta)$.

c) Montrer que $B(\alpha+1,\beta)+B(\alpha,\beta+1)=B(\alpha,\beta)$.

d) Montrer alors que $B(\alpha+1,\beta)=\dfrac{\alpha}{(\alpha+\beta)}\,B(\alpha,\beta)$.

Q3. p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}$. Montrer que $B(p+1,q+1)=\dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}\cdot$

Q4. Calculer $B(x,n+1)$ pour x dans $]0,+\infty[$ et n dans $\mathbb{N}$.

Q5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.

a) Pour tout réel u tel que $0\leqslant u<1$, montrer que $\ln(1-u)\leqslant -u$. *(<1 ok ?)*

En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0,n]$, l'inégalité : $\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\leqslant e^{-t}$.

b) Étudier les variations de la fonction φ définie sur $[0,\sqrt{n}[$ qui, à tout réel t de $[0,\sqrt{n}[$ associe :

$$\varphi(t)=\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)-t-n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right).$$

Établir, pour tout réel t de $[0,\sqrt{n}]$, l'inégalité :

$$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)e^{-t}\leqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^n.$$

Montrer, en deux lignes, que ceci vaut encore pour t dans $[0,n]$.

c) Justifier, pour tout réel t de $[0,n]$, les inégalités :

$$e^{-t}-\frac{t^2}{n}\,e^{-t}\leqslant\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\leqslant e^{-t}.$$

En déduire *proprement et simplement* que, pour tout réel x strictement positif :

$$\boxed{\Gamma(x)=\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t.}$$

Q6. Montrer que : $\boxed{\Gamma(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^x\,n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\cdot}$

On trouve le résultat de Q5 dans HEC 1984, oral ESCP 2012 1.4. On trouve le résultat de Q6 dans HEC 2005 MI, oral ESCP 2012 1.4, dans le problème d'ECRICOME 1998.

Dans ESSEC 1994 MI on trouve Q1, Q2 et $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\cdot$

Exercice 38 **PC** **Intégration par parties. Changement de variable. Oral ESCP 1999 1-17.**

► *Classique. Bon entraînement*

Q1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$ converge. On note ℓ sa valeur.

Q2. Soit x un réel strictement positif. Montrer que : $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t=-\ln x+\ell+\int_0^x\frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (on commencera par justifier l'existence des intégrales).

En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t+\ln x\right)$.

Q3 a) Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$ existe et la calculer (en intégrant entre x et $+\infty$ et en utilisant Q2).

Q4. Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Thème abordé dans LYON 2009 Pb 1, oral ESCP 2001 1.10, 2005 1.3, 2010 1.2, 2013 1.7.

Exercice 39 **PC** **Changement de variable.**

a et b sont deux réels strictement positifs.

f est continue sur $]0,+\infty[$, admet une limite finie ℓ en 0 et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at)-f(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\ell \ln \dfrac{b}{a}\cdot$

Application. Montrer l'existence et trouver la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)-\arctan(2t)}{t}\,\mathrm{d}t$ (attention piège à c.).

Thème abordé dans oral ESCP 2001 1.10, 2010 1.2

Exercice 40 **S** **Intégration par parties. Changement de variable. Calcul de l'intégrale de Dirichlet.**

► *Bon entraînement.*

Q1. Montrer que si f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$: $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(\alpha t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Q2. Montrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q3. Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que la suite de terme général I_n est constante.

Q4. Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(I_n - J_n) = 0$.

En déduire que

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}}$$

On calcule l'intégrale de Dirichlet dans LYON 1984, LYON 2004 PB 1, oral ESCP 2000 1-6, ESCP 2000 1-12, ESCP 2010 1.19.

Exercice 41 **PC** **Changement de variable. Intégration par parties. Un contre-exemple important.**

Q1. Montrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Q2. Montrer que $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ est de même nature que $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Q3. Montrer la convergence de K, J et I.

Q4. Montrer que $t \to \sin(t^2)$ n'a pas de limite en $+\infty$ (construire deux suites qui tendent vers $+\infty$ dont les images par f n'ont pas la même limite).

Q5. Montrer que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

En plus $n \in [\![2,+\infty[\![$. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente. Contenu dans oral ESCP 1995 2.17.
