INTEGRATION SUR UN INTERVALLE QUELCONQUE 2

P mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratiques des intégrales sur un intervalle quelconque...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire ou des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SF mentionne des savoirs faire.

S repère un exercice simple.

PC repère un exercice où il faut chercher.

SF 9 **Écrire une intégrale impropre comme somme d'une série.**

SF 10 **Permuter une somme infinie et une impropre ou intégrer une série de fonction sur un intervalle quelconque.**

Deux mots sur le sujet. $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale impropre (ou pas...) convergente. Le plus souvent :

- On écrit f comme somme de la série de fonctions de terme général u_n. On alors $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$.
- On justifie que $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour cela, le plus souvent on montre que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{p} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Ce qui revient à montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_a^b \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$ ou que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \int_a^b \left(f(t) - \sum_{n=n_0}^{p} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = 0$.

Il conviendra évidemment de justifier toutes les convergences de série et d'intégrale.

Exercice 1 **S** **Intégrale impropre comme somme de série 1.**

Q1. Montrer que la fonction $g : x \to \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ est prolongeable en une fonction f continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer, en utilisant des inégalités classiques que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$ converge.

Q3. p est dans $\mathbb{N}$. Montrer l'existence et calculer $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} \sin t\,\mathrm{d}t$... $\frac{1}{1+(p+1)^2}$

Q4. Prouver que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (donner une forme intégrale aux sommes partielles et passer à la limite en utilisant Q1.).

Exercice 2 **S** **Intégrale impropre comme somme de série 2.**

Q1. x est un réel strictement positif et p un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer l'existence et calculer $I_p(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, t^{p-1}\,\mathrm{d}t$.

Q2. p est un élément de $[\![2, +\infty[\![$.

a) Montrer que pour tout réel $t : e^t - 1 \geqslant t$.

b) Montrer que, pour tout élément q de $\mathbb{N}^*$, $u_q = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-qt}t^{p-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

Montrer que la suite de terme général u_q converge vers zéro.

c) Déduire de ce qui précède que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

On trouve cela dans LYON 1983, ESCP MI 1995, oral ESCP 2006 1.7. On trouve le cas $p = 2$ dans ECRICOME 2000 Ex 2, dans l'oral ESCP 1994 1.13

Exercice 3 **PC** **Intégrale impropre comme somme de série 3.**

Q1. Trouver le domaine de définition des trois fonctions suivantes :

$$\boxed{f : x \to \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t} \quad \boxed{g : x \to \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}} \quad \boxed{h : x \to \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,\mathrm{d}t}$$

Q2. x est un réel strictement positif. Pour tout réel t strictement positif $\varphi(t) = \dfrac{t^x}{e^t - 1}$.

Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout rél t strictement positif :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-t}t^x e^{-kt} + \varphi(t)e^{-nt}$$

.

Q3. On se propose de montrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ converge vers zéro en utilisant la définition. Soit ε un réel strictement positif.

a) Montrer que l'on peut trouver un réel α strictement positif tel que : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon/2$.

b) Montrer que φ est bornée sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$ (utiliser sa limite en $+\infty$).

En déduire que la suite de terme général $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \varphi(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ converge vers zéro. Conclure proprement.

Q4. Montrer en utilisant ce qui précède que, pour tout réel x strictement positif : $f(x) = g(x+1)h(x+1)$.

C'est à dire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x\,\mathrm{d}t = \zeta(x+1)\,\Gamma(x+1)$ où $\zeta = g$...

On trouve cela dans l'oral ESCP 2007 1.17

Exercice 4 **S** **Intégrale impropre comme somme de série 4.**

Q1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*},\ \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-\alpha\, t}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ (on se ramènera à Γ).

Q2. Montrer que pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$, $I_k = \displaystyle\int_0^1 t^k(\ln t)^k\,\mathrm{d}t$ converge et vaut : $\dfrac{(-1)^k k!}{(k+1)^{k+1}}$ (on pourra penser à poser $u = -\ln t$).

Q3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$.

On trouve cela dans ECRICOME 1997 Ex 2. Dans ECRICOME 1994 Ex 2 on trouve $\displaystyle\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^k}$ *ainsi que dans l'oral ESCP 1998 1.16*

En plus Pour mettre tout le monde d'accord, montrer que pour tout réel α strictement positif :

$$\int_0^1 t^{\alpha\, t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\,\alpha^{k-1}}{k^k} \quad !$$

Exercice 5 **PC** **Intégrale impropre comme somme de série 5. D'après ESCP 1994 1.4.**

Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 t^n \sin(\pi\, t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 6 **PC** **Intégrale impropre comme somme de série 6. ESCP 2000 1-7.**

Q1. Pour $x \in [0,1[$, on pose $h(x) = \ln(1-x)$

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée $p^{\text{ème}}$ de h.

b) Soit x un élément de $]0,1[$. On pose $\forall t \in [0,x],\ \varphi_x(t) = \dfrac{t-x}{t-1}\cdot$ Étudier les variations de φ_x.

c) Montrer que, pour tout p dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $[0,1[$: $\displaystyle\left| h(x) + \sum_{k=1}^{p} \frac{x^k}{k} \right| \leqslant x^p\,|\ln(1-x)|$.

Q2. Montrer que la fonction $x \mapsto g(x) = \ln(x^2)\,\ln(1-x^2)$ est bornée sur l'intervalle $]0,1[$.

Q3. a) Justifier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{\ln\left(x^2\right)\,\ln\left(1-x^2\right)}{x^2}dx$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, après en avoir justifié la convergence, calculer : $\displaystyle I_n = -\int_0^1 \frac{x^{2n}\,\ln\left(x^2\right)}{n+1}dx$.

c) Montrer que : $\displaystyle J = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)\,(2n+1)^2}\cdot$

Q4. A-t-on : $\displaystyle(\forall x \in [0,1[) \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$?

On trouve encore :

$\displaystyle\int_0^1 -\frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ dans oral ESCP 1996 2.12 et ECRICOME 1996 Pb ;

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k\,\alpha}$ dans oral ESCP 1996 2.28 ;

$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x}$ dans oral ESCP 1997 1.5 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 4\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ dans oral ESCP 1998 1.19 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^4} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^k}$ dans oral ESCP 1999 1-11 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t\,(t+\sin t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^k dt$ dans oral ESCP 2001 2.24 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}\,k!}{x^k}$ dans oral ESCP 2002 1.28 ;

$\displaystyle\int_0^{1} -\frac{\ln(1-t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\,u_k$ avec $\displaystyle u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ dans oral ESCP 2003 1.3 ;

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^{n+1}}{1-t^2}\,\mathrm{d}t\,\ln t = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2k+2)^2}$ dans oral ESCP 2003 1.6 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^t-e^{-t}}{e^{nt}-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{k^2\,n^2-1}$ dans oral ESCP 2003 1.11 ;

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^2\,\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ dans oral ESCP 2004 1.17 ;

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^{xt}-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\,\frac{x^k}{k\,(k+1)^k}$ dans oral ESCP 2005 1.4 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\,\frac{e^{-t}}{1+e^{-2t}}\,\mathrm{d}t = (2n)!\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{2n+1}}$ dans oral ESCP 2005 1.10 ;

$\displaystyle\int_0^{1} t^{-x}\,\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1-x}$ avec $a_0=1$, $a_1=\dfrac{1}{2}$ et $\forall k\in[\![2,+\infty[\![$, $\displaystyle(-1)^{k-1}\,\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-3)}{2^k\,k!}$, dans oral ESCP 2006 1.6 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-2t})\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k^2}$ dans oral ESCP 2006 1.19 ;

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^{\alpha}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+k\,\alpha}$ dans oral ESCP 2009 1.6 et dans LYON 2000 Pb 2 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3\,e^{-t}}{(1-e^{-t})\,\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2}\int_0^{+\infty}\frac{t^3\,e^{-t}}{\sqrt{k^4+t^4}}\,\mathrm{d}t\right)$ dans oral ESCP 2009 1.8 ;

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ dans ESSEC 1986 MI.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\,t}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,\alpha^{2k+1}}$ dans EDHEC 1994 ex 2 ;

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2+t^3} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left((-1)^{k-1}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^k}\right)$ dans LYON 1991 Pb 2 et dans oral ESCP 2004 1.6 ;

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ dans ECRICOME 1996 Pb et dans lyon 2007 Pb 1 ;

$\displaystyle\int_0^{1} \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}$ dans LYON 2010 Pb 2.

SF 11 **Étudier des fonctions définies par une intégrale impropre.**

Exercice 7 **S** **Étude d'une fonction définie par une intégrale impropre 1. Oral ESCP 1994 1.5.**

Q1. Trouver le domaine de définition de $f : x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t$.

Montrer que f est dérivable sur son domaine et calculer f'. Étudier les variations de f.

Q2. Trouver les limites de f aux bornes de son domaine.

Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x}}{x}\cdot$

Montrer $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t}\, \mathrm{d}t \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

Q3. Montrer que f prolongée pour $x < 0$ est "la" densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X dont on déterminera le moment d'ordre n pour tout entier naturel n.

On trouve encore cela dans oral ESCP 2007 1.19, 1998 1.10.

Exercice 8 **S** **Étude d'une fonction définie par une intégrale impropre 2.**

Q1. Trouver le domaine de définition de $F : x \to \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\, \mathrm{d}t$.

Q2. Montrer que F est dérivable sur son domaine et calculer F'.

Q3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xF(x) = 0$.

Q4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\, \mathrm{d}t$ converge et vaut $1 - F(0)$ (intégrer par parties entre 0 et A).

Exercice 9 **S** **Étude d'une fonction définie par une intégrale impropre 3. Edhec 2004 Ex. 2**

Q1. On pose, lorsque c'est possible, $\quad f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{x+1}}\cdot$

Montrer que le domaine de définition de la fonction f est $]0, +\infty[$.

Q2. Montrer que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Q3. a) Justifier l'existence de la quantité $g(x)$ définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^x)}\cdot$

b) Pour tout x de $]0, +\infty[$ et pour tout t de $[1, +\infty[$, simplifier $\dfrac{1}{t} - \dfrac{t^{x-1}}{1+t^x}$, puis établir que : $\forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) = \dfrac{\ln 2}{x}\cdot$

c) En déduire que : $\quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln 2}{x}$, puis déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Q4. a) Montrer que : $\quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad 0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$.

b) En déduire la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ ainsi qu'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0^+.

Q5. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 10 **S** **Étude d'une fonction définie par une intégrale impropre 4. Oral ESCP 1994 1.7.**

$f : x \to \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(1+t)}\, \mathrm{d}t$.

Q1. Trouver le domaine de f.

Q2. Montrer que f est positive et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{1}{2x} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

En déduire les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Q4. Montrer que pour tout réel x strictement positif : $f(x)+f(x+1)=\dfrac{1}{x}$. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

Q5. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{2x}\cdot$

Q6. Montrer que pour n élément de $[\![2,+\infty[\![$: $f(n)=(-1)^{n-1}\ln 2-\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{k}\cdot$

En déduire la convergence et la somme de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}\cdot$

Exercice 11 **PC** **Étude d'une fonction définie par une intégrale impropre 5. Oral ESCP 2006 1.18**.

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par : $f(x)=\displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Q1. Déterminer le domaine de définition D de f.

Q2. Étudier le sens de variation de f sur D.

Q3. Déterminer les limites de f aux bornes de D.

Q4. a) Calculer $f(0)$.

b) Établir une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$.

c) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers la borne supérieure de D.

Exercice 12 **PC** **Étude d'une fonction définie par une intégrale impropre 6. Oral ESCP 2001 1.15**.

Q1. Montrer que $P=X^5-X+1$ n'a qu'une racine réelle et que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

On note a l'unique racine réelle de P.

Q2. Trouver le domaine de définition de $f : x \to \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{1}{P(t)}\,\mathrm{d}t$. Déterminer les variations de f et étudier f aux bornes de son domaine.

Q3. Trouver un équivalent simple de f en $+\infty$ et en a.

Exercice 13 **PC** **Etude d'une fonction définie par une intégrale impropre 7. ECRICOME 2009 Ex 2**.

Le but de l'exercice est l'étude de la fonction f définie par la formule suivante : $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Domaine de définition de f :

(a) Justifier que pour tout réel a strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$ est convergente et donner sa valeur.

(b) Soit x un réel fixé. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2t}\,\sqrt{1+x^2\,e^{2t}}\,\mathrm{d}t$.

Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et elle est clairement paire. On va l'étudier sur $[0,+\infty[$.

2. Branche infinie de la courbe représentative de f :

(a) Vérifier l'encadrement suivant, pour tout réel x strictement positif et pour tout réel t positif ou nul :

$$x\,e^t \leqslant \sqrt{1+x^2\,e^{2t}} \leqslant x\,e^t + \frac{e^{-t}}{2x}\cdot$$

(b) Prouver que, pour tout réel x strictement positif, on a : $x \leqslant f(x) \leqslant x + \dfrac{1}{6x}\cdot$

(c) Préciser la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

3. Dérivabilité et monotonie de f :

(a) À l'aide du changement de variable $u = x\,e^t$, que l'on justifiera, prouver la formule suivante lorsque x est un réel strictement positif :

$$f(x) = x^2 \int_x^{+\infty} \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^3}\,\mathrm{d}u.$$

(b) Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée est donnée, pour tout réel x strictement positif, par :

$$f'(x) = \frac{2\,f(x) - \sqrt{1+x^2}}{x}\cdot$$

(c) Justifier, pour tout réel x strictement positif, l'égalité suivante : $2\,f(x) = \sqrt{1+x^2} + x^2 \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}}\cdot$

4. Étude locale de f et de f' en 0 :

(a) Justifier que la formule suivante est valable pour tout réel x strictement positif :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u\,\sqrt{1+u^2}} = -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int_x^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$$

et que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u\,\ln u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}u$ est convergente

(b) À l'aide des questions précédentes, démontrer que l'on a : $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x\,\ln x$ et $f(x) - \dfrac{1}{2} \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{x^2\,\ln x}{2}\cdot$

(c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et préciser la valeur de $f'(0)$.

Exercice 14 **Limite de l'intégrale et intégrale de la limite...**

quad $f : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Q1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ (on pourra intégrer par parties). Montrer que f est impaire sur $\mathbb{R}$.

Q2. On rappelle que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}$. Soit x un réel strictement positif.

Montrer que : $|f(x) - I| = |x \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u(u+x)}\,\mathrm{d}u| \leqslant x \int_0^1 \frac{1}{u+x}\,\mathrm{d}u + x \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$.

En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}\cdot$ Morale ?

Exercice 15 **Version courte** **PC** **Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.** **Oral ESCP 1997 1.24**.

f est une fonction continue sur $[0,1]$. Pour tout élément x de $]0,1]$ on pose :

$$g(x) = \ln x \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\ln t\,\mathrm{d}t$$

Q1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$.

Q2. Montrer que g se prolonge en une fonction $\widehat{g}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Préciser $\widehat{g}(0)$.

Q3. Ici : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \sqrt{x}$. $\widehat{g}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$?

Exercice 15 **Version longue** **PC** **Prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.**

E est l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Dans les questions 1, 2 et 3, f est un élément de E.

Q1. a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

b) Montrer que $x \to \ln x \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet pour limite 0 en 0.

Q2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \ln t\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Dans la suite on pose $I(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\ \ln t\,\mathrm{d}t$.

Q3. On pose $F(x) = \begin{cases} \ln x \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\ln t\,\mathrm{d}t & \text{si } x \in]0,1] \\ I(f) & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et préciser sa fonction dérivée.

b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$ et que :

$$\forall x \in]0,1],\ xF''(x) + F'(x) = f(x)$$

c) Préciser $F(1)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (xF''(x))$.

Q4. φ est l'application qui à tout élément f de E associe l'application F définie dans Q3.

a) Montrer que φ est un endomorphisme injectif de E.

b) Montrer que $\operatorname{Im}\varphi$ est l'ensemble $\mathcal{S}$ des éléments g de E tels que :

- $g(1) = 0$;
- g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1]$;
- $g''(x) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0.

On trouve, par exemple, des étude partielles ou complètes de :

$x \to \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+xt}\,\mathrm{d}t$ dans oral ESCP 1998 1-15 ;

$x \to \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{t+x}\,\mathrm{d}t$ dans oral ESCP 1998 1-1 ;

$x \to \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 1997 1-18, 1998 1-4 ;

$x \to \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 1997 1-5 et 2001 1.1 ;

$x \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t^2}}\, \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 2001 1.4 ;

$x \to \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 2002 1.3 ;

$x \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\, \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 2003 1.7 ;

$x \to \int_0^x \ln\left(2 \sin\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 2004 1.3 ;

$x \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\, \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 2005 1.3 ;

$x \to \int_0^1 t^{-x} \sqrt{1+t}\, \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 2006 1.18 ;

$x \to \int_0^1 (1-t^2)^x\, \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 2009 1.3 ;

$x \to \int_1^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 2012 1.20 ;

$x \to \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 2012 1.10 ;

$x \to \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x\, e^t}\, \mathrm{d}t$ dans oral ESCP 2013 1.06 ;

$x \to \int_0^a \frac{t^x}{1-t}\, \mathrm{d}t$ dans HEC 1981 MI ;

$x \to \int_x^{+\infty} t^a\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t$ dans HEC 1991.

$x \to \int_0^x \frac{1-\ln t}{2+t^2}\, \mathrm{d}t$ dans EDHEC 2002 Ex 1 ;

$x \to \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{-t\,x}}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t$ dans EDHEC 2013 PB ;

$x \to \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^2}\, \mathrm{d}t$ dans ECRICOME 1999 Pb ;

$x \to \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sqrt{1+tx}\, \mathrm{d}t$ dans ECRICOME 2006 Ex 2 ;

$x \to \int_0^{+\infty} e^{-2t} \sqrt{1+x^2\, e^{2t}}\, \mathrm{d}t$ dans ECRICOME 2009 Ex 2 ;

$x \to \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x}\, \mathrm{d}t$ et $x \to \int_0^{+\infty} \frac{t^k\, e^{-xt}}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$ dans LYON 2004 Pb 1 ;

$x \to \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2\, t^2}\, \mathrm{d}t$ dans LYON 2006 Pb 1. ;

$x \to \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, \mathrm{d}t$ dans LYON 2010 Pb 2.

$x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ dans LYON 2013 Pb 1.

SF 12 Dériver sous le signe somme.

Deux mots sur le sujet.

$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Pour tout x dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t$ converge et on veut montrer que $f : x \to \displaystyle\int_a^b \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

Il s'agit le plus souvent de montrer que f est dérivable sur I et que $\forall x \in I,\ f'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$. Donc en gros de montrer que $\forall x \in I,\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\displaystyle\int_a^b \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Pour cela on justifie que $g : x \to \displaystyle\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie sur I et on montre que $\forall x \in I,\ \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x)$ en montrant que $\forall x \in I,\ \displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x)\right) = 0$.

Cela revient encore à montrer que : $\forall x \in I,\ \displaystyle\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\int_a^b \left(\varphi(x+h),t - \varphi(x,t) - h\,\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right)\mathrm{d}t\right] = 0$.

Exercice 16 Dérivation sous le signe somme 1.

Q1. Montrer que $F : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$ et $G : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Q2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ G(x) = \dfrac{1}{2}\,x\,F(x)$.

Q3. Soit a un élément de $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall h \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{F(a+h)-F(a)}{h} + G(a)\right| \leqslant \dfrac{|h|}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (on pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange).

En déduire que F est dérivable en a et que $F'(a) = -G(a)$.

Q4. Déterminer F (on pourra considérer $H : x \to e^{\frac{x^2}{4}}F(x)$ et utiliser $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Traité dans LYON 1994 Pb 2. Dans LYON 2006 Pb 1 on dérive $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17 Dérivation sous le signe somme 2. Représentation intégrale d'une fonction puissance.

ESSEC 2007 MI partie I

Préambule : on désigne par φ une application définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs positives telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ soit convergente et on lui associe la fonction f d'une variable réelle définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\right)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Question préliminaire : Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Q1. Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite du problème, pour de telles valeurs de α, on désignera par f_α l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{t}{1+t^2} - \frac{1}{x+t}\Big)\, t^\alpha \,\mathrm{d}t$$

Q2. Exprimer f_0 à l'aide des fonctions usuelles.

Q3. **On suppose que** $\alpha \in]-\mathbf{1}, \mathbf{0}[$.

Pour x dans $\mathbb{R}^{+*}$, prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{x+t}\,\mathrm{d}t$ et, à l'aide d'un changement de variable, l'exprimer en fonction de x^α et d'un réel ne dépendant que de α .

En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f_\alpha(x) = c\,x^\alpha + d$.

Préciser le signe de c.

Q4. **On suppose que** $\alpha \in]\mathbf{0}, \mathbf{1}[$.

a) Lorsque x et h sont des réels tels que $x > 0$, $x + h > 0$ et $h \neq 0$, vérifier la relation :

$$\frac{f_\alpha(x+h) - f_\alpha(x)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+h+t)(x+t)}\,\mathrm{d}t$$

Montrer alors que f_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$

b) Justifier la relation : $\quad \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'_\alpha(x) = f'_\alpha(1)\,x^{\alpha-1}.$

En déduire l'existence de c et d, réels ne dépendant que de α, tels que : $\forall x \mathbb{R}^{+*}, \quad f_\alpha(x) = c\,x^\alpha + d.$

Préciser le signe de c.

Exercice 18 | S | Dérivation sous le signe somme 3. Transformation de Laplace.

Étude de $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-x\,t}\,\mathrm{d}t$**.**

E est l'ensemble des applications continues f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ localement dominées au voisinage de $+\infty$ par un mônome c'est à dire telles qu'il exite un réel strictement positif λ et un élément p de $\mathbb{N}$ vérifiant :

$$\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t \in [A, +\infty[,\ |f(t)| \leqslant \lambda t^p.$$

Q1. Soit f un élément de E. Montrer que pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Dans la suite si f est un élément de E, L_f est l'application de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x dans $\mathbb{R}^{+*}$ associe $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$. L_f est la transformée de Laplace de f.

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t \in [0, +\infty[,\ u_n(t) = t^n$.

a) Montrer que u_n appartient à E et que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ L_{u_n}(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}\cdot$

b) f est un élément de E. Montrer que $u_n\,f$ appartient à E.

Q3. f est un élément de E. On se propose de montrer que L_f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que pour tout réel u : $|e^u - 1 - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}\,e^{|u|}$ (on pourra utiliser Taylor).

b) a est un réel strictement positif. h est un réel non nul tel que : $|h| < a/2$.

Montrer que $\Delta(h) = \dfrac{L_f(a+h) - L_f(a)}{h} + \displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\, e^{-at}\, \mathrm{d}t$ a un sens.

Montrer que : $|\Delta(h)| \leqslant \dfrac{|h|}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 |f(t)|\, e^{-(a-|h|)t}\, \mathrm{d}t \leqslant \dfrac{|h|}{2} \displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 |f(t)|\, e^{-\frac{a}{2}t}\, \mathrm{d}t$.

En déduire que L_f est dérivable en a et préciser $(L_f)'(a)$.

Remarque L_f *est dérivable sur* $\mathbb{R}^{+*}$ *et* $(L_f)'$ *est la transformée de Laplace de* $t \to -tf(t)$.

Q4. f est un élément de E. On pose, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $f_n = u_n f$.

Montrer que pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$, L_f est n fois dérivable et que $(L_f)^{(n)} = (-1)^n L_{f_n}$.

Ce thème est abodé dans le très beau problème de HEC-ESSEC-ESCP-EML MII 2002.

Exercice 19 **Dérivation sous le signe somme 4. Dérivabilité de la fonction Γ. Contenu dans HEC 2005**

Q1. Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, et pour tout réel x strictement positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^k\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ est absolument convergente. On note $g_k(x)$ la valeur de cette intégrale.

Q2. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}^{+*}$. Soient x_0 et x deux éléments distincts de $]a, b[$.

a) Soit t un élément de $]0, +\infty[$. Justifier l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1} = \operatorname*{Max}_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}$ (faire deux cas).

En déduire que $\displaystyle\int_0^1 (\ln t)^2 \Big(\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\Big)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln t)^2 \Big(\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\Big)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ convergent .

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \Big(\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\Big)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$ converge.

b) Soit t un élément de $]0, +\infty[$. Montrer que :

$$|t^{x-1} - t^{x_0-1} - (x - x_0)\, (\ln t)\, t^{x_0-1}| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{2}\, (\ln t)^2 \,(\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}).$$

Établir l'inégalité :

$$\Big|\Gamma(x) - \Gamma(x_0) - (x - x_0)\, g_1(x_0)\Big| \leqslant \frac{(x - x_0)^2}{2} \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 \Big(\operatorname*{Sup}_{\alpha\in[a,b]} t^{\alpha-1}\Big)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t.$$

c) En déduire que la fonction Γ est dérivable en x_0 et que $\Gamma'(x_0) = g_1(x_0)$.

Q3. Établir que la fonction Γ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\Gamma' = g_1$.

On trouve encore dans :

LYON 2004 Pb 1 la dérivation de $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\, e^{-\frac{xt}{1+t^2}}\, \mathrm{d}t$;

LYON 2006 Pb 1 la dérivation de $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(xt)\, \mathrm{d}t$;

LYON 2013 Pb 1 la dérivation de $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\, \mathrm{d}t$;

HEC 1981 MI la dérivation de $x \to \displaystyle\int_0^{a} \frac{t^x}{1-t}\, \mathrm{d}t$ $(a \in]0, 1[)$;

Ecricome 2006 ex 2 la dérivation de $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\sqrt{1+x\,t}\,\mathrm{d}t$;

Ecricome 2012 ex 1 la dérivation de $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{x+e^t}$, alors que cette intégrale se calcule en une ligne... ;

Oral ESCP 1997 1-2 la dérivation de $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Oral ESCP 2000 1-19 la dérivation de $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et de $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$;

Oral ESCP 2002 1.1 et 2010 1.9 la dérivation de $x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\cos(2\,xt)\,\mathrm{d}t$;

SF 13 **Comparer la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_{\mathbf{a}}^{+\infty} \mathbf{f(t)\,dt}$ **et la nature de la série de terme général** $\mathbf{f(n)}$**.**

SF 14 **Comparer la nature de l'intégrale** $\displaystyle\int_{\mathbf{a}}^{+\infty} \mathbf{f(t)\,dt}$ **et la nature de la série de terme général** $\displaystyle\int_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k+1}} \mathbf{f(t)\,dt}$ **ou** $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt$ **avec** (a_k) **suite croissante qui tend vers** $+\infty$**.**

Signalons ce résultat qui figurait jusqu'aux concours 2014 et qui a disparu. La question Q1 en apporte la preuve.

a est un élément de $\mathbb{N}$ et f est une application de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est **continue**, **décroissante** et **positive** sur $[a, +\infty[$.

La série de terme général $f(n)$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Exercice 20 **S** **Séries et intégrales généralisées**

a est un élément de $\mathbb{N}$ et f une fonction **continue**, **décroissante** et **positive** sur $[a, +\infty[$.

Q1. a) On pose, pour tout n dans $[\![a, +\infty[\![$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=a}^{n} f(k)$. Montrer que si n appartient à $[\![a, +\infty[\![$:

$$\int_a^n f(t)\,dt + f(n) \leqslant S_n \leqslant \int_a^n f(t)\,dt + f(a).$$

b) Montrer que la série de terme général $f(n)$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Q2. Montrer que les suites de termes généraux $S_n - \displaystyle\int_a^n f(t)\,dt$ et $S_n - \displaystyle\int_a^{n+1} f(t)\,dt$ sont convergentes.

Application. Montrer que $\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n\right)$ converge vers un réel γ appelé la constante d'Euler.

En déduire que $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

Q3. En suppose que la série de terme général $f(n)$ diverge. Montrer : $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\int_a^n f(t)\,dt$.

Application. $\alpha \in]0, 1[$ Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

Q4. En suppose que la série de terme général $f(n)$ converge. A-t-on $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt$?

Exercice 21 **S** **Séries et intégrales généralisées. ESCP 1994 1.13**

Q1. β est un réel. Étudier la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n\,(\ln n)^\beta}$ (on pourra utiliser ex 20 Q1).

Q2. β est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\beta-1}\,\frac{1}{(\ln n)^{\beta-1}}$ (on pourra encadrer $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t\,(\ln t)^\beta}$).

Exercice 22 **S** **Le continu n'est pas toujours discret... (version 1).**

f est une fonction continue sur $[a,+\infty[$. On suppose que $\boxed{f \textbf{ est positive}}$ sur $[a,+\infty[$.

Q1. a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si la série de terme général $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. Montrer que ceci vaut encore si f est négative sur $[a,+\infty[$.

Q3. Illustrer l'importance de l'hypothèse : f garde un signe constant sur $[a,+\infty[$, dans les résultats précédents.

Exercice 22 **PC** **Le continu n'est pas toujours discret ... (version 2).**

f est une fonction continue sur $[a,+\infty[$.

$(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite croissante d'éléments de $[a,+\infty[$ qui tend vers $+\infty$.

Q1. On suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et à pour limite $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la série de terme général $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{a_{n_0}}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q2. Montrer que la réciproque des résultats précédents n'est pas vraie.

Q3. On suppose que f garde un signe constant sur $[a,+\infty[$.

a) Montrer que si la suite de terme général $\displaystyle\int_a^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b) Montrer que si la série de terme général $\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 23 **S** **ESCP 1995 2.6**

Q1. g est une application continue et positive de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ est de même nature que la série de terme général $v_n=\displaystyle\int_n^{n+1} g(t)\,\mathrm{d}t$.

Q2. f est une application de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t=f(n)+\int_n^{n+1}(n+1-t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que la série de terme général $f(n)$ est de même nature que la suite de terme général $w_n=\displaystyle\int_1^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q3. Déterminer la nature de la série de terme génral $s_n=\dfrac{\sin\sqrt{n+1}}{n+1}$.

Exercice 24 **PC**

"Rappel" Si (a_n) est une suite décroissante qui converge vers 0 (qui est donc nécessairement positive...), les séries de termes généraux $(-1)^n\,a_n$ et $(-1)^{n+1}\,a_n$ convergent.

f est une fonction continue, décroissante et positive sur $[0,+\infty[$.

On suppose en outre que f admet une limite nulle en $+\infty$ et on se propose de prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ converge en utilisant des considérations de séries alternées.

Q1. Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t+n\pi)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ est décroissante positive et converge vers zéro.

En déduire que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ converge.

Q2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Q3. a) Montrer $\forall k\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_{k\,\pi}^{(k+1)\,\pi} f(t)\,|\sin t|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\int_{(k+1)\,\pi}^{(k+2)\,\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\sin t\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 25 **PC**

f est une application continue et décroissante, de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Q1. Montrer que f est positive sur $]0,+\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$.

Q2. h un réel strictement positif.

a) Montrer que la série de terme général $f(nh)$ est convergente.

b) Montrer que : $hf(h) \leqslant \displaystyle\int_0^{h} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $hf\big((n+1)h\big) \leqslant \displaystyle\int_{nh}^{(n+1)h} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant hf(nh)$.

c) En déduire que : $\displaystyle\int_h^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant h\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

d) Prouver que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \underset{h\to 0^+}{\sim} \frac{1}{h}\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Q3. Application.

a) Soit α un réel appartenant à $]-1,0]$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big((h)^{\alpha+1}e^{-nh}(n)^{\alpha}\Big) = \Gamma(\alpha+1)$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n^2} \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-t}}$.

Généralise un peu oral ESCP 2001 1.9

Exercice 26 **PC** **ESCP 2002 1.18.**

Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ une fonction non identiquement nulle, continue et périodique de période $T>0$. On note :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+,\quad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt \quad \text{ et } \quad M=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

Q1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_k = \displaystyle\int_{kT}^{(k+1)T}\frac{|f(t)|}{t}\,dt \quad (k\geqslant 1)$.

Q2. On suppose $M \neq 0$.

a) Montrer que $F(x) \underset{+\infty}{\sim} Mx$.

b) L'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ est-elle convergente ?

Q3. On suppose $M = 0$. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_T^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, dt$ est convergente mais non absolument convergente.

SF 15 **Étudier une suite ou une série définies par une intégrale impropre.**

Exercice 27 **S**

Trouver un équivalent de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\arctan t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 28 **S**

Étudier la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+1}}$.

Exercice 29 **S** **ESCP 2002 1.9.**

Classique. À savoir faire.

Soit α un réel strictement supérieur à 1.

Q1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose alors $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^n}$.

Q2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_n(\alpha) = \alpha n(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)).$$

Donner alors une expression de $u_n(\alpha)$ en fonction de $u_1(\alpha)$.

Q3. a) Étudier la monotonie de la suite $(u_n(\alpha))$. En déduire sa convergence.

b) En partageant l'intervalle d'intégration $[0, +\infty[$ en trois intervalles, à l'aide des points b et 1, démontrer que, pour tout réel b de $]0, 1[$, on a :

$$u_n(\alpha) \leqslant b + \frac{1}{(1+b^\alpha)^n} + \frac{1}{n\alpha - 1}$$

c) Donner alors la valeur de la limite de la suite $(u_n(\alpha))$.

Q4. On pose, pour tout entier n non nul : $w_n(\alpha) = \ln(u_n(\alpha)) + \dfrac{\ln(n)}{\alpha}$.

a) Démontrer que la série de terme général $w_{n+1}(\alpha) - w_n(\alpha)$ est convergente (utiliser un développement limité).

b) En déduire l'existence d'un réel $K(\alpha)$ tel que $u_n(\alpha)$ soit équivalent à $\dfrac{K(\alpha)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$, lorsque n tend vers l'infini.

Notons que l'on retrouve souvent ce type d'intégrale dans les exercices d'oraux et les problèmes de concours.

Dans LYON 1991 PB 2, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

On calcule I_1, étudie la suite (I_n) et les séries de termes généraux I_n et $(-1)^n I_n$.

Dans LYON 2000 PB 2 on calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$.

Dans EDHEC 2009 ex 2, $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}$. On étudie la suite $\big(u_n(\alpha)\big)$ et la série de terme général $u_n(\alpha)$.

Dans ECRICOME 2005 Pb $J_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^\alpha}$. On exprime $J_{\alpha+1}$ en fonction de J_α et on calcule J_n.

Dans oral ESCP 1999 1-11 $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}$. On calcule I_n et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k I_k$.

Dans oral ESCP 2002 1.9, $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^\alpha)^n}\cdot$ On étudie la suite $\big(u_n(\alpha)\big)$ et la série de terme général $u_n(\alpha)$.

Dans oral ESCP 2004 1.6 $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}\cdot$ On étudie la nature de la série de terme général I_n et on calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k\, I_k$.

Dans oral ESCP 2009 1.6 on calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}\cdots$ en admettant un résultat important.

Dans oral ESCP 2012 1.11, $F_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^x)^n}\cdot$ On étudie la suite $\big(F_n(x)\big)$ et la série de terme général $F_n(x)$.

Exercice 30 **PC** **ESCP 2011 1.14**

Dans tout l'exercice, f désigne une fonction continue et bornée de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ qui converge vers 0.

Soit $A \in \mathbb{R}^+$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $I_n(A) = \displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

Q1. Établir l'existence de $I_n(A)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q2. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + x^2}\,\mathrm{d}x$.

Q3. On suppose dans cette question que $A > 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(A) = 0$.

Q4. On suppose dans cette question que $f(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$.

Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\left|\int_0^A \frac{a_n f(x)}{a_n^2 + x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(0) = 0$.

Q5. On ne suppose plus que $f(0) = 0$. Montrer que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n(0) = \frac{\pi}{2} f(0)$.

Q6. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\, e^{-\sqrt{t}}}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 31 **S** **ESCP 2010 1.12.**

Pour tout élément p de $\mathbb{N}^*$ on pose : $u_p = \dfrac{1}{p} - \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}\cdot$

Q1. Montrer que la série de terme général u_p converge. Soit γ sa somme. Montrer que $\gamma \in [0, 1]$.

Q2. On pose, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de I_n.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout réel $t \in [0, n]$, on a : $\left(1 - \dfrac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant e^{-t}$.

c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

On pourra utiliser $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in [0, 1],\ 1 - (1 - z)^n \leqslant n\, z$ *après l'avoir démontré.*

Q3. On pose, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $J_n = \displaystyle\int_0^n \frac{1}{t}\left(1 - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right)\mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de J_n.

b) Établir, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t = n\left(\ln(n+1)+\sum_{p=1}^{n} u_p\right)$

En déduire que, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on a : $J_n = \ln(n+1) + \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p$.

Q4. On pose : $U = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et $V = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier l'existence de U et de V.

b) Démontrer que $U - V = \gamma$.

Thème abordé dans LYON 1990 Pb 2, LYON 2002 Pb 1, oral ESCP 2012 1.7.

Exercice 32 **PC**

Pour tout n dans $[\![2,+\infty[\![$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^n)\,\mathrm{d}t$.

On se propose de montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 2}$ est définie et d'en trouver un équivalent.

Q1. Montrer que si t est un réel positif ou nul : $0 \leqslant 1-\cos t \leqslant 2$ et $0 \leqslant 1-\cos t \leqslant \dfrac{t^2}{2}\cdot$

Q2. n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$. Montrer que $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t)\, t^{\frac{1}{n}-2}\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1-\cos t)\, t^{-2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Montrer que $|J - J_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (1-t^{1/n})\,\mathrm{d}t + 2\int_1^{+\infty} (t^{\frac{1}{n}-2} - t^{-2})\,\mathrm{d}t$.

On rappel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2}\cdot$ Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}\cdot$

Q3. a) Montrer que : $\forall n \in [\![2,+\infty[\![,\ J_n = \dfrac{n}{n-1}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{(1/n)-1}\sin u\,\mathrm{d}u$.

b) Conclure l'exercice.

Exercice 33 **PC**

n appartient à $\mathbb{N}^*$ et $u_n = \sqrt{2n}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$

Q0. Montrer que u_n existe.

Q1. Montrer que $f_n : x \to x - n\ln(1+x/n)$ et $g_n : x \to n\ln(1+x/n) - \ln(1+x)$ sont monotones de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Q2. Montrer que $u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\ln(1+t^2/(2n))}\,\mathrm{d}t$.

Montrer que si x est positif : $0 \leqslant e^{-n\ln(1+x^2/(2n))} - e^{-x^2/2} \leqslant e^{-n\ln(1+x^2/(2n))} f_n(x^2/2)$.

Q3. A est réel positif.

a) Montrer que $u_n - \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_A^{+\infty} e^{-n\ln(1+t^2/(2n))}\,\mathrm{d}t + f_n(A^2/2)\int_{-A}^{A} e^{-n\ln(1+t^2/(2n))}\,\mathrm{d}t$

b) En déduire que $u_n - \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2/2} + 2Af_n(A^2/2)$.

Q4. Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\cdot$

Complément $\boxed{4}$: Calcul de l'intégrale de Gauss.

Complément $\boxed{5}$: Dirichlet again.

Complément $\boxed{6}$: Calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}$.

Exercice 34 **S** **Intégrale de Gauss**

On se propose de montrer que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad !!$$

Q1. a) Montrer que la fonction $F:\ x \to \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $G:\ x \to \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[1,+\infty[$ par $\dfrac{1}{e}$ (remarquer que $t \leqslant t^2$ si...).

En déduire que F est majorée sur $[1,+\infty[$ et même sur $[0,+\infty[$.

c) Montrer que F admet une limite finie L en $+\infty$ (on énoncera avec précision le théorème utilisé).

Nous allons montrer que $L = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Q2. $u:\ x \to \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Soit x dans $\mathbb{R}$; on se propose de montrer que u est dérivable en x.

a) Montrer que pour s dans [-2,2], $|e^s - 1 - s| \leqslant \dfrac{s^2}{2}\ e^2$.

b) h est un réel non nul de l'intervalle $[-1,1]$. On pose :

$$\Delta(h) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \Big(-\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\Big).$$

Montrer que $|\Delta(h)| \leqslant \dfrac{|h|}{2}e^2 \displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)}(1+t^2)\,\mathrm{d}t$.

En déduire que u est dérivable en x et que $u'(x) = \displaystyle\int_0^1 -e^{-x(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$

Q3. Calculer $u(0)$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$ (on pourra encadrer $e^{-x\,(1+t^2)}$).

Q4. $v:\ x \to u(x^2)$ et $w:\ x \to \Big(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\Big)^2$

a) Montrer que $v+w$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. En utilisant un changement de variable montrer que cette dérivée est nulle.

b) En déduire que : $v(x)+w(x) = \dfrac{\pi}{4}$ pour tout réel x.

c) Montrer que : $L = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ ainsi : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

d) Déduire du résultat précédent $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.

Démarche proposée dans ESCP 1989 MI, dans oral ESCP 1996 2.19, 2007 1.3. On trouve le calcul de cette intrégrale dans oral ESCP 2013 1.15

Exercice 35 **PC** **Intégrale de Gauss again... en passant par Wallis. Oral ESCP 1996 2.11.**

Texte ESCP...

Pour tout n entier naturel, on pose : $w_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t$ et $u_n = (n+1)\, w_{n+1}\, w_n$.

Q1. a) Montrer que pour tout n entier naturel $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, w_n$.

En déduire que w_{n+1} et w_n sont équivalent lorsque n tend vers l'infini.

b) Expliciter u_n en fonction de n et en déduire un équivalent de w_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Q2. Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t dans $[0, \sqrt{n}]$: $\left(1 - \dfrac{t^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-t^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{t^2}{n}\right)^{-n}$.

En déduire que pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$: $\sqrt{n}\, u_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\, w_{2n-2}$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$.

Démarche proposée dans ESCP 1994 MI.

Exercice 36 **PC** **Calcul de l'intégral de Dirichlet. LYON 2004 PB 1.**

▶ *Très bon entraînement.*

On note $F :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $G :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin u}{u} \,\mathrm{d}u \text{ et } G(x) = \int_1^x \frac{\cos u}{u} \,\mathrm{d}u.$$

Q1 a) Montrer, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$: $\quad F(x) = -\dfrac{\cos x}{x} + \cos 1 - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos u}{u^2} \,\mathrm{d}u$.

En déduire que F admet une limite finie en $+\infty$. On note α cette limite.

b) De manière analogue, montrer que G admet une limite finie en $+\infty$. On note β cette limite.

c) En déduire que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, les intégrales $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} \,\mathrm{d}u$ convergent, et que : $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \,\mathrm{d}u = \alpha - F(x)$ et $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} \,\mathrm{d}u = \beta - G(x)$.

Q2 a) Montrer, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$ et tout réel $T \in]0; +\infty[$:

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x} \,\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u} \,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u} \,\mathrm{d}u.$$

b) En déduire que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} \,\mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} \,\mathrm{d}t = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} \,\mathrm{d}u - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} \,\mathrm{d}u.$$

On note $A \ :]0; +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, par : $A(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} \,\mathrm{d}t$.

Q3 Montrer que l'application A est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0; +\infty[$:

$$A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}\cdot$$

Q4 Établir que $A(x)$ et $A'(x)$ tendent vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Q5 a) Montrer : $\forall x \in]0;1], \quad 0 \leqslant \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u \leqslant -\ln x.$

b) En déduire que $\sin x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ converge, et établir que $A(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

II Etude de la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Q1 Montrer que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$ et tout entier naturel k, l'application $t \longmapsto t^k\, e^{-xt}$ est bornée sur $[0;+\infty[$, et en déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k\, e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note, pour tout entier naturel k, $B_k \ :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$, par : $B_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^k\, e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

Q2 a) Montrer, en utilisant par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad |e^u - 1 - u| \leqslant \frac{u^2}{2}\, e^{|u|}$$

b) En déduire, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, pour tout entier naturel k et pour tout réel h tel que $0 < |h| \leqslant \dfrac{x}{2}$:

$$\left| \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leqslant \frac{|h|}{2}\, B_{k+2}\Big(\frac{x}{2}\Big).$$

c) Montrer que, pour tout entier naturel k, B_k est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad B_k'(x) = -B_{k+1}(x).$$

d) En déduire que B_0 est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$B_0''(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}\cdot$$

Q3 Montrer, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$:

$$0 \leqslant B_0(x) \leqslant \frac{1}{x} \text{ et } 0 \leqslant -B_0'(x) \leqslant \frac{1}{x^2}\cdot$$

et en déduire les limites de $B_0(x)$ et $B_0'(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q4 a) Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad e^{-\sqrt{x}} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant B_0(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$

b) Justifier, pour tout réel $y \in \Big[0;\dfrac{\pi}{2}\Big[$:

$$\int_0^y \mathrm{d}u = \int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ ,$$

et en déduire : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\ .$

c) En déduire la limite de $B_0(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement positives.

III Calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$

On considère l'application $\varphi :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :

$$\varphi(x) = A(x) - B_0(x)\ ,$$

où A a été définie dans la Partie **I** et B_0 a été définie dans la Partie **II**.

On note $U :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, par :

$$U(x) = \big(\varphi(x)\big)^2 + \big(\varphi'(x)\big)^2$$

Q1 Montrer que U est constante sur $]0;+\infty[$.

Q2 Quelle est la limite de $U(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Q3 En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad A(x) = B_0(x)$.

Q4 Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$?

Exercice 37 **PC** **Calcul de** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^\alpha}$

► *Classique et bon entraînement.*

Dans tout le problème α est un réel strictement supérieur à 1 et $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$.

PARTIE I

Q1 k est élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $u_k = \displaystyle\int_0^\pi \cos(\lambda x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x$. Montrer que :

$$u_k = \frac{(-1)^k \sin(\lambda\pi)}{\lambda^2 - k^2}\ \lambda\,.$$

Q2 Soient x un réel et n un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $C_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \Re e\left(\sum_{k=1}^n e^{ikx}\right)$.

Montrer que si x n'est pas un multiple de 2π :

$$C_n(x) = \frac{1}{2}\ \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{1}{2}.$$

(suite géométrique ou récurrence...)

Q3 On pose : $\forall x \in]0,\pi],\ \Phi(x) = \dfrac{\cos(\lambda x) - 1}{\sin(x/2)}$ et $\Phi(0) = 0$.

Montrer que Φ est continue sur $[0,\pi]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$.

Calculer $\Phi'(x)$ pour tout élément x de $]0,\pi]$.

Montrer enfin que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

Prouver à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\lim_{\gamma\to+\infty} \int_0^\pi \Phi(x)\,\sin(\gamma x)\,\mathrm{d}x = 0$ (Riemann-Lebesgue... ne pas remplacer Φ par sa valeur).

Q4 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2}\int_0^\pi \Phi(x)\,\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\sin\left((\frac{2n+1}{2})x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}.$$

(partir d'un côté ou de l'autre et prendre son temps).

Q5 On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(\left(\frac{2n+1}{2}\right)x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est constante. Calculer I_0.

En déduire que la série de terme général u_n converge et que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\lambda\pi)}{2\lambda}$$

PARTIE II

Q1 a) Montrer que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{-\lambda}}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x$ existent.

b) Montrer que $I = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ (poser $t = x^{\lambda}$). Montrer que $J = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ (poser $t = x^{-\lambda}$).

En déduire une relation simple entre I, J et K.

Q2 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ on pose $A_n = \displaystyle\int_0^1 \Big[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, x^k\Big] x^{\lambda-1}\,\mathrm{d}x$ et $B_n = \displaystyle\int_0^1 \Big[\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, x^{k-1}\Big] x^{-\lambda}\,\mathrm{d}x$.

a) p est dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0,1]$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k\, x^k$.

Montrer que : $\displaystyle\Big|\sum_{k=0}^{p} (-1)^k\, x^k - \frac{1}{1+x}\Big| \leqslant x^{p+1}$.

b) En déduire une majoration simple de $|A_n - I|$ et $|B_n - J|$ pour n dans $\mathbb{N}^*$.

c) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} A_n = I$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} B_n = J$.

Q3 Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Calculer A_n et B_n.

En utilisant I Q1 vérifier que : $A_n + B_n - \dfrac{2}{\sin(\lambda\pi)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{\lambda}\cdot$

En déduire que :

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = \frac{\lambda\pi}{\sin(\lambda\pi)} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}\cdot$$

PARTIE III

Dans cette partie on considère la fonction $f : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^{\alpha}}}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$. On rappelle que α est un élément de $]1,+\infty[$

Q1 Soit γ un réel positif ou nul.

a) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\gamma}\, e^{-xt^{\alpha}}}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ converge pour tout réel x.

b) Montrer que si x est strictement positif, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{\gamma}\, e^{-xt^{\alpha}}}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\gamma}\, e^{-xt^{\alpha}}}{1+t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ convergent.

Q2 a) Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^+$ (faire trois cas).

b) On se propose de montrer à la main que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Donner la définition de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Soit ε un réel strictement positif.

Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} 1\,\mathrm{d}t + e^{-x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^\alpha} \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + f(0)\,e^{-x\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^\alpha}$.

Achever de prouver le résultat.

Q3 On se propose de montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^\alpha e^{-xt^\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

Soit c un éléments de $\mathbb{R}^{+*}$ et h un réel non nul tel que $|h| \leqslant \dfrac{c}{2}$.

a) Justifier très rapidement que $g(c) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha e^{-ct^\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha}\ e^{-(c/2)t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existent.

b) Montrer que : $\forall u \in \mathbb{R},\ |e^u - 1 - u| \leqslant \dfrac{u^2}{2}\,e^{|u|}$.

c) On pose $\Delta(h) = \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} + g(c)$. Montrer que :

$$|\Delta(h)| \leqslant \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2\alpha}}{1+t^\alpha}\ e^{-(c/2)t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

Conclure.

Dans la suite nous admettrons que f' est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ (cela se montre sans difficulté).

Q4 On se propose de montrer que f est continue en 0.

a) Donner la définition de $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

b) Montrer que si x et A sont deux réels positifs :

$$|f(x) - f(0)| \leqslant \int_0^A |e^{-xt^\alpha} - 1|\,\mathrm{d}t + 2\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} \leqslant x\int_0^A t^\alpha\,\mathrm{d}t + 2\int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$

c) Soit ε un réel strictement positif. Montrer que l'on peut trouver un réel positif A tel que : $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{4}$

Achever de prouver le résultat.

Q5 a) Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = f(x) - x^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})$$

b) En déduire que pour réel x strictement positif :

$$f(x)e^{-x} = \Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) \int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-1/\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

(on pourra considérer $h : x \to f(x)\,e^{-x}$ et intégrer h').

Montrer que ceci vaut encore pour $x = 0$.

Q6 Déduire de (tout) ce qui précède que : $\forall z \in]0,1[,\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$.
