ALGÈBRE BILINÉAIRE 2

$\boxed{\text{P}}$ mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique de l'algèbre bilinéaire ...

F mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

$\boxed{\text{SF}}$ mentionne des savoirs faire.

Sauf mention du contraire dans la suite $(E, <.,.>)$ est un espace préhilbertien.

$\boxed{\text{S}}$ repère un exercice simple.

$\boxed{\text{PC}}$ repère un exercice où il faut chercher.

Sauf mention du contraire dans la suite $(E, <.,.>)$ est un espace préhilbertien.

$\boxed{\text{SF 1}}$ Montrer qu'un endomorphisme est symétrique. Montrer qu'une matrice est symétrique.

Rappelons que :

Soit f un endomorphisme de E. f est symétrique si : $\forall (x,y) \in E^2,\ <f(x),y> = <x,f(y)>$.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (ou de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

A est symétrique si ${}^tA = A$ ou si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = a_{i,j}$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $<.,.>$ est le produit scalaire de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est symétrique.

ii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ <AX,Y> = <X,AY>$.

iii) $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tYAX = {}^tXAY$.

$\boxed{\text{P}}$ Ici E est de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$), $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base $\boxed{\boxed{\text{orthonormée}}}$ de E et f un endomorphisme de E.

f est un endomorphisme symétrique de E si et seulement si sa matrice A dans la base B est symétrique (${}^tA = A$).

F L'hypothèse orthonormée est essentielle.

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ $\boxed{\text{S}}$ Endomorphisme symétrique. Contenu dans LYON 2007.

$E = \mathbb{R}_n[X]$. $\forall (P,Q) \in E^2,\ (P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)P(x)Q(x)\,dx$. $\forall P \in E,\ \Phi(P) = (X^2-1)P''$.

Q1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

Q2. Montrer que Φ est un endomorphisme symétrique de $(E,(.|.))$.

$\boxed{\text{Exercice 2}}$ $\boxed{\text{S}}$ Endomorphisme symétrique.

Très classique, à savoir faire.

$E = \mathbb{R}[X]$. On pose : $\forall (P,Q) \in E^2,\ <P,Q> = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2/2}\,dt$.

Q0. Soit S un élément de $\mathbb{R}[X]$. montrer que : $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} S(t)\,e^{-t^2/2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} S(t)\,e^{-t^2/2} = 0$.

Q1. Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E.

Q2. On pose $\forall P \in E,\ \varphi(P) = XP' - P''$.

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b) Montrer que : $\forall (P,Q) \in E^2,\ <P,\varphi(Q)> = <P',Q'>$ (on pourra d'abord dériver $t \mapsto Q'(t)e^{-t^2/2}$).

En déduire que φ est un endomorphisme symétrique de E.

Variante : on trouve aussi $<P,Q> = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t^2}\,dt$ *et* $\varphi(P) = 2XP' - P''$.

Thème analogue dans oral ESCP 2007 2.12, ESSEC 2002, LYON 2008.

Exercice 3 **S** Endomorphisme symétrique.

E est l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série de terme général u_n^2 converge.

Si $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux éléments de E, on pose : $\varphi(u,v) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$.

Nous avons déja vu que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que φ est un produit scalaire sur E.

On pose $\forall (u_n)_{n\geqslant 0} \in E,\ f\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(\dfrac{u_n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

Q1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.

Q2. Montrer que f est injectif et non surjectif. En déduire que $\operatorname{Im} f$ est strictement contenu dans $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

Exercice 4 **S** Endomorphisme symétrique. Caractérisation des symétries orthogonales.

E est un espace vectoriel euclidien. F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

s est la symétrie vectorielle de E par rapport à F parallèlement à G.

Montrer que $G = F^{\perp}$ si et seulement si s est un endomorphisme symétrique.

On peut sur le sujet regarder le problème d'EDHEC 2002.

Exercice 5 **S** Matrice symétrique. QSP HEC 2010.

► A savoir faire par cœur.

L appartient à $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ et $M = {}^tLL$.

Q1. Montrer que M est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Q2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur L pour que les valeurs propres de M soient strictement positives.

Thème abordé dans Oral ESCP 2002 2.4, 2004 2.11, 2009 2.7, HEC MI 2003.

Exercice 6 **S** Endomorphisme symétrique.

$E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est munit du produit scalaire canonique que nous noterons $<.,.>$ ($\forall (M,N) \in E^2,\ <M,N> = \operatorname{tr}({}^tMN)$).

A est une matrice symétrique inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\forall M \in E,\ \varphi(M) = AMA^{-1}$.

Montrer que φ est un endomorphisme symétrique de $(E, < ., . >)$.

Voir à ce sujet l'exercice 2 d'EDHEC 2007.

Exercice 7 **S** Endomorphisme symétrique.

▶ Classique. Bon entraînement.

$n \in [\![3, +\infty[\![$. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n et (u, v) est une famille libre de E.

α et β sont deux réels non nuls. On pose : $\forall x \in E, f(x) = \alpha < v, x > u + \beta < u, x > v$.

Q1. Montrer que f est un endomorphisme de E. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Q2. Montrer que $F = \operatorname{Vect}(u, v)$ est stable par f.

Soit g l'endomorphisme de F qui à tout élément x de F associe $f(x)$.

Montrer que les valeurs propres non nulles de f sont les valeurs propres de g.

Qu'en déduire sur le nombre de valeurs propres de f ?

Q3. a) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un endomorphisme symétrique de E.

b) Ici $\alpha = \beta$. Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B} = (u, v)$ de F. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

Thème abordé matriciellement dans oral ESCP 2009 2.8

Exercice 8 **PC** CNS pour que la composée de deux endomorphismes symétrique soit un endomorphisme symétriques.

Soient f et g deux endomorphismes symétriques de E (qui n'est pas nécessairement euclidien).

Montrer que $f \circ g$ est un endomorphisme symétrique si et seulement si f et g commutent.

Exercice 9 **PC** Endomorphismes symétriques.

▶ Intéressant. Sans doute à faire.

E est un espace vectoriele eucliden de dimension n non nulle. f_1, f_2,..., f_p sont p endomorphismes symétriques de E tels que :

$$\sum_{k=1}^{p} \operatorname{rg} f_k = n \text{ et } \forall x \in E, \sum_{k=1}^{p} < f_k(x), x > = \|x\|^2$$

Q1. a) Montrer que si g est un endomorphisme symétrique de E tel que $\forall x \in E, < g(x), x > = 0$ alors g est l'endomorphisme nul (on pourra utiliser $x + y$! !).

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} f_k = \mathrm{id}_E$.

Q2. a) Montrer que E est somme directe des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im} f_1$, $\operatorname{Im} f_2$, ..., $\operatorname{Im} f_p$.

b) Montrer que $\forall x \in E, \forall i \in [\![1, p]\!], f_i(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} f_k(f_i(x))$.

c) Montrer que f_1, f_2, ..., f_p sont des projecteurs orthogonaux.

En plus 1 $n \in [\![2, +\infty[\![$. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. α est un réel non nul. u est un vecteur unitaire de E. On pose $\forall x \in E, f(x) = \alpha < x, u > u + x$.

Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E. Trouver ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Voir à ce sujet l'exercice 2 EDHEC 2010, oral ESCP 2003 2.14 et 2.15.

En plus 2 Endomorphisme symétrique. Contenu dans oral ESCP 2011 2.3.

$E = \mathbb{R}[X]$. $\forall (P,Q) \in E^2$, $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt$. $\forall P \in E$, $\Phi(P) = \big((X^2-1)P'\big)'$.

Q1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

Q2. Montrer que Φ est un endomorphisme symétrique de $\big(E, (.|.)\big)$.

En plus 3 Ceci est contenu dans LYON 1998, LYON 2011.

$E = \mathbb{R}[X]$. $\forall (P,Q) \in E^2$, $< P,Q > = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,dx$. $\forall P \in E$, $T(P) = XP'' - (X-1)P'$.

Q1. Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Q2. Montrer que T est un endomorphisme symétrique de $\big(E, < .,. >\big)$ (on pourra s'intéresser à la dérivée de $x \mapsto xP'(x)\,e^{-x}$.).

En plus 4 Contenu dans oral ESCP 2000 2-2, 2008 2.20

$E = \mathbb{R}[X]$. $\forall (P,Q) \in E^2$, $< P,Q > = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$. $\forall P \in E$, $\varphi(P) = (X^2-1)P'' + (2X+1)P'$.

Q1. Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

Q2. a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b) Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que $< \varphi(P), Q > = \displaystyle -\int_{-1}^{1} (1-t)^{\frac{3}{2}}\,(1+t)^{\frac{1}{2}}\,P'(t)\,Q'(t)\,dt$ (on pourra commencer à intégrer par parties $\displaystyle\int_a^b \big((t^2-1)\,P''(t) + 2t\,P'(t)\big)\,Q(t)\,\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ en remarquant que la première parenthèse est une dérivée ; être patient...).

En déduire que φ est un endomorphisme symétrique de E.

- *Exercice assez technique qui constitue un bon entraînement.*

En plus 5 ESSEC 1999 Meilleure approximation d'un endomorphisme symétrique par endomorphisme symétrique positif de rang au plus un.

- *Problème intéressant d'un bon niveau.*

En plus 6 l'exercice 3 EDHEC 2009.

$\boxed{\text{SF 2}}$ Diagonaliser un endomorphisme (resp. une matrice) symétrique. C'est à dire trouver une base orthonormée de vecteurs propres...

$\boxed{\text{SF 3}}$ Savoir utiliser une base orthonormée de vecteurs propres d'une matrice symétrique ou d'un endomorphisme symétrique dans les problèmes les plus usuels.

Complément $\boxed{6}$: Caractérisation des matrices symétriques positives.

Complément $\boxed{7}$: Caractérisation des matrices symétriques définies-positives.

Complément $\boxed{8}$: Encadrement de Rayleigh.

Rappels.

Soit f un endomorphisme symétrique de E espace vectoriel euclidien de dimension finie non nulle .

1. Deux vecteurs propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
2. Deux sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
3. f est diagonalisable.
4. Mieux, il existe une base $\boxed{\text{orthonormée}}$ de E constituée de vecteurs propres de f (f se diagonalise dans une base orthonormée).

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Les valeurs propres de A sont réelles ($\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A = \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} A$).
2. Deux vecteurs propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
3. Deux sous-espaces propres de A associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
4. A est diagonalisable.
5. Mieux, il existe une base $\boxed{\text{orthonormée}}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.
6. Il existe une matrice $\boxed{\text{orthogonale}}$ P, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $P^{-1}AP = {}^tPAP$ soit diagonale.

$\boxed{\text{PPP}}$ f est un endomophisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n non nulle.

On obtient une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f en concatenant une base orthonormée de chacun des sous-espaces propres de f.

$\boxed{\text{PPP}}$ Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On obtient une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A en concatenant une base orthonormée de chacun des sous-espaces propres de A.

2. Si B est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n et si P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base B alors :

   1. P est une matrice orthogonale.
   2. ${}^tPAP = P^{-1}AP$ est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

$\boxed{\text{P}}$ Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$ telle que ${}^tPAP = P^{-1}AP = D$.

On note, pour tout j élément de $[\![1;n]\!]$, C_j la j^{eme} colonne de P.

Alors $(C_1; C_2; \dots; C_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

En plus

Une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})$; ${}^tXSX \geqslant 0$.

Une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}$; ${}^tXSX > 0$.

Exercice 10 $\boxed{\text{S}}$ Pratique de la réduction d'un endomorphisme symétrique.

I Entraînement incontournable.

$B = (e_1; e_2; e_3)$ est une base orthonormée de E.

f est l'endomorphisme de E de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans B.

Q1. Montrer que f est diagonalisable.

Q2. Construire une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de f.

Exercice 11 $\boxed{\text{S}}$ Pratique de la réduction d'une matrice symétrique.

I Entraînement incontournable.

Q1. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; plus précisément trouver une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale ou construire une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3;1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Q2. Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; plus précisément trouver une matrice orthogonale P telle que ${}^tPAP$ soit diagonale ou construire une base orthonormée de $\mathcal{M}_{4;1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Exercice 12 $\boxed{\text{S}}$ Réduction simultanée de deux endomorphismes symétriques. Oral ESCP 1999 2-4

$B = (e_1; e_2; e_3; e_4)$ est la base canonique de $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. f et g sont les endomorphismes de E dont les matrices sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q1. Calculer A^2 et B^2.

Q2. Trouver une base orthonormée de E constitué de vecteurs propres de f et de g.

Exercice 13 $\boxed{\text{S}}$ Réduction de $M \to AM - MB$ Oral ESCP 2001 17.

Soient A et B les matrices de $M_3(R)$ définies par :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Q1 a) Montrer que A et B sont diagonalisables.

b) Montrer que $A^2 = I_3$ et calculer B^2.

c) Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de A. Même chose pour B.

Q2 Trouver une matrice orthogonale P de $M_3(R)$ telles que les matrices ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$ soient toutes les deux diagonales.

Q3 Soit F l'application définie sur $M_3(R)$ par : $\forall M \in M_3(R);\ F(M) = AM \quad MB$.

a) Montrer que l'application F est un endomorphisme de $M_3(R)$.

b) Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre et V un vecteur propre de B associé à la valeur propre .

Montrer que $U{}^tV$ est un vecteur propre de F associé à la valeur propre .

c) F est–elle un automorphisme de $M_3(R)$?

d) F est–elle diagonalisable ?

Exercice 14 D'après ECRICOME 2009 exercice 1 partie II.

Bon entraînement.

On pose : $\forall M = (m_{i;j}) \in M_n(R);\ \forall N = (n_{i;j}) \in M_n(R);\ < M; N > = tr({}^tMN) = \sum_{i=1}\sum_{j=1} m_{i;j}\ n_{i;j}$

A est une matrice symétrique de $M_n(R)$. $\Gamma = \{ \quad ; (\ ; \ ) \in Sp(A)^2 \}$.

Φ_A est l'application de $M_n(R)$ dans $M_n(R)$ définie par : $\forall M \in M_n(R);\ \Phi_A(M) = AM \quad MA$.

On se propose de montrer que Φ_A est un endomorphisme de $M_n(R)$ et que $Sp(\Phi_A) = \Gamma$.

1) Montrer que Φ_A est un endomorphisme de $M_n(R)$.

2) Montrer que $< .;. >$ est un produit scalaire sur $M_n(R)$.

3) Montrer que $\forall (M; N) \in (M_n(R))^2;\ < \Phi_A(M); N > = < M; \Phi_A(N) >$. En déduire que Φ_A est diagonalisable.

4) Soient X (resp. Y) un vecteur propre de A associé à la valeur propre (resp.). On pose alors $M_{X;Y} = X\,{}^tY$.

(a) Justifier que $M_{X;Y} \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$ puis que ${}^tYA = \ {}^tY$.

(b) Établir que $\Phi_A(M_{X;Y}) = (\quad) M_{X;Y}$ puis que $\Gamma \quad Sp(\Phi_A)$.

5) Soit M un vecteur propre de Φ_A associé à la valeur propre .

(a) On suppose que pour tout vecteur propre Z de A, on a $MZ = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. Montrer alors que $M = 0_{M_n(\mathbb{R})}$.

En déduire qu'il existe un vecteur propre Z_0 de A tel que $MZ_0 \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$. On note la valeur propre de A associée à Z_0.

(b) En revenant à l'expression de $\Phi_A(M)$, justifier que MZ_0 est un vecteur propre de A pour une valeur propre dont on précisera l'expression en fonction de et .

(c) Conclure.

- Sans doute faire un des deux exercices suivants.

Exercice 15 Un résultat de cours que l'on fait parfois redémontrer.

S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de S respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Montrer que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k {}^tX_k$.

Exercice 16 Décomposition spectrale d'une matrice symétrique.

Ceci est contenu dans ESSEC 2004, 2007 et 2012 !

- *Il faut sans doute savoir faire...*

S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. λ_1, λ_2, ..., λ_p sont ses valeurs propres distinctes.

Pour tout élément k de $[\![1;p]\!]$ on note P_k la matrice, dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de la projection orthogonale f_k de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sur le sous-espace propre $SEP(S, \lambda_k)$ de S associé à la valeur propre λ_k.

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} P_k = I_n$ et que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \lambda_k P_k$.

Exercice 17 $\boxed{S}$ Décomposition polaire d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Bon entraînement de bilinéaire.

Q1. W est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont positifs ou nuls, telle que ${}^tWW = D^2$.

Pour tout élément j de $[\![1;n]\!]$, on note C_j la j^{eme} colonne de W.

a) Soient i et j deux éléments de $[\![1;n]\!]$. Montrer que ${}^tC_iC_i = d_i^2$ et calculer ${}^tC_iC_j$ pour $i \neq j$.

Montrer que si d_i est nul alors C_i est nulle.

b) On pose $I = \{i \in [\![1;n]\!] \mid d_i \neq 0\}$. Montrer que si I n'est pas vide, $\left(\dfrac{1}{d_i} C_i\right)_{i\in I}$ est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i \in [\![1;n]\!],\ C_i = d_i F_i$.

c) Soit F la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à $(F_1, F_2, \dots, F_n)$.

Dire pourquoi F est une matrice orthogonale et justifier l'égalité $W = FD$ (au pire "travailler avec des éléments génériques").

Q2. $S_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc $S_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXRX \geqslant 0$ ou $S_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives ou nulles.

A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) On pose $H = {}^tAA$. Montrer que H est un élément de $S_n^+(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls telles que $\Delta = {}^tPHP = {}^t({}^tPAP)({}^tPAP)$.

En déduire qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs ou nuls telle que ${}^t({}^tPAP)({}^tPAP) = D^2$.

c) Utiliser Q1. pour montrer qu'il existe une matrice orthogonale F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = PFD\,{}^tP = (PF\,{}^tP)(PD\,{}^tP).$$

En déduire qu'il existe une matrice orthogonale U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. C'est la décomposition polaire de A.

Thème abordé dans oral ESCP 2009 2.7.

Exercice 18 | S | Matrice symétrique.

Je regroupe quelques petits exercices de la même famille... Les questions sont indépendantes.

I On peut sans doute faire Q2 et Q3.

Q1. QSP ESCP 2009

Trouver l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A\,{}^tAA\,{}^tAA = I_n$.

Q2. Contenu dans ESCP 1997 2-15

Trouver l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M\,{}^tMM = I_n$.

Q3. D'après oral ESCP 1998 2-23

A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : ${}^tAA = A\,{}^tA$ et qu'il existe un élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que A^p soit la matrice nulle.

Montrer que $S = {}^tAA$ est diagonalisable. Calculer S^p et en déduire que S est la matrice nulle puis que A est également la matrice nulle.

Q4. Oral ESCP.

Trouver l'ensemble des couples (X, Y) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que : $\begin{cases} {}^tXYX = I_n \\ \text{et} \\ {}^tYXY = I_n \end{cases}$.

Exercice 19 | PC | Oral ESCP 2010 2.15.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\langle\,,\,\rangle$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans la base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. On suppose que A est une matrice symétrique réelle.

Q1. Justifier l'existence d'une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de f.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $f(\varepsilon_k) = \lambda_k \varepsilon_k$.

Montrer que l'on peut supposer $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$.

Cette hypothèse est supposée réalisée dans la suite de cet exercice.

On note $P = (p_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de passage de la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$.

Q2. Calculer, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{i,j}^2$, puis pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}^2$.

Q3. a) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $[\![1, n]\!]^2$, $p_{i,j} = \langle e_i, \varepsilon_j\rangle$.

b) Établir que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $a_{i,i} = \langle e_i, f(e_i)\rangle$ puis en déduire que : $a_{i,i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2$.

Q4. a) Soit i un élément de $[\![1, n]\!]$. Montrer que, pour tout k de $[\![1, n]\!]$: $a_{i,i} \leqslant \lambda_k + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_k)\langle e_i, \varepsilon_j\rangle^2$.

b) En déduire que pour tout k de $[\![1;n]\!]$: $\sum_{i=1}^{k} a_{i,i} \leq \sum_{i=1}^{k} {}_{i}$.

Voir sur le même thème oral ESCP 2009 2.16.

Exercice 20 | S | Par ~ | Encadrement de Rayleigh.

I Incontournable.

Contenu dans Oral ESCP 2000 2-5, 2001 2.6, HEC 2006, ESSEC 2004, ESSEC 2005.

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit sa plus petite valeur propre et soit sa plus grande valeur propre.

Q1 Montrer que :

$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad \|X\|^2 \leq {}^tXSX = <SX, X> \leq \quad \|X\|^2}$ ou que $\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}, \quad \leq \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} \leq \quad}$.

Q2. Montrer que : $\underset{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\text{Min}} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \quad$ et $\underset{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) - \{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\}}{\text{Max}} \dfrac{{}^tXSX}{{}^tXX} = \quad$.

En plus Montrer que les éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui réalisent ce minimum (resp. maximum) sont les vecteurs propres de S associés à la valeur propre (resp.).

Exercice 21 | S | Par ~ | Caractérisation des matrices symétriques positives.

I Incontournable.

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) S est positive.

i') $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geq 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

Contenu dans oral ESCP 2009 2.10, 2009 2.16, 2011 2.19, problème 1 LYON 2012.

Exercice 22 | PC | Caractérisation des matrices symétriques positives again.

I ii) ⇒ i') est incontournable.

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) S est positive

i') $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX \geq 0$.

ii) Il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$

Il aurait été plus économique de regrouper ces deux caractérisations et de montrer trois implications à la place de quatre. Mais dans la pratique on a, le plus souvent, qu'une des deux caractérisations à établir. Même chose pour les matrices symétriques définies positives.

Exercice 23 | S | Par ~ | Caractérisation des matrices symétriques définies positives.

I Incontournable.

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) S est définie positive.

i') $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

ii) Les valeurs propres de S sont strictement positives.

Thème abordé dans oral ESCP 2000 2-9, 2006 2.20, 2008 2.14, 2009 2.9, 2010 2.5, ESSEC 2007

Exercice 24 PC Caractérisation des matrices symétriques définies positives again.

▶ $i') \Rightarrow ii)$ est incontournable.

Soit S une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

i) S est définie positive.

i') $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXSX > 0$.

ii) Il existe une matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tAA$.

Exercice 25 PC Matrice symétrique définie positive. Matrice de Hilbert.

On considère la matrice $A = \left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est symétrique. Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXAX > 0$ (on pourra calculer $\displaystyle\int_0^1 t^{i-1}t^{j-1}\,dt$).

Ainsi A est une matrice symétrique définie positive. Normal car A est la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, du produit scalaire $(P,Q) \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,dt$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$...

Voir sur le sujet LYON 1997 Pb 1 et le très intéressant HEC I 2006. Contenu aussi dans Oral ESCP 2000 2-5.

On pourra sans doute s'inspirer de cela pour montrer que si a_1, a_2, ..., a_n sont n réels strictement positifs deux à deux distincts, la matrice $A = \left(\dfrac{1}{a_i+a_j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et définie positive.

Exercice 26 PC Matrice symétrique définie positive.

A est une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que les coefficients diagonaux de A sont strictement positifs.

Montrer que les coefficients de A de plus grande valeur absolue se trouvent sur la diagonale.

▶ Les deux exercices qui suivent conduisent finalement au même résultat mais on évitera d'utiliser l'un pour traiter l'autre...

Exercice 27 S Matrice symétrique définie positive. QSP ESCP 2011 et HEC 2012.

$A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} > 1$.

Montrer que A est matrice symétrique définie positive, c'est à dire que A est symétrique réelle telle que pour tout élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX > 0$.

Exercice 28 S Matrice symétrique définie positive. QSP ESCP 2011 et HEC 2012.

$A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 1$ et $\forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{i,i} > 1$.

Montrer que A est matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives.

▶ Les deux exercices qui suivent conduisent finalement au même résultat mais on évitera d'utiliser l'un pour traiter l'autre...

Exercice 29 **PC** Matrice symétrique définie positive.

$A = (a_{i,j})$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

Montrer que les valeurs propres de A sont strictement positives.

Exercice 30 **PC** Matrice symétrique définie positive.

$A = (a_{i,j})$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in [\![1;n]\!],\ a_{i,i} > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

Montrer que A est définie positive, c'est à dire que pour tout élément non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX > 0$.

Exercice 31 **PC** Matrice définie positive encore. Optimisation.

▶ Un grand classique, sans doute à savoir faire. On peut aussi le traiter au niveau des fonctions numériques de plusieurs variables en identifiant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$.

A est une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B est un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(X) = \dfrac{1}{2}\,{}^tXAX - {}^tXB$.

Q1. Montrer que $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall H \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ f(Y+H) - f(Y) = \dfrac{1}{2}\,{}^tHAH + {}^tH(AY - B)$.

Q2. En déduire que f possède un minimum réalisé pour le seul élément $A^{-1}B$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On trouve ce thème dans oral ESCP 2000 2.9, 2003 2.17, 2010 2.5.

Exercice 32 **Ordre sur l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

▶ Une bonne QSP.

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\preceq$ est la relation définie sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ A \preceq B \text{ si } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \leqslant {}^tXBX.$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Autrement dit montrer que :

- $\preceq$ est réflexive ($\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}),\ A \preceq A$).
- $\preceq$ est antisymétrique (si A et B sont dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A \preceq B$ et $B \preceq A$ donne $A = B$).
- $\preceq$ est transitive (si A, B et C sont dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $A \preceq B$ et $B \preceq C$ donne $A \preceq C$.)

$\preceq$ est-il un ordre total ? Autrement dit si A et B sont dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ a-t-on $A \preceq B$ ou $B \preceq A$?

On trouve ce thème dans ESSEC 2007, oral ESCP 2009 2.10, QSP HEC 2007.

Exercice 33 **S** Matrice d'un produit scalaire... ou matrice symétrique définie positive Oral ESCP 2008 2.11.

Il faut noter que la notion de matrice d'un produit scalaire n'est pas du programme. Il faudra comprendre qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si elle est symétrique définie positive.

Une matrice symétrique M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow {}^tXMX > 0$.

Q 1. Soit $(A,B) \in (GL_n(\mathbb{R}))^2$ tel que $A - B \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^{-1} - B^{-1}$ appartient à $GL_n(\mathbb{R})$ et que

$$(A^{-1} - B^{-1})^{-1} = B(B-A)^{-1}A.$$

Q2. Montrer que si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, il en est de même pour C^{-1}.

Q3. On suppose que A et B sont les matrices de deux produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ telles que $B - A$ soit aussi la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $B(B-A)^{-1}A = A + A(B-A)^{-1}A$.

b) Montrer que $(A^{-1} - B^{-1})^{-1}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 34 | PC | CNS pour que la suite des puissances d'une matrice symétrique converge vers 0. Rayon spectral.

Ceci est contenu dans ESSEC 2004.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\rho(A) = \underset{\lambda \in \mathrm{Sp}\,A}{\mathrm{Max}} |\lambda|$.

Q1. Montrer que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\| \leqslant \rho(A)\|X\|$.

Q2. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout élément X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(A^pX)_{p\geqslant 0}$ converge vers $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ (c'est à dire $\lim\limits_{p \to +\infty} \|A^pX\| = 0$)

ii) $\rho(A) < 1$

Exercice 35 | PC | Matrice d'un produit scalaire. Réduction d'une matrice symétrique.

Soit A une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pas nécessairement orthogonale !) et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.

Q1. a) On pose $\forall (X,Y) \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2,\ \varphi_A(X,Y) = {}^tXAY$. Montrer que φ_A est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

b) $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \varphi_A\right)$ et Q est la matrice de passage la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$. Montrer que ${}^tQAQ = I_n$.

Q2. Montrer le résultat proposé en remarquant que ${}^tQBQ$ est symétrique.

Thème abordé dans ESCP 2006 2.20

Exercice 36 | PC

Q1. Décomposition de Iwasawa d'une matrice inversible .

Soit M une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. E est un espace vectoriel euclidien de dimension n. $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E.

$\mathcal{B}'$ est la base de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est M (autrement dit M est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).

$\mathcal{B}''$ est la base orthonormée de E déduite de $\mathcal{B}'$ par le procédé d'orthormalisation de Schmidt.

On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ et R la matrice de passage de $\mathcal{B}''$ à $\mathcal{B}'$.

Montrer que $M = QR$, que $Q^{-1} = {}^tQ$ et que R est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.

Q2. Décomposition de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive .

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives (A est définie positive).

a) Montrer qu'il existe une matrice inversible M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tMM$ (diagonaliser A).

b) Montrer alors, en utilisant Q1, qu'il existe matrice R, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que $A = {}^tRR$.

c) Montrer l'unicité de R.

d) Envisager une réciproque.

e) Écrire une procédure en Turbo-Pascal qui calcule R à partir de A.

Exercice 37 La norme associée au produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une norme d'algèbre.

ECRICOME 2007 exercice 2.

Bon entraînement.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$, à coefficients réels. Pour tout élément $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A, et on note $\mathrm{Tr}(A)$, la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

On admet que Tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

On note ${}^tA$ la transposée de la matrice A.

1) Soit φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) \quad (\text{où } {}^tAB = {}^tA \times B)$$

Exprimer $\varphi(A,B)$ en fonction des coefficients de A et B et montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note N la norme associée à ce produit scalaire.

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le but de cette question est de prouver que : $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

a) Justifier l'existence de $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$${}^tP({}^tAA)P = D$$

où P est une matrice orthogonale et D une matrice diagonale.

On notera par la suite λ_i le coefficient $d_{i,i}$ de la matrice $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

b) Soit λ une valeur propre de ${}^tAA$ et X un vecteur propre associé.

En calculant ${}^tX\,{}^tAAX$ de deux manières différentes, montrer que $\lambda \geqslant 0$.

c) On pose $S = {}^tP(B\,{}^tB)P = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que

$$[N(A)]^2 = \mathrm{Tr}(D); \quad [N(B)]^2 = \mathrm{Tr}(S); \quad [N(AB)]^2 = \mathrm{Tr}(SD)$$

d) Montrer que : $\mathrm{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i}$.

e) On note E_i le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, espace des matrices à n lignes et une colonne, à coefficients réels.

Montrer que : ${}^tE_iSE_i = \|{}^tBPE_i\|^2$, où $\|.\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, puis calculer ${}^tE_iSE_i$ en fonction des coefficients de S.

Qu'en déduit-on, pour i entier compris entre 1 et n, sur le signe de $s_{i,i}$?

f) Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sum_{i=1}^{n} s_{i,i}$ puis conclure que : $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$.

On pourra sans doute s'inspirer de cela pour montrer que si A et B sont deux matrices symétriques positives $0 \leqslant \mathrm{Tr}(AB) \leqslant \mathrm{Tr}(A)\,\mathrm{Tr}(B)$.

Exercice 38 — Utilisation de la réduction d'une matrice symétrique dans un problème d'optimisation.

Oral HEC 1999.

On retrouve cet exercice dans oral ESCP 2009 2.12

- Bon entraînement.

$E = \mathbb{R}_2[X]$. On munit E du produit scalaire défini par :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ < P,Q > = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$$

Q1. Déterminer une base orthonormée (L_1, L_2, L_3) de E telle que, pour tout i élément de $[\![1;3]\!]$, L_i est de degré égal à $i-1$ et de coefficient dominant strictement positif.

Q2. On pose : $\forall (P,Q) \in E^2,\ \Phi(P,Q) = \dfrac{1}{2}\left(P(0)Q(1) + P(1)Q(0)\right)$

On note $A = (a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de terme général $a_{i,j} = \Phi(L_i, L_j)$.

a) L'application Φ définit-elle un produit scalaire sur E ?

b) Déterminer la matrice A et indiquer pourquoi elle est diagonalisable.

Justfier l'existence d'une matrice inversible R de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$${}^tRAR = D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } {}^tR = R^{-1}$$

d) Soit $P = x_1L_1 + x_2L_2 + x_3L_3$. Montrer que, si on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, alors on a : $\Phi(P,P) = {}^tXAX$.

Comment s'exprime $\Phi(P,P)$ en fonction $Y = R^{-1}X$?

e) Donner également l'expression de $< P,P >$ en fonction de $Y = R^{-1}X$.

On pose : $\forall P \in E \setminus \{0_E\},\ f(P) = \dfrac{P(0)P(1)}{\int_0^1 P^2(t)\,dt}$

Montrer que f possède un maximum dont on donnera la valeur.

Exercice 39 — PC

Attention Q2 et Q3 sont délicates sans indication. Le reste est simple .

Le cas M *inversible est également traité dans LYON 2000 PB 1 partie II (voir adjoint d'un endomorphisme ci-dessous).*

Q1. M est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $A = {}^tMM$.

a) Montrer que A est symétrique et que ses valeurs propres sont strictement positives.

b) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\Delta^2 = {}^tPAP$. Que dire de la matrice $MP\Delta^{-1}$?

c) Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales U et V telles que ${}^tUMV$ soit diagonale.

Notons qu'en posant $\Delta = {}^tUMV$, $U' = {}^tU$ et $V' = {}^tV$ on a $M = U\Delta {}^tV$ et $M = {}^tU'\Delta V'$ avec Δ diagonale et U, V, U', V' orthogonales.

Q2. Montrer que ceci vaut encore lorsque M est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q3. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Trouver deux matrices orthogonales U et V telles que ${}^tUMV$ soit diagonale.

Exercice 40 PC Théorème de Courant-Fischer.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $(E'_1, E'_2, \ldots, E'_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

k est un élément de $[\![1,n]\!]$ et $\mathcal{F}_k$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ de dimension k.

Q1. Montrer que $F_k = \mathrm{Vect}(E'_1, E'_2, \ldots, E'_k)$ est un élément de $\mathcal{F}_k$ et que :

$$\operatorname*{Sup}_{\substack{X \in F_k \\ X \neq 0}} \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k$$

Q2. F est un élément de $\mathcal{F}_k$.

a) Montrer que si X est un élément non nul de F : $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leqslant \lambda_n$. En déduire l'existence de $\operatorname*{Sup}_{\substack{X \in F \\ X \neq 0}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$

b) Montrer qu'il existe un élément non nul Y appartenant à F et à $\mathrm{Vect}(E'_k, E'_{k+1}, \ldots, E'_n)$.

Montrer que $\operatorname*{Sup}_{\substack{X \in F \\ X \neq 0}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geqslant \lambda_k$

Q3. Montrer que $\operatorname*{Min}_{F \in \mathcal{F}_k} \operatorname*{Sup}_{\substack{X \in F \\ X \neq 0}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k$.

Q4. Montrer que $\operatorname*{Max}_{F \in \mathcal{F}_{n+1-k}} \operatorname*{Inf}_{\substack{X \in F \\ X \neq 0}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} = \lambda_k$.

En plus 1 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que deux des trois propriétés suivantes donnent la troisième.

i) A est symétrique. ii) A est orthogonale. iii) $A^2 = I_n$.

En plus 2 ECRICOME 2005 exercice 1

Ceci n'est pas l'énoncé original mais le texte est respecté.

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel. Trois réels a, b, c étant donnés, on pose :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Q1 Déterminer trois matrices I, J, K dont les coefficients ne dépendent pas de a, b, c, telles que :

$$M(a,b,c) = aI + bJ + cK$$

Calculer J^2, K^2 et K^3. Déterminer une relation entre I, J et K^2, ainsi qu'un polynôme annulateur de K.
Quelles sont les valeurs propres possibles de K ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible $\boxed{\text{JF}}$ remplacer inversible par $\boxed{\text{orthogonale}}$, telle que $D = ({}^tP)KP$ soit une matrice diagonale.

Déterminer P et D vérifiant les conditions précédentes et telles que $d_{1,1} < d_{2,2} < d_{3,3}$ (où $d_{i,j}$ est le coefficient d'indices i, j de D.)

$\boxed{\text{Q3}}$ En écrivant $M = M(a, b, c)$ en fonction de I, K, K^2, déterminer la matrice $({}^tP)MP$. En déduire les valeurs propres de la matrice M.

Discuter suivant les valeurs de a, b, c le nombre de valeurs propres distinctes de M et préciser dans chaque cas les sous-espaces propres associés.

$\boxed{\text{Q4}}$ On suppose dans cette question $a = 4$, $b = 2$, $c = \sqrt{2}$ et on note $M = M(4, 2, \sqrt{2})$.

a) On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ par : $\forall X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $f(x, y, z) = \dfrac{({}^tX)MX}{\|X\|^2}$

i. (x, y, z) est un élément de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. On pose $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = ({}^tP)X$, où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Montrer que $\|X\|^2 = \|X'\|^2$ puis que : $f(x, y, z) = \dfrac{4x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2}{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

ii. Montrer que 2 et 8 sont respectivement les minimum et maximum de f sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0, 0, 0)$ et déterminer les points en lesquels ils sont atteints.

b) On cherche désormais à résoudre l'équation $B^2 = M$ d'inconnue $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

i. Soit B une solution de l'équation (s'il en existe). Montrer que B et M commutent.
En déduire que si X appartient au sous-espace propre E_λ de M attaché à la valeur propre λ, alors BX appartient aussi à E_λ.
Montrer que les vecteurs propres de M sont également vecteurs propres de B.
Justifier alors que $\Delta = ({}^tP)BP$ est une matrice diagonale.

ii. Résoudre l'équation $\Delta^2 = ({}^tP)MP$ d'inconnue Δ et donner le nombre de solutions de l'équation $B^2 = M$.

En plus 3

A et B sont deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $p \in \mathbb{N}$.

Montrer que si $A^{2p+1} = B^{2p+1}$ alors $A = B$.

En plus 4 LYON 2003 PB 2.

Complément $\boxed{9}$: Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive. Applications.

Ce thème est abordé dans oral ESCP 2005 2.11, 2008 2.14, 2009 2.7, 2009 2.10, 2011 2.16, ESCP 1998 MI, ECRICOME 2005 exercice 1, LYON 2009 PB 1.

Exercice 41 $\boxed{S}$ Une première approche.

- Une bonne piqûre de rappel...

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Q1. Montrer que $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k {}^tX_k$ (oui c'est du cours mais tous les concepteurs ne le savent pas...)

Q2. On suppose ici que A est symétrique positive. Alors λ_1, λ_2, ..., λ_n sont des réels positifs ou nuls.

On pose $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k}\, X_k {}^tX_k$. Monter que B est une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Q3. Et si A est symétrique définie positive ?

- Il est essentiel de dominer au moins l'une des trois versions suivantes. J'aime bien la 1...

Exercice 42 $\boxed{PC}$ Racine carrée symétrique positive (resp. définie positive) d'une matrice réelle symétrique positive (resp. définie positive), version 1.

A est une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de montrer qu'il existe une unique matrice symétriques positive (resp. définie positive) B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Q1. Montrer l'existence d'une telle matrice (on se ramènera à une matrice diagonale).

Q2. Soient B et C deux matrices solutions du problème.

Montrer que si X est un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ alors X est un vecteur propre de C associé à la valeur propre λ.

Montrer que $B = C$.

Exercice 43 $\boxed{S}$ Racine carrée symétrique positive (resp. définie positive) d'une matrice réelle symétrique positive (resp. définie positive), version 2.

A est une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de montrer qu'il existe une unique matrice symétriques positive (resp. définie positive) B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Q1. Montrer l'existence d'une telle matrice (on se ramènera à une matrice diagonale).

Q2. Soient B et C deux matrices solutions du problème.

a) Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales R et S et deux matrices diagonales U et V telle que $B = RU\,{}^tR$ et $C = SV\,{}^tS$.

b) Montrer que $RU^2\,{}^tR = SV^2\,{}^tS$. En déduire l'existence d'une matrice T telle que $TU^2 = V^2T$. Montrer que $TU = VT$ et que $B = C$.

Q3. Proposer et démontrer un résultat analogue pour une matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 44 $\boxed{S}$ Racine carrée symétrique positive (resp. définie positive) d'une matrice réelle symétrique positive (resp. définie positive), version 3.

A est une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se propose de montrer qu'il existe une unique matrice symétriques positive (resp. définie positive) B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Q1. Montrer l'existence d'une telle matrice (on pourra diagonaliser A).

Q2. On se propose ici de montrer l'unicité. Soit B une matrice symétrique positive (resp. définie positive) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

f (resp. g) est l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de E est A (resp. B). Dans la suite $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique.

a) Montrer que g commute avec f.

b) Soit λ une valeur propre de f et F_λ le sous-espace propre de f associé.

Montrer que F_λ est stable par g.

Montrer que la restriction g_λ de g à F_λ est un endomorphisme de F_λ diagonalisable à valeur(s) propre(s) positive(s).

En déduire que pour tout x dans F_λ, $g(x) = \sqrt{\lambda}\, x$.

c) Conclure.

Exercice 45 $\boxed{PC}$ Approximation de la racine carrée symétrique définie positive d'une matrice réelle symétrique définie positive.

Q1 D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive.

$$V_0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N},\ 2V_{p+1} = V_p + DV_p^{-1}.$$

Montrer que pour tout p dans $\mathbb{N}$, V_p existe et est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à diagonale strictement positive.

Montrer que la suite $(V_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers une matrice diagonale Δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à diagonale strictement positive et telle que $\Delta^2 = D$ (fixer i dans $[\![1;n]\!]$ et considérer la suite $(d_i(p))_{p\geqslant 0}$ où $d_i(p)$ est l'élément d'indice i de la diagonale de V_p).

Q2. A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie positive.

$$U_0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall p \in \mathbb{N},\ 2U_{p+1} = U_p + AU_p^{-1}.$$

Montrer que la suite $(U_p)_{p\geqslant 0}$ converge vers (LA !) matrice symétrique définie positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le carré est A.

On retrouve ce thème dans oral ESCP 2011 2.13, dans ESCP MI 1998.

Exercice 46 $\boxed{S}$ Application des résultats précédents : décomposition polaire d'une matrice inversible.

On rappelle que si T est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives il existe une unique matrice symétrique R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives telle que $R^2 = T$.

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice orthogonale U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une unique matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives telles que $A = US$.

Indication on pourra faire une analyse-synthèse.

Thème abordé dans oral ESCP 2009 2.7.

Exercice 47 PC Application des résultats précédents again.

On rappelle que si T est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives il existe une unique matrice symétrique R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives telle que $R^2 = T$.

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives et B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres positives ou nulles.

Montrer que AB est une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

Indication $R^2B = R(RBR)R^{-1}$...

Exercice 48 PC Application des résultats précédents toujours.

C'est une seconde version du "$A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ ".

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à valeurs propres strictement positives et B une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q1. Montrer qu'il existe une matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie positive telle que $S^2 = A$.

Q2. Montrer qu'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pas nécessairement orthogonale !) et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$.

Indication considérer la matrice symétrique $S^{-1}BS^{-1}$.

Q3. Proposer une autre (? !) preuve en écrivant $A = {}^tMM$ avec M matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Thème abordé dans ESCP 2006 2.20

En Plus Oral ESCP 2011 2.13

Soit a un nombre réel strictement positif.

Q1. Montrer que l'on peut définir deux suites réelles strictement positives $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a$, $b_0 = 1$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{b_k}\right),\ b_{k+1} = \frac{1}{2}\left(b_k + \frac{1}{a_k}\right)$$

Q2. Établir une relation de récurrence vérifiée par les termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $u_k = a_k b_k$. En déduire que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

Q3. Montrer que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont proportionnelles et qu'elles convergent. Préciser leurs limites respectives.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *symétrique définie positive* lorsqu'elle est symétrique vérifiant $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ {}^tXSX > 0$.

Q4. a) Montrer que toute matrice symétrique définie positive est inversible et que son inverse est symétrique définie positive.

b) En déduire que, si A est une matrice symétrique définie positive donnée , on peut définir deux suites de matrices symétriques définies positives $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $A(0) = A$, $B(0) = I_n$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A(k+1) = \frac{1}{2}\left(A(k) + B(k)^{-1}\right),\ B(k+1) = \frac{1}{2}\left(B(k) + A(k)^{-1}\right)$$

Q5. Montrer que les suites $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser leurs limites.
NB : On dit qu'une suite de matrices $(U(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convergente lorsque, pour tout $i, j \in [\![1; n]\!]$, la suite $(u_{i,j}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ des coefficients de la i-ème ligne et de la j-ème colonne converge.

Complément $\boxed{10}$: Adjoint d'un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien.

Thème contenu dans Oral ESCP 2004 2.10, 2010 2.16, ECRICOME 2006 exercice 1, LYON 2001 Pb 2 partie II.

Exercice 49 $\boxed{S}$ ECRICOME 2006 exercice 1.

▸ Pour les amateurs d'exercices qui ne font pas mal à la tête.

Ici $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique $<.,.>$. On note $\mathcal{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Pour f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, de matrice M dans la base canonique, on note $f^\star$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est ${}^tM$.

1.1 Quelques propriétés de $f^\star$.

Dans cette question f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Q1. Montrer que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ <f(x), y> = <x, f^\star(y)>$.

Q2. Montrer que $f^\star$ est le seul endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^3)^2,\ <f(x), y> = <x, g(y)>$.

Q3. Soit F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ stable par f (c'est-à-dire tel que $f(F) \subset F$).

a. Pour $x \in F$ et $y \in F^\perp$, calculer $<x, f^\star(y)>$.

b. En déduire que $F^\perp$ est stable par $f^\star$.

1.2 Réduction des matrices d'un ensemble $\mathcal{E}$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes f_u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

où $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Q1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Q2. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $f_u^\star$ appartient à $\mathcal{E}$.

Q3. On note $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$; $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i - j)$; $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i + j - 2k)$ et D la droite de vecteur directeur e_1.

a. Montrer que e_1 est un vecteur propre commun aux éléments f_u de $\mathcal{E}$.

b. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, D est stable par f_u.

c. Déduire des questions précédentes que, pour tout $u \in \mathbb{R}^3$, $D^\perp$ est stable par f_u.

d. Déterminer une équation de $D^\perp$.

e. Montrer que (e_2, e_3) est une base orthonormée de $D^\perp$ et que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

f. Justifier alors que la matrice de f_u dans la base $\mathcal{B}'$ est de la forme $N_u = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & g \\ 0 & h & \ell \end{pmatrix}$ où e, f, g, h, ℓ sont des réels.

Exercice 50 $\boxed{S}$ Adjoint d'un endomorphisme.

▸ Très classique. A savoir faire.

$B = (e_1; e_2; \ldots; e_n)$ est une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien E et f est un endomorphisme de E de matrice A dans B. On note f^* l'endomorphisme de E de matrice ${}^tA$ dans B.

Q1. Montrer que $\forall (x; y) \in E^2;\ < f(x); y > = < x; f^*(y) >$.

Q2. Soit h un second endomorphisme de E vérifiant : $\forall (x; y) \in E^2;\ < f(x); y > = < x; h(y) >$. Montrer que $h = f^*$.

Q3. g est un endomorphisme de E. λ est un réel. Exprimer $(\lambda f)^*$, $(f + g)^*$ et $(g \circ f)^*$ en fonction de f^* et g^* (utiliser les matrices). Que vaut $(f^*)^* = f^{**}$?

Q4. a) Montrer que $\mathrm{Ker} f^* = (\mathrm{Im} f)^\perp$ et $\mathrm{Im} f^* = (\mathrm{Ker} f)^\perp$.

Montrer que $\mathrm{rg} f^* = \mathrm{rg} f$ et "retrouver" $\mathrm{rg}\, {}^tA = \mathrm{rg} A$.

Montrer que $\mathrm{Sp} f^* = \mathrm{Sp} f$ et "retrouver" $\mathrm{Sp}\, {}^tA = \mathrm{Sp} A$.

b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im}(f \circ f^*) = \mathrm{Im} f$.

Q5. Montrer que si f est un automorphisme de E, f^* est un automorphisme de E et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Q6. Montrer que $f^* \circ f$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont positives ou nulles.

Q7. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F est stable par f si et seulement si $F^\perp$ est stable par f^*.

Qu'en déduire pour les hyperplan stables par f ?

Exercice 51 PC LYON 2000 PB 1 partie II.

Bon entraînement. Sans doute à faire.

Ici $n \in [\![3; +\infty[\![$ et $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $< .;. >$. La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|.\|$. $B = (e_1; e_2; \ldots; e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A relativement à la base B et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice ${}^tA$ relativement à la base B.

1. Montrer, pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^n$:

$$< g(y); x > = < y; f(x) > \quad \text{puis} \quad < (g \circ f)(x); x > = \|f(x)\|^2.$$

2. Montrer que l'endomorphisme $g \circ f$ est symétrique.

3. Montrer que $g \circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

4. Justifier l'existence d'une base orthonormée $B' = (e'_1; e'_2; \ldots\ e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $g \circ f$.

On note Q la matrice de passage de la base B à la base B'.

5. Montrer l'existence de n réels positifs ou nuls $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n$ (non nécessairement distincts) tels que la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tAA = Q\Delta^2\, {}^tQ$.

6. Montrer que la famille $\left(f(e'_1); f(e'_2); \ldots; f(e'_n)\right)$ est une famille orthogonale et que pour tout entier j de $[\![1; n]\!]$, $\|f(e'_j)\| = \lambda_j$.

7. Dans cette question, on suppose que A est inversible.

a) Vérifier que les nombres réels $\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_n$ sont tous non nuls.

b) Montrer que la famille $C = \left(\dfrac{1}{\lambda_1} f(e'_1); \dfrac{1}{\lambda_2} f(e'_2); \ldots; \dfrac{1}{\lambda_n} f(e'_n)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

c) Soit R la matrice de passage de la base B à la base C. Montrer que $A = R\Delta\, {}^tQ$.

Complément $\boxed{11}$: Endomorphisme (resp. matrice) antisymétrique.

Thème abordé dans Oral ESCP 2002 2.17 2003 2.18, 2007 2.9, 2008 2.2, 2008 2.7, 2010 2.1, LYON 2002 PB 2.

$\boxed{\text{Exercice 52}}$ $\boxed{\text{PC}}$ Endomorphisme antisymétrique .

I Classique. Sans doute à faire.

$(E, < , >)$ est un espace vectoriel euclidien de dimension non nulle n.

f est un endomorphisme de E. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base <u>orthonormée</u> de E et $A = (a_{ij})$ est la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

On dit que f est un endomorphisme antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2,\ < f(x), y > = - < x, f(y) >$.

Q1. a) Montrer que f est atisymétrique si et seulement si A est symétrique autrement dit si et seulement si ${}^tA = -A$.

b) Montrer que f est atisymétrique si et seulement si $\forall x \in E,\ < x, f(x) > = 0$ (on pourra s'intéresser à $< f(x + y), x + y >$).

$\boxed{\text{Dans la suite } f \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } E.}$

Q2. a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$.

b) Montrer que $\operatorname{Sp} f \subset \{0\}$.

c) Montrer que $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset i\mathbb{R}$ (partir de $AX = \lambda X$ et calculer de deux manières ${}^t\overline{X}AX$).

d) Montrer que $f \circ f$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont négatives ou nulles.

e) Montrer que si F est un sous-espace vectoriel stable par f, $F^{\perp}$ est également stable par f.

Q3. Ici f est un endomorphisme antisymétrique non nul de E. g est l'application de $\operatorname{Im} f$ dans lui-même qui à x associe $f(x)$. On pose : $h = g^2$. g est clairement un endomorphisme antisymétrique de $\operatorname{Im} f$. Alors h est un endomorphisme symétrique de $\operatorname{Im} f$ dont les valeurs propres sont négatives ou nulles (et même mieux...) d'aprè Q2 d).

a) Soit v un vecteur propre de h.

Montrer que $(v, f(v))$ soit une famille orthogonale libre de $\operatorname{Im} f$.

b) On suppose qu'il existe une famille $(v_1, v_2, \dots, v_r)$ de vecteurs propres de h telle que $\big(v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_r, f(v_r)\big)$ soit une famille libre orthogonale et non génératrice de $\operatorname{Im} f$. Montrer que l'on peut trouver un vecteur propre v_{r+1} de h tel que $\big(v_1, f(v_1), v_2, f(v_2), \dots, v_{r+1}, f(v_{r+1})\big)$ soit une famille libre et orthogonale de $\operatorname{Im} f$.

En déduire qu'il existe une famille $(w_1, w_2, \dots, w_p)$ de vecteurs propres de h telle que $\big(w_1, f(w_1), w_2, f(w_2), \dots, w_p, f(w_p)\big)$ soit une base orthogonale de $\operatorname{Im} f$. Ainsi $\operatorname{rg} f$ est pair.

c) Montrer que l'on peut trouver une base orthonormé de E telle que la matrice de f dans cette base soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & (O) & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & -a_p & & & \\ & & & a_p & 0 & & & \\ & (O) & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

à un abus près.

Exercice 53 | S | Endomorphisme antisymétrique. LYON 2002 PB 2.

Bon entraînement. Sans doute à faire.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $< \, ; \, >$.

L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes u de E tels que :

$$\forall x \in E, \; < u(x), x > = 0$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

PARTIE I : Etude d'un exemple

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1, X, X^2)$ est une base de E.

On considère l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout couple (P, Q) d'éléments de E par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

Q1 Vérifier que φ est un produit scalaire.

Dans cette première partie, on considère que E est muni de ce produit scalaire.

Q2 On considère l'endomorphisme u de E défini pour tout P de E par :

$$u(P) = 2P'(0)X^2 - \big(P(1) + P(-1)\big)X.$$

a) Vérifier : $\forall P \in E, \; 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$.

b) En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E.

Q3 Soient $P_1 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \frac{1}{2}u(P_1)$.

a) Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille (P_1, P_2) est orthonormée.

b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

c) Déterminer une base orthonormée B de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE II : Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E.

Q1 Pour tout couple (x, y) de E^2, développer $< u(x + y), x + y >$.

En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \; < u(x), y > = - < x, u(y) > .$$

Q2 On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E, et $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$.

a) Montrer : $\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ m_{i,j} = < e_i, u(e_j) >$.

b) En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tM = -M$.

PARTIE III : Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

---

Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E.

On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question II.1.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit λ un nombre réel. Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.

En déduire que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et que toute valeur propre de u^2 est négative ou nulle.

$\boxed{\text{Q4}}$ a) Montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.
Soient x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, u(x))$.

b) Montrer que F est un plan vectoriel stable par u.

c) Montrer que $F^\perp$, le supplémentaire orthogonal de F, est stable par u.

d) On munit $F^\perp$ du produit scalaire $< \cdot, \cdot >_1$ défini pour tout couple (x, y) d'éléments de $F^\perp$ par

$$< x, y >_1 = < x, y >$$

On définit l'endomorphisme u_1 de $F^\perp$ par : $\forall x \in F^\perp,\ u_1(x) = u(x)$.

Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et que $\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

PARTIE IV : Application

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormée de E.

Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E.

Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\left(f_1, u(f_1)\right)$. Déterminer une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$.

$\boxed{\text{Q3}}$ En déduire une base orthonormée B_0 de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice associée à u relativement à B_0 soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 54 PC Matrice antisymétrique. Matrice orthogonale. Oral ESCP 1998 2-4.

n est un élément de $[\![2; +\infty[\![$ et M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que ${}^tM = -M$.

Q1. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX = 0$.

Q2. Montrer que $I_n + M$ est inversible.

Q3. On pose $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que ${}^tAA = I_n$. Ainsi A est une matrice orthogonale.

Q4. Récipoquement, soit A une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + A$ soit inversible.

Montrer que la matrice $H = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ vérifie ${}^tH = -H$.

Complément 12 : Des familles de polynômes orthogonaux classiques.

Exercice 55 Polynômes de Legendre.

Thème abordé dans oral ESCP 2008 2.12, 2011 2.3., ESSEC MI 1987, HEC 1996 MI.

Dans ce texte $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout élément n, de $\mathbb{N}$ $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

On pose $\forall (P,Q) \in E^2,\ < P,Q > = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,Q(t)\,dt$. $< .,. >$ est un produit scalaire sur E. On note $\|.\|$ la norme associée.

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = (X^2-1)^n$ et $P_n = \dfrac{1}{2^n\, n!} U_n^{(n)}$.

Q1 $\forall P \in E,\ L(P) = \big((X^2-1)P'\big)' = 2XP' + (X^2-1)P''$.

Montrer que L est un endomorphisme symétrique de $(E, < .,. >)$.

Q2 Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que si P est élément de E_n, $L(P)$ est encore un élément de E_n.

b) En déduire que L induit sur E_n un endomorphisme que nous noterons L_n.

Trouver la matrice M_n de L_n relativement à la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.

c) Donner les valeurs propres de L_n et montrer que cet endomorphisme est diagonalisable.

Q3 n est élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que P_n est de degré n et calculer le coefficient a_n du terme de plus haut degré de P_n.

b) Montrer que P_n a la parité de n.

c) Montrer que $P_n(1) = 1$ (on pourra remarquer que $X^2-1 = (X-1)(X+1)$!).

d) Calculer P_0, P_1 et P_2.

e) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n admet exactement n zéros distincts et que ces zéros sont dans $]-1,1[$ (on pourra itérer Rolle).

Q4 n est un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $U'_{n+1} - 2(n+1)XU_n = 0_E$ et que $(X^2-1)U'_n - 2nXU_n = 0_E$.

b) En dérivant $(n+1)$ fois les égalités précédentes, montrer que :

$$P'_{n+1} = XP'_n + (n+1)P_n \qquad (1)$$

$$\text{et que} \qquad L(P_n) = n(n+1)\,P_n \qquad (2).$$

Q5 Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n.

Q6 Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de L.

Q7 n est élément de $\mathbb{N}^*$. On pose $\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \big(P_n(x)\big)^2 + \dfrac{1-x^2}{n(n+1)}\big(P'_n(x)\big)^2$.

a) En utilisant (2), montrer que f_n est croissante.

b) En déduire que $\forall x \in [-1,1],\ |P_n(x)| \leqslant 1$.

Q8 n est un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P'_{n+1}(t)\,P_n(t)\,dt = (n+1)\,\frac{a_{n+1}}{a_n}\,\|P_n\|^2$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \big(P_n(t)\big)^2\,dt = 2 - 2\int_{-1}^{1} t\,P_n(t)\,P'_n(t)\,dt$.

c) En utilisant (1), en déduire que $\|P_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$

Q9 On pose $\forall k \in \mathbb{N},\ Q_k = \sqrt{\dfrac{2k+1}{2}}\,P_k$.

Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ est une base orthonormée de E_n.

Q10 n est élément de $\mathbb{N}^*$ et $Q_n = (n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n$.

a) Montrer que Q_n appartient à E_n. Préciser la parité de Q_n et calculer $Q_n(1)$.

b) Montrer que $< XP_n, P_k > = < P_n, XP_k > = 0$ pour tout élément k de $[\![0; n-2]\!]$.

c) En déduire qu'il existe deux réels α et β tels que $Q_n = \alpha P_n + \beta P_{n-1}$.

d) Montrer que $\alpha = 0$, $\beta = -n$ et que l'on a :

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)XP_n + nP_{n-1}.$$

Exercice 56 Polynômes de Tchebychev (de première espèce).

On pourra voir dans LYON 2005 PB 2 les polynômes de Tchebychev de seconde espèce. On trouve dans la partie II d'ESSEC MI 2000 ou dans ESSEC 1995 MI une propriété importante des polynômes de Tchebychev de première espèce.

Thème abordé dans oral ESCP 2001 2.2, 2006 2.10, 2009 2.17.

On rappelle que :

- $\theta \mapsto \cos\theta$ définit une bijection de $[0; \pi]$ sur $[-1; 1]$.
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ 2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

PARTIE I

Q1 n est un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = \sum_{k=0}^{E(n/2)} C_n^{2k}\,(\cos\theta)^{n-2k}\,(\cos^2\theta - 1)^k$$

(calculer la partie réelle de $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$).

Q2 n est un élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer qu'il existe un élément T_n de $\mathbb{R}[X]$ et un seul tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta).$$

b) Préciser la parité de T_n. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$. Donner le degré de T_n.

c) Expliciter T_0, T_1, T_2 et T_3.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$:

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

(on pourra commencer par montrer que ces deux polynômes coïncident en $\cos\theta$).

$\boxed{\text{Q4}}$ $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si k est élément de $[\![0;n-1]\!]$, $y_k = \cos\left(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}\right)$ est une racine de T_n.

En déduire avec beaucoup de soin que T_n admet exactement n racines réelles distinctes et que ces racines sont dans l'intervalle $]-1;1[$.

$\boxed{\text{Q5}}$ $n \in \mathbb{N}^*$. Préciser le maximum et le minimum de T_n sur $[-1;1]$. Montrer que la fonction T_n atteint sur $[-1;1]$ ses extremums en $n+1$ points que l'on déterminera.

PARTIE II

Dans cette partie E est l'espace vectoriel des applications continues de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrer que pour tout élément u de E, $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{\pi} u(\cos\theta)\,d\theta$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Pour tout couple (f,g) d'éléments de E on pose : $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$.

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

$\boxed{\text{Dans la suite nous noterons } <.,.> \text{ ce produit scalaire et } N \text{ la norme associée}}$.

Dans la suite encore, F *est le sous espace vectoriel de* E *constitué par les applications polynômiales de* $[-1;1]$ *dans* $\mathbb{R}$*. Si* n *appartient à* $\mathbb{N}$, F_n *est le sous-espace de* F *constitué par les applications polynômiales de* $[-1;1]$ *dans* $\mathbb{R}$ *de degré au plus* n*. On pourra confondre* F *et* $\mathbb{R}[X]$ *(resp.* F_n *et* $\mathbb{R}_n[X]$*)...*

On se propose, pour ω *dans* $\mathbb{N}$*, de trouver l'ensemble* S_ω *des éléments* P *de* F *tels que :*

$$\forall x \in [-1;1],\ (1-x^2)\,P''(x) - x\,P'(x) + \omega^2 P(x) = 0.$$

$\boxed{\text{Q3}}$ n est élément de $\mathbb{N}$.

Montrer que $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de F_n (on pourra poser $t = \cos\theta$ ...).

En déduire que si n n'est pas nul, T_n est orthogonal à F_{n-1}.

Calculer la norme $N(T_n)$ de T_n.

$\boxed{\text{Q4}}$ Φ est l'application qui à tout élément P de F associe $\Phi(P)$ défini(e) par

$$\forall x \in [-1;1],\ \Phi(P)(x) = (1-x^2)P''(x) - xP'(x).$$

a) Montrer que Φ est un endomorphisme de F.

b) P est un élément de F. Préciser la dérivée de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}\,P'(x)$ sur $]-1;1[$ (on pourra l'exprimer en fonction de $\Phi(P)$).

c) Soit P un élément de $\mathrm{Ker}\,\Phi$. Montrer proprement que P' est nulle. Déterminer le noyau de Φ.

$\boxed{\text{Q5}}$ P et Q sont deux éléments de F. Montrer que :

$$<\Phi(P), Q> = <P, \Phi(Q)>$$

(utiliser proprement Q4b)).

Q6 n est élément de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que F_n est stable par Φ. Φ_n est l'application de F_n dans F_n qui à P dans F_n associe $\Phi(P)$.
Montrer très simplement que Φ_n est un endomorphisme diagonalisable de F_n.

b) Ici n n'est pas nul. Montrer que si P est élément de F_n, il existe un réel λ tel que : $\Phi_n(P) + \lambda P \in F_{n-1}$.

Montrer que si de plus P est orthogonal à F_{n-1} alors il en est de même pour $\Phi_n(P) + \lambda P$.

Montrer dans ce cas que : $\Phi_n(P) + \lambda P = 0$.

c) Montrer que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $\Phi_n(T_n) + n^2 T_n = \Phi(T_n) + n^2 T_n = 0$.

Q7 n est dans $\mathbb{N}$. Trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de Φ_n.

Q8 Répondre au problème posé.

Voir la suite du problème dans le sujet 3 de la sélection.

Exercice 57 Polynôme de Laguerre.

Thème abordé dans problème d'EDHEC 1998, LYON 1998, LYON 2011, oral ESCP 2011 2.11.

Ce qui suit est constitué des parties II et III de LYON 2011. Pour un texte plus ambitieux sur le sujet voir le sujet dans les problèmes de bilinéaire ou dans la slection proposée (sujet 5).

Partie II : Polynômes de Laguerre

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

$$L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^x f_n^{(n)}(x),$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n^{eme} de f_n.

6. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.

7. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

9. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

10. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$$

11. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

12. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (n+1) L_{n+1}(x) = x L'_n(x) + (n+1-x) L_n(x).$$

13. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x L_n''(x) - (x-1) L_n'(x) + n L_n(x) = 0.$$

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On note E_N le sous-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N.

14. Montrer que, pour tout $A \in E$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\, dx$ converge.

On considère l'application

$$< .,. > : E \times E \to \mathbb{R},\ (P,Q) \mapsto < P,Q > = \int_0^{+\infty} P(x)\, Q(x)\, e^{-x}\, dx.$$

15. Montrer que $< .,. >$ est un produit scalaire sur E.

On considère, pour tout $P \in E$, l'application $T(P) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(P)(x) = x P''(x) - (x-1) P'(x).$$

16. Vérifier que T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

17. Montrer que, pour tout $P \in E$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto T(P)(x)\, e^{-x}$ est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \mapsto x P'(x)\, e^{-x}$.

18. En déduire, pour tout $(P,Q) \in E \times E$:

$$< T(P),Q > = -\int_0^{+\infty} x P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, dx.$$

19. Établir : $\forall (P,Q) \in E \times E,\ < T(P),Q > = < P,T(Q) >$.

20. En utilisant le résultat de la question 13, calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $T(L_n)$.

21. En déduire que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_N)$ est orthogonale.

22. Montrer :

$$\forall P \in E_N,\ T(P) \in E_N.$$

On note T_N l'endomorphisme induit par T sur E_N, c'est à dire l'endomorphisme T_N de E_N défini par :

$$\forall P \in E_N,\ T_N(P) = T(P).$$

23. Montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_N)$ est une base de E_N.

24. Donner la matrice de T_N dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_N)$.

25. Est-ce que T_n est diagonalisable ? Est-ce que T_n est bijectif ?

Exercice 58 Polynôme d'Hermite. ESSEC 2002.

Ce qui suit est la partie I d'ESSEC 2002. On peut aussi voir ESCP MI 1997, LYON 2008, oral ESCP 2007 2.3, 2007 2.12.

On aura intérêt à remplacer, lorsque cela est possible, x par X.

Dans la suite, on désigne par n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire lorsque son coefficient dominant (c'est à dire le coefficient de son terme de plus haut degré) est égal à 1.

1) Définition d'un endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$

a) Établir que l'application φ associant à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ le polynôme $\varphi(P) = 2xP' - P''$ (où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P) est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Écrire sa matrice dans la base canonique $(1; x; x^2; \dots; x^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Eléments propres de l'endomorphisme φ

a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_0; \lambda_1; \dots; \lambda_n$ de φ (on supposera que $\lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ et montrer que φ est diagonalisable.

b) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, qu'il existe un et un seul polynôme unitaire H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$H_p'' - 2xH_p' + 2pH_p = 0$$

c) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, que H_p est nécessairement de degré p.

d) Expliciter les polynômes H_0; H_1; H_2; H_3 dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer les coefficients de x^{p-1} $(1 \leqslant p \leqslant n)$ et de x^{p-2} $(2 \leqslant p \leqslant n)$ dans l'expression du polynôme H_p.

3) Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

a) Montrer que l'intégrale écrite ci-dessous est définie pour tout couple $(P; Q)$ de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$< P; Q > = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,e^{-x^2}\,dx$$

b) Montrer alors que l'application $(P; Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to < P; Q > \in \mathbb{R}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Exprimer la dérivée de $x \mapsto P'(x)\,e^{-x^2}$ en fonction de $\varphi(P)(x)\,e^{-x^2}$, puis prouver qu'on a pour tout couple $(P; Q)$ de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$< \varphi(P); Q > = < P; \varphi(Q) >$$

d) En déduire que $< H_p; H_q > = 0$ lorsque p et q sont deux nombres entiers distincts compris entre 0 et n, puis que $(H_0; H_1; \dots; H_n)$ forme une base orthogonale pour ce produit scalaire.

Montrer enfin que $< H_p; Q > = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-1}[X]$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$.

4) Etude des racines des polynômes H_p $(1 \leqslant p \leqslant n)$

a) Montrer, en remarquant que $< H_p; H_0 > = 0$, que le polynôme H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe.

b) On note $a_1; a_2; \dots; a_m$ les racines distinctes de H_p en lesquelles celui-ci s'annule et change de signe (avec bien entendu $m \leqslant p$) et on pose alors $P_m(x) = (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_m)$.

Étudier le signe du polynôme H_pP_m et déterminer la valeur de l'intégrale $< H_p; P_m >$ si $m < p$, puis en déduire que $m = p$.

c) En déduire que le polynôme H_p admet p racines simples dans $\mathbb{R}$.

5) Relations entre les polynômes H_p $(2 \leqslant p \leqslant n)$

a) Prouver les égalités suivantes pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-3}[X]$ où $3 \leqslant p \leqslant n$:

$$< xH_{p-1}, Q > = 0 \qquad ; \qquad < H_p - xH_{p-1}, Q > = 0$$

En exprimant le polynôme $H_p - xH_{p-1}$ dans la base $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$, établir la relation :

$$2H_p - 2xH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0 \quad (\text{pour } 2 \leqslant p \leqslant n)$$

b) Prouver l'égalité $< H'_p, Q > = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $\mathbb{R}_{p-2}[X]$ où $2 \leqslant p \leqslant n$, puis en déduire la relation :

$$H'_p = pH_{p-1} \quad (\text{pour } 1 \leqslant p \leqslant n)$$

Exercice 59 Polynôme de Jacobi.

Thème abordé dans oral ESCP 2000 2-2

PARTIE I ETUDE D'UN ENDOMORPHISME

On pose : $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \varphi(P) = (X^2-1)P'' + (2X+1)P'$.

Q1 Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

Q2 n est un élément de $\mathbb{N}$ et φ_n est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi_n(P) = \varphi(P)$.

a) Ecrire la matrice de φ_n dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Déterminer les valeurs propres de φ_n. Montrer que φ_n est diagonalisable.

Q3 a) Montrer très proprement, par double inclusion, que l'ensemble des valeurs propres de φ est : $\{k(k+1)\ ;\ k \in \mathbb{N}\}$.

Préciser la dimension des sous-espaces propres de φ.

b) Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire P_k et un seul qui soit vecteur propre de φ associé à la valeur propre $k(k+1)$. Montrer que P_k est de degré k.

c) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3 (aujourd'hui P_3 est facultatif).

d) Préciser le coefficient de X^{k-1} dans P_k pour k élément de $[\![1, +\infty[\![$.

Montrer que si k est élément de $[\![2, +\infty[\![$, le coefficient de X^{k-2} dans P_k est : $\dfrac{1-k}{4}$

e) Montrer que, pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE II UN PRODUIT SCALAIRE CLASSIQUE

Dans cette partie E est l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

Q1 Montrer que pour tout élément h de E, $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ existe.

Q2 On pose : $\forall (f, g) \in E^2,\ < f, g > = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$.

Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur E. Nous noterons $\|.\|$ la norme associée.

Q3 Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que $<\varphi(P);Q> = \int_{-1}^{1}(1-t)^{\frac{3}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}}P'(t)\,Q'(t)\,dt$ (on pourra commencer à intégrer par parties $\int_a^b \Big((t^2-1)P''(t)+2tP'(t)\Big)Q(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ en remarquant que la première parenthèse est une dérivée ; être patient...).

b) En déduire alors que $<\varphi(P);Q> = <P;\varphi(Q)>$.

c) Montrer alors que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

En déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\boxed{\text{Q4}}$ On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}$ $I_n = \int_{-1}^{1} t^n\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos(2\theta)\big)^n\,d\theta$.

a) Montrer que pour tout élément h de E : $\int_{-1}^{1} h(t)\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} h\big(\cos(2\theta)\big)(\sin\theta)^2\,d\theta$.

b) n est un élément de $\mathbb{N}$. Exprimer I_n en fonction de J_n et de J_{n+1}.

c) Calculer J_0 et J_1. Exprimer J_n en fonction de J_{n-2} pour tout élément n de $[\![2;+\infty[\![$.

Calculer J_{2p} et J_{2p+1} pour tout p dans $\mathbb{N}$.

d) Montrer que $\forall p\in\mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{[2^p\,p!]^2}\pi$ et $I_{2p+1} = -\frac{(2p+2)!}{[2^{p+1}(p+1)!]^2}\pi$.

PARTIE III ETUDE DE LA SUITE $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

a) En remarquant que $<P_n;1> = 0$, montrer que P_n admet au moins un zéro d'ordre de multiplicité impair dans $]-1;1[$.

b) Soient x_1, x_2, ..., x_p les zéros de P_n d'ordre de multiplicité impair situés dans $]-1;1[$ (x_1, x_2, ..., x_p sont deux à deux distincts).

En remarquant que $(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_p)\,P_n$ garde un signe constant sur $]-1;1[$ montrer que l'on ne peut pas avoir $p<n$.

En déduire que $p=n$ et que $P_n = (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ \forall Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X];\ <Q;P_{n+2}-XP_{n+1}> = 0$ (remarquer que $<A;BC> = <AB;C>$ ...).

b) Préciser le terme de plus haut degré de $P_{n+2}-XP_{n+1}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ (utiliser I Q3 d)).

c) Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Montrer que $P_{n+2}-XP_{n+1}$ est combinaison linéaire de la famille $(P_0;P_1;\dots;P_n)$ puis de la famille (P_n) !

Montrer que $P_{n+2}-XP_{n+1} = -\frac{1}{4}P_n$.

$\boxed{\text{Q3}}$ a) calculer $P_{2p}(0)$ et $P_{2p+1}(0)$ pour tout élément p de $\mathbb{N}$.

b) Montrer, en gérant une suite définie par une relation linéaire de récurrence d'ordre 2, que $\forall n\in\mathbb{N};\ P_n(1) = \frac{2n+1}{2^n}$

$\boxed{\text{Q4}}$ n appartient à $\mathbb{N}$. Montrer que :

a) $<P_n;P_n> = <P_n;X^n>$;

b) $<P_n;X^{n+1}> = -\frac{1}{2}<P_n;P_n>$;

c) $< P_n ; X^{n+2} > = \dfrac{n+2}{4} < P_n ; P_n >$.

$\boxed{\text{Q5}}$ On pose pour tout élément n de $\mathbb{N}$, $u_n = < P_n ; P_n >$.

a) Utiliser II Q4 pour calculer u_0 et u_1.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+2} - \dfrac{n+3}{4} u_{n+1} = \dfrac{n+2}{16} u_n$.

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N};\ \|P_n\| = \dfrac{\sqrt{}}{2^n}$

PARTIE IV APPROXIMATION D'UN ELEMENT DE E PAR UNE SUITE DE POLYNÔMES

Soit f un élément de E.

$\boxed{\text{Q1}}$ n est un élément de $\mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique élément S_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - S_n\|$ soit minimal.

Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{< f ; P_k >}{\|P_k\|^2} P_k$. Exprimer $\|f - S_n\|^2$ en fonction de $\|f\|^2$ et $\|S_n\|^2$. Calculer $\|S_n\|^2$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrer que la série de terme général $\dfrac{(< f ; P_k >)^2}{\|P_k\|^2}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(< f ; P_k >)^2}{\|P_k\|^2} \leqslant \|f\|^2$.

> Soit g une fonction numérique continue sur un segment $[a;b]$. Le théorème de Weirstrass indique que pour tout réel strictement positif ε', il existe un élément $P_{\varepsilon'}$ de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\displaystyle\max_{t \in [a;b]} |g(t) - P_{\varepsilon'}(t)| < \varepsilon'$.

$\boxed{\text{Q3}}$ On se propose de montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \|f - S_n\| = 0$. Soit ε un réel strictement positif.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $\|f - Q\| < \varepsilon$.

b) En déduire qu'il existe p dans $\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in [\![p; +\infty[\![;\ \|f - S_n\| < \varepsilon$. Conclure.

c) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(< f ; P_k >)^2}{\|P_k\|^2} = \|f\|^2$.

$\boxed{\text{Exercice 60}}$ **PC** D'une utilisation classique d'une famille de polynômes orthogonaux.

Dans tout le problème n est un élément de $[\![2; +\infty[\![$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont n éléments de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leqslant b$.

p est une fonction numérique continue et strictement positive sur $]a;b[$ telle que $\displaystyle\int_a^b t^k p(t)\,dt$ converge pour tout élément k de $\mathbb{N}$.

> On est prié de remarquer que toutes les intégrales qui interviennent dans ce texte sont des intégrales généralisées.

PARTIE I

$\boxed{\text{Q0}}$ Montrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)\,p(t)\,dt$ existe pour tout élément P de $\mathbb{R}[X]$.

$\boxed{\text{Q1}}$ $U = (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n)$.

Pour tout i élément de $[\![1;n]\!]$, U_i est le quotient de U par $X - x_i$ et $L_i = \dfrac{1}{U_i(x_i)} U_i$.

a) Evaluer $L_i(x_j)$ pour i et j dans $[\![1;n]\!]$. Montrer que $(L_1; L_2; \ldots; L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que les coordonnées d'un élément P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans cette base sont $(P(x_1); P(x_2); \ldots; P(x_n))$.

b) Montrer qu'il existe un unique élément $(a_1;a_2;\dots;a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_a^b P(t)\,p(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n} a_k\,P(x_k)$$

(on pourra procéder par analyse-synthèse en se servant de la base $(L_1;L_2;\dots;L_n)$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$).

Désormais, pour tout élément k de $[\![1;n]\!]$, $a_k=\displaystyle\int_a^b L_k(t)\,p(t)\,dt$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Dans cette question $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont réels}}$ et f est une fonction numérique continue sur $[a;b]$.

a) Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)p(t)\,dt$ converge.

b) On pose $P_f=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,L_k$. Montrer que P_f est l'unique élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k\in[\![1;n]\!],\ P_f(x_k)=f(x_k)$.

Ainsi pourrons-nous approximer $\displaystyle\int_a^b f(t)\,p(t)\,dt$ par $\displaystyle\int_a^b P_f(t)\,p(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$. La question suivante consiste à trouver un majorant de l'erreur résultant de cette approximation.

$\boxed{\text{Q3}}$ Ici a et b sont encore deux réels et f est une fonction numérique de classe C^n sur $[a;b]$.

On pose $M_n=\displaystyle\sup_{t\in[a;b]}|f^{(n)}(t)|=\max_{t\in[a;b]}|f^{(n)}(t)|$ et pour tout élément t de $[a;b]$, $g(t)=f(t)-P_f(t)-A\,U(t)$ où A est un réel.

a) Montrer que g est de classe C^n sur $[a;b]$ et que pour tout t dans $[a;b]$

$$g^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)-A\,n!$$

b) $\boxed{\text{On fixe } x}$ dans $[a;b]-\{x_1;x_2;\dots;x_n\}$. Trouver A pour que $g(x)=0$ (faire simple). On suppose désormais que A a cette valeur. Ainsi x_1, x_2, ..., x_n et x sont $n+1$ zéros distincts de g.

c) Montrer par récurrence que pour tout élément k de $[\![1;n]\!]$, $g^{(k)}$ possède au moins $n-k+1$ zéro(s) dans $]a;b[$ (utiliser Rolle).

d) Montrer alors que : $\exists\,\theta_x\in\,]a;b[\,;\ f(x)-P_f(x)=\dfrac{f^{(n)}(\theta_x)}{n!}\,U(x)$.

Montrer que ceci vaut encore si x appartient à $\{x_1;x_2;\dots;x_n\}$.

e) Montrer enfin que $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)p(t)\,dt-\sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)\right|\leqslant\dfrac{M_n}{n!}\displaystyle\int_a^b |U(t)|p(t)\,dt$.

PARTIE II

On rappelle qu'un polynôme non nul est unitaire ou $\boxed{\text{normalisé}}$ si le coefficient de son terme de plus haut degré est 1.

On garde les notations de la partie précédente. En particulier $U=(X-x_1)(X-x_2)\dots(X-x_n)$ et $(a_1;a_2;\dots;a_n)$ est toujours l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \int_a^b P(t)\,p(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n} a_k\,P(x_k).$$

Le but de cette partie est de voir de quelle manière on peut choisir les points x_1, x_2, ..., x_n pour que la formule précédente soit encore vraie pour les éléments de $\mathbb{R}_{n-1+q}[X]$ avec q le plus grand possible et de voir ensuite les effets de l'amélioration de la formule sur l'approximation étudiée dans I Q3. On pourra observer que les outils développés dans le cours d'algèbre bilinéaire font ici le maximum.

$\boxed{\text{Q1}}$ Si $(P;Q)$ est un couple d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ on pose :

$$<P;Q> = \int_a^b P(t)\,Q(t)\,p(t)\,dt.$$

Montrer que $<.;.>$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|.\|$ la norme associée.

$\boxed{\text{Q2}}$ Ici q est dans $\mathbb{N}^*$ et on suppose que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1+q}[X];\quad \int_a^b P(t)\,p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k\,P(x_k).$$

a) Montrer alors que : $\forall k \in [\![0;q-1]\!]$; $\displaystyle\int_a^b t^i\,U(t)\,p(t)\,dt = 0$. En déduire que U un polynôme normalisé (ou unitaire) de $\mathbb{R}_n[X]$ orthogonal à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$.

b) On suppose que $q > n$. Utiliser ce qui précède pour montrer que U (ou $<U;U>$) est nul et en déduire une contradiction !

Ainsi on ne peut espérer plus que $q = n$! Autrement dit au mieux on ne pourra étendre la formule de IQ1.b qu'aux éléments de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Montrons que le mieux est possible.

$\boxed{\text{Q3}}$ a) Soit r un élément de $\mathbb{N}^*$. Montrer que l'orthogonal de $\mathbb{R}_{r-1}[X]$ $\boxed{\text{dans } \mathbb{R}_r[X]}$ est une droite vectorielle que nous noterons D_r.

En déduire qu'il existe un polynôme normalisé (ou unitaire) P_r de $\mathbb{R}_r[X]$ et un seul orthogonal à $\mathbb{R}_{r-1}[X]$. Montrer que le degré de P_r est r.

b) On pose $P_0 = 1$. Montrer que, pour tout m dans $\mathbb{N}$, $(P_0;P_1;\dots;P_m)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_m[X]$.

$\boxed{\text{Q4}}$ a) Utiliser Q2a) pour montrer que $\boxed{\text{si}}$: $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$; $\displaystyle\int_a^b P(t)\,p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k\,P(x_k)$ $\boxed{\text{alors}}$ x_1, x_2, ..., x_n sont les zéros de P_n.

b) Réciproquement on suppose que x_1, x_2, ..., x_n sont les zéros de P_n (notons que pour l'instant rien n'indique que P_n admet n zéros distincts entre a et b...).
Soient P un élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$, Q et R le quotient et le reste dans la division de P par P_n.

Comparer $P(x_k)$ et $R(x_k)$ pour tout k dans $[\![1;n]\!]$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b P(t)\,p(t)\,dt = \int_a^b R(t)\,p(t)\,dt$. En déduire que : $\displaystyle\int_a^b P(t)\,p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k\,P(x_k)$. Conclure.

PARTIE III

Dans cette partie on se propose d'établir une formule de récurrence permettant d'obtenir les P_r, de montrer que P_n admet n racines réelles distinctes appartenant à l'intervalle $]a;b[$ et de revenir sur l'approximation étudiée dans IQ3.

$\boxed{\text{Q1}}$ On rappelle que $(P_r)_{r\geqslant 0}$ est une suite d'éléments unitaires de $\mathbb{R}[X]$ deux à deux orthogonaux et que P_r est de degré r pour tout élément r de $\mathbb{N}$. Ici m appartient à $\mathbb{N}^*$ (ou $[\![2;+\infty[\![$ si vous y tenez).

a) Montrer que XP_m est combinaison linéaire de la famille $(P_0;P_1;\dots;P_m;P_{m+1})$.
Montrer en fait qu'il existe trois réels α_m, β_m et γ_m tels que :

$$XP_m = \alpha_m\,P_{m-1} + \beta_m\,P_m + \gamma_m\,P_{m+1}$$

(prendre i dans $[\![0;m-2]\!]$ montrer que $<XP_m;P_i> = <P_m;XP_i> = 0$ et utiliser ce qui précède).

b) Montrer que : $\alpha_m = 1$, $\beta_m = \dfrac{<XP_m;P_m>}{\|P_m\|^2}$ et $\gamma_m = \dfrac{\|P_m\|^2}{\|P_{m-1}\|^2}$

En déduire que :

$$P_{m+1} = \left(X - \frac{<XP_m;P_m>}{\|P_m\|^2}\right) P_m - \frac{\|P_m\|^2}{\|P_{m-1}\|^2} P_{m-1}.$$

$\boxed{\text{Q2}}$ s est le nombre de racines d'ordre de multiplicité impair de P_n appartenant à $]a;b[$.

Si $s=0$ on pose $P=1$. Dans le cas contraire on pose $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{s}(X-y_i)$ où y_1, y_2, ..., y_s sont les racines d'ordre de multiplicité impair de P_n appartenant à $]a;b[$ $(y_1 < y_2 < \cdots < y_s)$.

Justifier rapidement que $P\,P_n$ garde un signe constant sur $]a;b[$ et que ce polynôme n'est pas nul.

En déduire que $\displaystyle\int_a^b P(t)\,P_n(t)\,p(t)\,dt$ n'est pas nul et donc que $s=n$. Conclure.

Dans la suite x_1, x_2, ..., x_n sont les zéros de P_n.

$\boxed{\text{Q3}}$ Dans cette question a et b sont réels et f est une fonction numérique dérivable sur $[a;b]$.

a) Montrer qu'il existe un unique élément Q_f de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\ Q_f(x_k) = f(x_k) \quad\text{et}\quad Q_f'(x_k) = f'(x_k)$$

(on pourra sans doute établir un isomorphisme entre $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^{2n}$)

b) Montrer que $\displaystyle\int_a^b Q_f(t)\,p(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$.

c) Montrer que $Q_f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)L_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\Big[f'(x_i) - 2f(x_i)L_i'(x_i)\Big](X-x_i)\,L_i^2$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Dans cette question a et b sont réels et f est une fonction numérique de classe C^{2n} sur $[a;b]$.

On pose $M_{2n} = \displaystyle\sup_{t\in[a;b]} |f^{(2n)}(t)| = \max_{t\in[a;b]} |f^{(2n)}(t)|$ et pour tout élément t de $[a;b]$, $h(t) = f(t) - Q_f(t) - A\,P_n^2(t)$ où A est un réel.

a) Montrer que h est de classe C^{2n} sur $[a;b]$ et préciser $h^{(2n)}$.

b) On fixe x dans $[a;b] - \{x_1;x_2;\dots;x_n\}$. Après avoir choisi A de manière à ce que $h(x)=0$, montrer que h' possède au moins $2n$ zéros dans $]a;b[$. Montrer que $h^{(2n)}$ admet au moins un zéro dans $]a;b[$.

Montrer que : $\forall x \in [a;b]$, $\exists \xi_x \in]a;b[$, $f(x) - Q_f(x) = \dfrac{f^{(2n)}(\xi_x)}{(2n)!}\,P_n^2(x)$.

c) Montrer enfin que $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)p(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)\right| \leqslant \dfrac{M_{2n}\,\|P_n\|^2}{(2n)!}$
