
PREMIER PROBLÈME

Partie I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. $T_2 = 2X T_1 - T_0 = 2X(2X) - 1 = 4X^2 - 1$ et $T_3 = 2X T_2 - T_1 = 2X(4X^2 - 1) - 2X = 8X^3 - 4X$.

$$\boxed{T_1 = 4X^2 - 1 \text{ et } T_2 = 8X^3 - 4X.}$$

2. **a. et b.** Observons que, si n appartient à \mathbb{N} , pour montrer que T_n a la parité de n il suffit de prouver que $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

Dès lors montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2 que, pour tout élément n de \mathbb{N} , T_n est un polynôme à coefficients réels de degré n qui vérifie $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

- Comme $T_0 = 1$ et $T_1 = 2X$ la propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.
- Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$; supposons la propriété vraie pour $n - 2$ et pour $n - 1$. Montrons la alors pour n .

T_{n-1} est un polynôme à coefficients réels de degré $n - 1$ donc $2X T_{n-1}$ est un polynôme à coefficients réels de degré n . Comme T_{n-2} est un polynôme à coefficients réels de degré $n - 2$ (strictement inférieur à n), $T_n = 2X T_{n-1} - T_{n-2}$ est un polynôme à coefficients réels de degré n . De plus :

$$T_n(-X) = 2(-X)T_{n-1}(-X) - T_{n-2}(-X) = -2X(-1)^{n-1}T_{n-1}(X) - (-1)^{n-2}T_{n-2}(X).$$

En observant que $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, on obtient : $T_n(-X) = (-1)^n(2X T_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)) = (-1)^n T_n(X)$.

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, T_n \text{ est un polynôme à coefficients réels de degré } n \text{ qui a la parité de } n.}$$

Pour tout n dans \mathbb{N} , notons a_n le coefficient de X^n dans T_n . $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ et $a_3 = 8$.

$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $T_n = 2X T_{n-1} - T_{n-2}$ donc $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $a_n = 2a_{n-1}$. Ainsi $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $a_1 = 2$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 2^{n-1} a_1 = 2^n$. Notons que ce résultat vaut encore pour $n = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, \text{ le coefficient du terme de degré } n \text{ de } T_n \text{ est } 2^n.}$$

3. $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $T_n(1) = 2T_{n-1}(1) - T_{n-2}(1)$ donc $\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $T_n(1) - T_{n-1}(1) = T_{n-1}(1) - T_{n-2}(1)$. $(T_n(1) - T_{n-1}(1))_{n \geq 1}$ est donc une suite constante.

Ainsi $\forall n \in \llbracket 1, +\infty \llbracket$, $T_n(1) - T_{n-1}(1) = T_1(1) - T_0(1) = 2 - 1 = 1$. $(T_n(1))_{n \geq 0}$ est alors une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $T_0(1) = 1$. Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(1) = 1 + n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T_n(1) = n + 1.}$$

Remarque On pouvait également observer que la suite $(T_n(1))_{n \geq 0}$ vérifie une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 dont l'équation caractéristique admet 1 pour unique racine.

4. a. Soit θ un élément de $]0, \pi[$. Notons que $\sin \theta$ n'est pas nul.

Montrons à l'aide d'une récurrence d'ordre 2, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$.

• $T_0(\cos \theta) = 1 = \frac{\sin \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin((0+1)\theta)}{\sin \theta}$. La propriété est vraie pour $n = 0$.

$T_1(\cos \theta) = 2 \cos \theta = \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(2\theta)}{\sin \theta} = \frac{\sin((1+1)\theta)}{\sin \theta}$. La propriété est vraie pour $n = 1$.

• Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \llbracket$; supposons la propriété vraie pour $n - 2$ et pour $n - 1$.

$$T_n(\cos \theta) = 2 \cos \theta T_{n-1}(\cos \theta) - T_{n-2}(\cos \theta) = 2 \cos \theta \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta} - \frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin \theta}.$$

Rappelons que $2 \cos \theta \sin(n\theta) = 2 \sin(n\theta) \cos \theta = \sin(n\theta + \theta) + \sin(n\theta - \theta) = \sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta)$.

Alors : $T_n(\cos \theta) = \frac{2 \cos \theta \sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sin \theta} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in]0, \pi[, T_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.}$$

b. Soit n un élément de \mathbb{N}^* . Soit θ un élément de $]0, \pi[$.

$$T_n(\cos \theta) = 0 \iff \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} = 0 \iff \sin((n+1)\theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, (n+1)\theta = k\pi.$$

$$T_n(\cos \theta) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n+1}. \text{ Notons que } \theta \text{ est dans }]0, \pi[.$$

$$\text{Ainsi, } T_n(\cos \theta) = 0 \iff \exists k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \theta = \frac{k\pi}{n+1}.$$

Posons alors, pour tout élément k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$ et $x_k = \cos \theta_k$.

x_1, x_2, \dots, x_n sont des racines réelles de T_n .

$0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \pi$ et \cos est strictement décroissante sur $]0, \pi[$, donc $1 > x_1 > x_2 > \dots > x_n > -1$.

Alors x_1, x_2, \dots, x_n sont n racines réelles deux à deux distinctes de T_n , appartenant à $] -1, 1[$.

Notons que comme T_n est de degré n , T_n n'a pas d'autres racines.

$$T_n \text{ admet } n \text{ racines réelles, toutes situées dans }]-1, 1[\text{ qui sont : } \cos \frac{\pi}{n+1}, \cos \frac{2\pi}{n+1}, \dots, \cos \frac{n\pi}{n+1}.$$

c. Soit n un élément de \mathbb{N}^* . En conservant les notations de b), on peut dire que le polynôme $Q_n = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$ divise T_n car x_1, x_2, \dots, x_n sont n racines deux à deux distinctes de T_n .

Comme Q_n et T_n sont tous les deux de degré n , il existe un réel λ tel que $T_n = \lambda Q_n$.

Le coefficient de X^n dans T_n est 2^n et c'est λ dans λQ_n . Alors $\lambda = 2^n$.

$$\text{Ainsi } T_n = 2^n Q_n = 2^n \prod_{k=1}^n (X - x_k) = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

d. Soit n un élément de \mathbb{N}^* . $T_n(1) = 2^n \prod_{k=1}^n \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right)$.

Rappelons que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

$$\text{Alors } T_n(1) = 2^n \prod_{k=1}^n \left(2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} \right) = 2^n 2^n \prod_{k=1}^n \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}.$$

$$\text{Ainsi } n+1 = T_n(1) = \left(2^n \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \right)^2, \text{ donc } 2^n \left| \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \right| = \sqrt{n+1}.$$

$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{k\pi}{2(n+1)} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ [Donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sin \frac{k\pi}{2(n+1)} > 0$. Par conséquent $\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} > 0$.

$$\text{Finalement } 2^n \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} = \sqrt{n+1} \text{ ou } \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}.$$

5. a. Soit n un élément de \mathbb{N} . $\forall \theta \in]0, \pi[$, $T_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$.

Donc $\forall \theta \in]0, \pi[$, $\sin \theta T_n(\cos \theta) - \sin((n+1)\theta) = 0$.

En dérivant on obtient : $\forall \theta \in]0, \pi[$, $\cos \theta T_n(\cos \theta) + \sin \theta (-\sin \theta) T_n'(\cos \theta) - (n+1) \cos((n+1)\theta) = 0$.

Ainsi : $\forall \theta \in]0, \pi[$, $\cos \theta T_n(\cos \theta) - \sin^2 \theta T_n'(\cos \theta) - (n+1) \cos((n+1)\theta) = 0$.

En dérivant encore une fois il vient pour tout élément θ de $]0, \pi[$: $-\sin \theta T_n(\cos \theta) + \cos \theta (-\sin \theta) T_n'(\cos \theta) - 2 \cos \theta \sin \theta T_n''(\cos \theta) - \sin^2 \theta (-\sin \theta) T_n'''(\cos \theta) + (n+1)^2 \sin((n+1)\theta) = 0$.

Alors : $\forall \theta \in]0, \pi[$, $-\sin \theta T_n(\cos \theta) - 3 \sin \theta \cos \theta T_n'(\cos \theta) + \sin^3 \theta T_n''(\cos \theta) + (n+1)^2 \sin((n+1)\theta) = 0$.

En remarquant que $\forall \theta \in]0, \pi[$, $\sin((n+1)\theta) = \sin \theta T_n(\cos \theta)$ on obtient :

$$\forall \theta \in]0, \pi[$$
, $-\sin \theta T_n(\cos \theta) - 3 \sin \theta \cos \theta T_n'(\cos \theta) + \sin^3 \theta T_n''(\cos \theta) + (n+1)^2 \sin \theta T_n(\cos \theta) = 0$.

En divisant par $\sin \theta$ (qui n'est pas nul pour $\theta \in]0, \pi[$) on obtient :

$$\forall \theta \in]0, \pi[$$
, $-T_n(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + \sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) + (n+1)^2 T_n(\cos \theta) = 0$.

Ou encore : $\forall \theta \in]0, \pi[$, $\sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + ((n+1)^2 - 1) T_n(\cos \theta) = 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in]0, \pi[, \sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) T_n(\cos \theta) = 0.}$$

b. Soit n un élément de \mathbb{N} . Posons $H_n = (X^2 - 1) T_n'' + 3X T_n' - (n^2 + 2n) T_n$.

$$\forall \theta \in]0, \pi[$$
, $\sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) T_n(\cos \theta) = 0$.

$$\text{Donc } \forall \theta \in]0, \pi[$$
, $-(\cos^2 \theta - 1) T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n) T_n(\cos \theta) = 0$.

$$\text{Ceci donne : } \forall \theta \in]0, \pi[$$
, $-H_n(\cos \theta) = 0$.

Ainsi $\forall \theta \in]0, \pi[$, $H_n(\cos \theta) = 0$ ou $\forall x \in]-1, 1[$, $H_n(x) = 0$. Par conséquent le polynôme H_n admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul. Alors : $(X^2 - 1) T_n'' + 3X T_n' - (n^2 + 2n) T_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, (X^2 - 1) T_n'' + 3X T_n' - (n^2 + 2n) T_n = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Partie II : Étude de l'endomorphisme L

1. • Soit P un élément de E .

P' (resp. P'') est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus $n-1$ (resp. $n-2$) donc $3X P'$ (resp. $(X^2 - 1) P''$) est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n . Par conséquent $L(P) = (X^2 - 1) P'' + 3X P'$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ de degré au plus n . $L(P)$ appartient à E .

Ainsi L est une application de E dans E .

• Soient P et Q deux éléments de E et soit λ un réel.

$$L(\lambda P + Q) = (X^2 - 1)(\lambda P + Q)'' + 3X(\lambda P + Q)' = (X^2 - 1)(\lambda P'' + Q'') + 3X(\lambda P' + Q').$$

$$L(\lambda P + Q) = \lambda((X^2 - 1)P'' + 3X P') + (X^2 - 1)Q'' + 3X Q' = \lambda L(P) + L(Q).$$

Ainsi L est une application linéaire. Finalement :

$$\boxed{L \text{ est un endomorphisme de l'espace vectoriel } E.}$$

2. a. Soit k un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$.

T_k est un élément de E et $L(T_k) = (X^2 - 1)T_k'' + 3XT_k' = (k^2 + 2k)T_k$ d'après **I 5. b.**

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L(T_k) = (k^2 + 2k)T_k.}$$

b. $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, L(T_k) = (k^2 + 2k)T_k$ et $T_k \neq 0_E$. Ainsi pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket, k^2 + 2k$ est une valeur propre de L et T_k est un vecteur propre associé à cette valeur propre.

Posons $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \lambda_k = k^2 + 2k$. $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+1)^2 + 2(k+1) - k^2 - 2k = 2k + 3 > 0$.

Ainsi : $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$. $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont donc $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes de L qui est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$. Par conséquent :

- $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont LES valeurs propres de L ;
- les sous-espaces propres de L sont des droites vectorielles.

Notons alors que pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, le sous-espace propre de L associé à la valeur propre $k^2 + 2k$ est la droite vectorielle engendrée par T_k .

$\{k^2 + 2k; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ est l'ensemble des valeurs propres de L .

Pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket, (T_k)$ est une base du sous-espace propre de L associé à la valeur propre $k^2 + 2k$.

Partie III : Étude d'un produit scalaire

1. Remarque Si P et Q sont deux éléments de $E, x \rightarrow \sqrt{1-x^2}P(x)Q(x)$ est une fonction continue sur $[-1, 1]$ donc $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}P(x)Q(x)dx$ existe. Ainsi φ est bien une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} .

Soient P, Q, R trois éléments de E et soit λ un réel.

$$\bullet \varphi(\lambda P + Q, R) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (\lambda P(x) + Q(x)) R(x) dx.$$

$$\varphi(\lambda P + Q, R) = \int_{-1}^1 (\lambda \sqrt{1-x^2} P(x) R(x) + \sqrt{1-x^2} Q(x) R(x)) dx.$$

$$\varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) R(x) dx + \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} Q(x) R(x) dx \text{ par linéarité de l'intégrale.}$$

Par conséquent $\varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda \varphi(P, R) + \varphi(Q, R)$ (1).

$$\bullet \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x) Q(x) dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} Q(x) P(x) dx \text{ donc } \varphi(P, Q) = \varphi(Q, P) \text{ (2).}$$

$$\bullet \forall x \in [-1, 1], \sqrt{1-x^2} (P(x))^2 \geq 0 \text{ donc } \varphi(P, P) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (P(x))^2 dx \geq 0 \text{ car } -1 \leq 1.$$

Ainsi $\varphi(P, P) \geq 0$ (3).

- Supposons $\varphi(P, P) = 0$.

Alors $x \rightarrow \sqrt{1-x^2} (P(x))^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$, $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (P(x))^2 dx = 0$ et $-1 \neq 1$.

Ainsi $x \rightarrow \sqrt{1-x^2} (P(x))^2$ est nulle sur $[-1, 1]$. Ce qui donne sans difficulté $\forall x \in]-1, 1[$, $(P(x))^2 = 0$ puis $\forall x \in]-1, 1[$, $P(x) = 0$.

P est donc un polynôme qui admet une infinité de racines donc P est le polynôme nul.

Par conséquent $\varphi(P, P) = 0$ donne $P = 0_E$ (4).

(1), (2), (3) et (4) montrent que $\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

2. Soient P et Q deux éléments de E .

Posons $\forall x \in [-1, 1]$, $u(x) = -(1-x^2)^{\frac{3}{2}} P'(x)$.

$x \rightarrow -(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$ car $\frac{3}{2} \geq 1$. Il en est de même pour P' . Ainsi u est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$. De plus $\forall x \in [-1, 1]$, $u'(x) = -\frac{3}{2}(-2x)(1-x^2)^{\frac{1}{2}} P'(x) - (1-x^2)^{\frac{3}{2}} P''(x)$.

Donc $\forall x \in [-1, 1]$, $u'(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} (3x P'(x) - (1-x^2) P''(x)) = \sqrt{1-x^2} ((x^2-1) P''(x) + 3x P'(x))$.

Finalement $\forall x \in [-1, 1]$, $u'(x) = \sqrt{1-x^2} L(P)(x)$. Alors $\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^1 u'(x) Q(x) dx$.

u et Q sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$. Une intégration par parties simple donne alors :

$$\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^1 u'(x) Q(x) dx = \left[u(x) Q(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u(x) Q'(x) dx.$$

Or $u(1) = u(-1) = 0$ donc $\varphi(L(P), Q) = - \int_{-1}^1 u(x) Q'(x) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} P'(x) Q'(x) dx$.

En échangeant les rôles de P et Q on a également $\varphi(L(Q), P) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} Q'(x) P'(x) dx$.

Ainsi $\varphi(L(P), Q) = \varphi(L(Q), P)$ ou $\varphi(L(P), Q) = \varphi(P, L(Q))$.

$$\boxed{\forall (P, Q) \in E^2, \varphi(L(P), Q) = \varphi(P, L(Q))}$$

3. Ce qui précède montre que L est un endomorphisme symétrique de E . Par conséquent deux vecteurs propres de L associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux. Ainsi, si k et k' sont deux éléments distincts de $\llbracket 0, n \rrbracket$, T_k et $T_{k'}$ sont orthogonaux.

$(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc une famille orthogonale d'éléments non nuls de E . C'est donc une famille libre de cardinal $n+1$ de E qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$. $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est alors une base de E et une famille orthogonale. Finalement :

$$\boxed{(T_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base orthogonale de } E}$$

DEUXIÈME PROBLÈME

Partie I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Soit n un élément de \mathbb{N}^* .

Les fonctions $u_1 : t \rightarrow \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $v_1 : t \rightarrow \frac{\sin(nt)}{n}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

De plus $\forall t \in \mathbb{R}$, $u_1'(t) = \frac{t}{\pi} - 1$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $v_1'(t) = \cos(nt)$.

Une première intégration par parties donne alors :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{\sin(nt)}{n} dt = - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \frac{\sin(nt)}{n} dt$$

car $\sin(n\pi) = \sin(n \times 0) = 0$.

Les fonctions $u_2 : t \rightarrow \frac{t}{\pi} - 1$ et $v_2 : t \rightarrow -\frac{\cos(nt)}{n^2}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

De plus $\forall t \in \mathbb{R}$, $u_2'(t) = \frac{1}{\pi}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $v_2'(t) = \frac{\sin(nt)}{n}$.

Une seconde intégration par parties donne alors :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \cos(nt) dt = - \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \left(-\frac{\cos(nt)}{n^2} \right) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\cos(nt)}{n^2} \right) dt.$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = - \left(0 - \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{\pi n^2} \left[\frac{\sin(nt)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1}{n^2} - 0 = \frac{1}{n^2}. \text{ Ainsi :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}.$$

2. Soit m un élément de \mathbb{N}^* et t un élément de $]0, \pi]$. Notons que e^{it} est différent de 1.

$$\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{e^{i\frac{m}{2}t} (e^{-i\frac{m}{2}t} - e^{i\frac{m}{2}t})}{e^{i\frac{t}{2}} (e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}})} e^{it} = \frac{-2i \sin \frac{m}{2}t}{-2i \sin \frac{t}{2}} e^{i(\frac{m}{2}t - \frac{t}{2} + t)} = \frac{\sin \frac{m}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} e^{i\frac{(m+1)t}{2}}.$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, \pi], \frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} = \frac{\sin \frac{m}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} e^{i\frac{(m+1)t}{2}}.$$

Soit m un élément de \mathbb{N}^* et t un élément de $]0, \pi]$.

Observons que $\sum_{n=1}^m e^{int} = \frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it}$ car $e^{it} \neq 1$. Alors :

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \sum_{n=1}^m \Re e(e^{int}) = \Re \left(\sum_{n=1}^m e^{int} \right) = \Re \left(\frac{1 - e^{imt}}{1 - e^{it}} e^{it} \right) = \Re \left(\frac{\sin \frac{m}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} e^{i\frac{(m+1)t}{2}} \right).$$

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\sin \frac{m t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \Re \left(e^{i \frac{(m+1)t}{2}} \right) = \frac{\sin \frac{m t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{(m+1)t}{2} = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{m t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, \pi], \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{m t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

3. Une question de cours ! Le lemme de Riemann-Lebesgue ! Soit λ un réel strictement positif.

Les fonctions u et $v_3 : t \rightarrow -\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$. De plus $\forall t \in [0, \pi]$, $v_3'(t) = \sin(\lambda t)$.

Un intégration par parties donne alors :

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt = \left[u(t) \left(-\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi u'(t) \left(-\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} \right) dt.$$

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda} \left[u(0) - u(\pi) \cos(\lambda \pi) + \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) dt \right].$$

$$\left| \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \right| = \frac{1}{\lambda} \left| u(0) - u(\pi) \cos(\lambda \pi) + \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) dt \right|.$$

$$\left| \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(|u(0)| + |u(\pi)| |\cos(\lambda \pi)| + \left| \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) dt \right| \right).$$

$$\left| \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(|u(0)| + |u(\pi)| |\cos(\lambda \pi)| + \int_0^\pi |u'(t)| |\cos(\lambda t)| dt \right) \text{ car } 0 \leq \pi.$$

$$\text{Or } \forall t \in [0, \pi], |\cos(\lambda t)| \leq 1 \text{ donc } : 0 \leq \left| \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(|u(0)| + |u(\pi)| + \int_0^\pi |u'(t)| dt \right).$$

Remarquons que $|u(0)| + |u(\pi)| + \int_0^\pi |u'(t)| dt$ ne dépend pas de λ .

Par conséquent $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \left(|u(0)| + |u(\pi)| + \int_0^\pi |u'(t)| dt \right) = 0$. On obtient alors par encadrement :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

4. Pour utiliser pleinement le résultat du programme sur le prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^1 posons : $\forall t \in]0, \pi]$, $g(t) = f(t)$ et montrons que g se prolonge sur $[0, \pi]$ en une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui n'est autre que f !!

Remarque En utilisant un corollaire usuel du théorème de prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^1 on peut se contenter de montrer que f est continue sur $[0, \pi]$, de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$ et que f' admet une limite finie en 0^+ . On peut également n'utiliser aucun de ces résultats et montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$, dérivable en 0 et de dérivée continue en 0.

$t \rightarrow \frac{t^2}{2\pi} - t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$. $t \rightarrow 2 \sin \frac{t}{2}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$ et ne s'y annule pas.

Ainsi g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$.

$$\forall t \in]0, \pi], g'(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \right].$$

$$g'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2} \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \right].$$

$$\text{Donc } g'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{t^2} \left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \right].$$

Cherchons alors un équivalent de $t \rightarrow \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2}$ en 0.

Pour cela utilisons des développements limités usuels d'ordre 2 au voisinage de 0.

$$\frac{t}{\pi} - 1 = -1 + \frac{t}{\pi} + o(t^2) \text{ et } \sin \frac{t}{2} = \frac{t}{2} + o(t^2). \text{ Par produit : } \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin \frac{t}{2} = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2\pi} + o(t^2).$$

$$\frac{t^2}{2\pi} - t = -t + \frac{t^2}{2\pi} + o(t^2) \text{ et } \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(t/2)^2}{2}\right) + o(t^2) = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{16} + o(t^2).$$

$$\text{Par produit } \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{4\pi} + o(t^2).$$

$$\text{Alors, par différence, } \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} = -\frac{t}{2} + \frac{t^2}{2\pi} + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi} + o(t^2) = \frac{t^2}{4\pi} + o(t^2).$$

$$\text{Par conséquent : } \left(\frac{t}{\pi} - 1\right) \sin \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{4\pi}.$$

$$\text{Alors } g'(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{t^2} \left(\frac{t^2}{4\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}. \text{ Ainsi } \lim_{t \rightarrow 0} g'(t) = \frac{1}{2\pi}.$$

g est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, \pi]$ et g' admet une limite finie en 0 donc, d'après le cours, g admet un prolongement \widehat{g} de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$.

Notons que f coïncide avec \widehat{g} sur $]0, \pi]$. Montrons que $f(0) = \widehat{g}(0)$ ce qui revient à montrer que $\widehat{g}(0) = -1$.

$$g(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2 \sin \frac{t}{2}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-t}{2 \times \frac{t}{2}} = -1. \text{ Alors } \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = -1.$$

Alors $\widehat{g}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \widehat{g}(t) = \lim_{t \rightarrow 0} g(t) = -1 = f(0)$. Ceci achève de montrer que $f = \widehat{g}$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \pi].}$$

$$\text{Remarque } f'(0) = \frac{1}{2\pi}.$$

5. a. Soit m un élément de \mathbb{N}^* .

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^m \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos(nt) dt = \int_0^\pi \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{n=1}^m \cos(nt)\right] dt.$$

$$\forall t \in]0, \pi], \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \frac{\cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

$$\text{Alors } \forall t \in]0, \pi], \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{n=1}^m \cos(nt) = 2f(t) \cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}.$$

Or cette égalité vaut également pour $t = 0$ ($0 = 0!$). Nous pouvons alors écrire que :

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi \left[\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \sum_{n=1}^m \cos(nt)\right] dt = \int_0^\pi f(t) \left(2 \cos \frac{(m+1)t}{2} \sin \frac{mt}{2}\right) dt.$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi f(t) \left(\sin\left(\frac{(m+1)t}{2} + \frac{mt}{2}\right) - \sin\left(\frac{(m+1)t}{2} - \frac{mt}{2}\right) \right) dt.$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi f(t) \sin \frac{(2m+1)t}{2} dt - \int_0^\pi f(t) \sin \frac{t}{2} dt.$$

Or $\int_0^\pi f(t) \sin \frac{t}{2} dt = \int_0^\pi \frac{1}{2} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^3}{6\pi} - \frac{\pi^2}{2} \right) = -\frac{\pi^2}{6}$. Ainsi :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin \left(\frac{(2m+1)t}{2} \right) dt.$$

b. f étant de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, \pi]$, **I 3.** donne alors $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

Comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2m+1}{2} = +\infty$ il vient : $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f(t) \sin \left(\frac{(2m+1)t}{2} \right) dt = 0$.

Donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Finalement :

$$\text{la série de terme général } \frac{1}{n^2} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1. a. Soient x et y deux éléments de $[0, +\infty[$.

- $\frac{1}{(n+x)(n+y)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$.

- Les séries de termes généraux $\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^3}$ convergent et sont à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que les séries de termes généraux

$$\frac{1}{(n+x)(n+y)} \text{ et } \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \text{ convergent.}$$

Si x et y sont deux éléments de $[0, +\infty[$, les séries de termes généraux $\frac{1}{(n+x)(n+y)}$ et $\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}$ convergent.

b. $\forall x \in [0, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = x \frac{1}{(n+x)(n+0)}$.

Ce que nous venons de voir permet de dire, en faisant $y = 0$, que :

pour tout élément x de $[0, +\infty[$, la série de terme général $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$ converge.

2. $S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+0} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) = 0$.

$$S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) = 1.$$

$$\boxed{S(0) = 0 \text{ et } S(1) = 1.}$$

3. a. Soient x et y deux éléments de $[0, +\infty[$.

$$S(y) - S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+x} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+y-n-x}{(n+x)(n+y)}.$$

$$S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$$

$$\boxed{\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$$

b. Soient x et y deux éléments de $[0, +\infty[$.

$$|S(y) - S(x)| = |y-x| \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \right| = |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$$

x et y étant positifs : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n+x)(n+y) \geq n^2 > 0$; donc $\forall m \in \mathbb{N}^*, \sum_{n=1}^m \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2}$.

En faisant tendre m vers $+\infty$ on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ car les deux séries convergent.

Alors :

$$\boxed{\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, |S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y-x|.$$

c. Soit x un élément de $[0, +\infty[$.

$$\forall y \in [0, +\infty[, 0 \leq |S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y-x| \text{ et } \lim_{y \rightarrow x} \frac{\pi^2}{6} |y-x| = 0.$$

On obtient alors par encadrement $\lim_{y \rightarrow x} S(y) = S(x)$ et ainsi S est continue en x .

$$\boxed{S \text{ est continue sur } [0, +\infty[.}$$

4. a. soient x et y deux éléments distincts de $[0, +\infty[$.

$$\text{Rappelons que } S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}. \text{ Donc } \frac{S(y) - S(x)}{y-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$$

Notons également que la série de terme général $\frac{1}{(n+x)^2}$ converge d'après **1. a.** ($y = x \dots$).

$$\text{Alors } \frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+x)(n+y)} - \frac{1}{(n+x)^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+x) - (n+y)}{(n+x)^2(n+y)}.$$

$$\frac{S(y) - S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = (x-y) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}.$$

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| = |x - y| \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \right| = |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}.$$

Montrons alors que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

x et y sont positifs donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+x)^2(n+y) \geq n^3 > 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leq \frac{1}{n^3}$.

Finalement $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ car les deux séries convergent.

Donc $\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| = |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

$$\boxed{\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, x \neq y \implies \left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.}$$

b. Soit x un élément de $[0, +\infty[$.

$\forall y \in [0, +\infty[, y \neq x \implies 0 \leq \left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ et $\lim_{y \rightarrow x} \left(|y - x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \right) = 0$.

Il vient alors par encadrement $\lim_{y \rightarrow x} \frac{S(y) - S(x)}{y - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

Ainsi S est dérivable en x et $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

$$\boxed{S \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[\text{ et } \forall x \in [0, +\infty[, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.}$$

c. $S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

$$\boxed{S'(0) = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } S'(1) = \frac{\pi^2}{6} - 1.}$$

5. $\forall x \in [0, +\infty[, S''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}$. Donc S'' est négative sur $[0, +\infty[$. Alors :

$$\boxed{S \text{ est concave sur } [0, +\infty[.}$$

6. a. φ est continue sur $[1, +\infty[$.

$$\forall A \in [1, +\infty[, \int_1^A \varphi(t) dt = \int_1^A \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = \left[\ln |t| - \ln |t+x| \right]_1^A = \left[\ln \left| \frac{t}{t+x} \right| \right]_1^A.$$

$$\forall A \in [1, +\infty[, \int_1^A \varphi(t) dt = \ln \left| \frac{A}{A+x} \right| - \ln \left| \frac{1}{1+x} \right| = \ln \frac{A}{A+x} - \ln \frac{1}{1+x}.$$

$\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{A}{A+x} = 1$ donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{A}{A+x} = 0$ et ainsi $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \varphi(t) dt = -\ln \frac{1}{1+x} = \ln(1+x)$.

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \text{ converge et vaut } \ln(1+x).$$

b. φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et $\forall t \in [1, +\infty[$, $\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} \leq 0$ (car $0 < t \leq t+x$).

φ est donc décroissante sur $[1, +\infty[$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in [n, n+1]$, $\varphi(n+1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(n)$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1) = \int_n^{n+1} \varphi(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \int_n^{n+1} \varphi(n) dt = \varphi(n)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \varphi(n).$$

Alors $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^m \varphi(n+1) \leq \sum_{n=1}^m \int_n^{n+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^m \varphi(n)$.

Donc $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=2}^{m+1} \varphi(n) \leq \int_1^{m+1} \varphi(t) dt \leq \sum_{n=1}^m \varphi(n)$ (*).

Or $\sum_{n=2}^{+\infty} \varphi(n)$ existe et vaut $S(x) - \varphi(1)$; $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)$ existe et vaut $S(x)$; $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.

En faisant tendre m vers $+\infty$ dans (*), il vient :

$$S(x) - \varphi(1) \leq \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \text{ ou } \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt + \varphi(1).$$

Or $\varphi(1) = 1 - \frac{1}{1+x} \leq 1$ donc $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt + 1$. Ainsi :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

c. Supposons x dans $]1, +\infty[$. $\ln(1+x) \leq S(x) \leq 1 + \ln(1+x)$ car $\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt = \ln(1+x)$.

Comme $\ln x$ est strictement positif on a encore : $\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \leq \frac{S(x)}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln x} + \frac{\ln(1+x)}{\ln x}$ (**).

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \frac{1}{\ln x} \left(\ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) + \ln x \right) = 1 + \frac{1}{\ln x} \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1 + 0 \times 0 = 1.$$

On a également : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right) = 0 + 1 = 1$.

L'encadrement (**) donne alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{\ln x} = 1$. Finalement :

$$\boxed{S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x.}$$

7. Donnons les résultats importants pour bien tracer l'allure de la courbe représentative de S .

- S est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ car $\forall x \in [0, +\infty[$, $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} > 0$.
- $S(0) = 0$, $S(1) = 1$, $S'(0) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,6$ et $S'(1) = \frac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0,6$.
- S est concave donc sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes.
- $S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

La courbe représentative de S admet en $+\infty$ une branche parabolique dans la direction de $(x'x)$.

Désolé pour l'allure de la courbe...