# LYON 2005 DEUXIÈME PROBLÈME

## Partie I : Calcul de la somme d'une série convergente

**1.** Soit $n$ un élément de $\mathbb{N}^*$.

Les fonctions $u_1 : t \to \dfrac{t^2}{2\,\pi} - t$ et $v_1 : t \to \dfrac{\sin(n\,t)}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall t \in \mathbb{R},\ u_1' t) = \dfrac{t}{\pi} - 1$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ v_1' t) = \cos(n\,t)$.

Une première intégration par parties donne alors :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right)\,\cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = \left[\left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right)\,\frac{\sin(n\,t)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\,\frac{\sin(n\,t)}{n}\,\mathrm{d}t = -\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\,\frac{\sin(n\,t)}{n}\,\mathrm{d}t$$

car $\sin(n\,\pi) = \sin(n \times 0) = 0$.

Les fonctions $u_2 : t \to \dfrac{t}{\pi} - 1$ et $v_2 : t \to -\dfrac{\cos(n\,t)}{n^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall t \in \mathbb{R},\ u_2'(t) = \dfrac{1}{\pi}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ v_2'(t) = \dfrac{\sin(n\,t)}{n}\cdot$

Une seconde intégration par parties donne alors :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right)\,\cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = -\left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\,\left(-\frac{\cos(n\,t)}{n^2}\right)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{\pi}\,\left(-\frac{\cos(n\,t)}{n^2}\right)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right)\,\cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = -\left(0 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{\pi n^2}\,\left[\frac{\sin(n\,t)}{n}\right]_0^\pi = \frac{1}{n^2} - 0 = \frac{1}{n^2}\cdot$$ Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right)\,\cos(n\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}\cdot}$$

**2.** Soit $m$ un élément de $\mathbb{N}^*$ et $t$ un élément de $]0, \pi]$. Notons que $e^{i\,t}$ est différent de 1.

$$\frac{1 - e^{i\,m\,t}}{1 - e^{i\,t}}\,e^{i\,t} = \frac{e^{i\,\frac{m\,t}{2}}\,(e^{-i\,\frac{m\,t}{2}} - e^{i\,\frac{m\,t}{2}})}{e^{i\,\frac{t}{2}}\,(e^{-i\,\frac{t}{2}} - e^{i\,\frac{t}{2}})}\,e^{i\,t} = \frac{-2\,i\,\sin\frac{m\,t}{2}}{-2\,i\,\sin\frac{t}{2}}\,e^{i\left(\frac{m\,t}{2} - \frac{t}{2} + t\right)} = \frac{\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,e^{i\,\frac{(m+1)\,t}{2}}.$$

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in ]0, \pi],\ \frac{1 - e^{i\,m\,t}}{1 - e^{i\,t}}\,e^{i\,t} = \frac{\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,e^{i\,\frac{(m+1)\,t}{2}}.}$$

Soit $m$ un élément de $\mathbb{N}^*$ et $t$ un élément de $]0, \pi]$.

Observons que $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} e^{i\,n\,t} = \frac{1 - e^{i\,m\,t}}{1 - e^{i\,t}}\,e^{i\,t}$ car $e^{it} \neq 1$. Alors :

$$\sum_{n=1}^{m} \cos(n\,t) = \sum_{n=1}^{m} \Re e\left(e^{i\,n\,t}\right) = \Re e\left(\sum_{n=1}^{m} e^{i\,n\,t}\right) = \Re e\left(\frac{1 - e^{i\,m\,t}}{1 - e^{i\,t}}\,e^{i\,t}\right) = \Re e\left(\frac{\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\,e^{i\,\frac{(m+1)\,t}{2}}\right).$$

$$\sum_{n=1}^{m} \cos(n\,t) = \frac{\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\ \Re e\left(e^{i\,\frac{(m+1)\,t}{2}}\right) = \frac{\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\ \cos\frac{(m+1)\,t}{2} = \frac{\cos\frac{(m+1)\,t}{2}\ \sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$

$$\boxed{\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall t\in]0,\pi],\ \sum_{n=1}^{m}\cos(n\,t) = \frac{\cos\frac{(m+1)\,t}{2}\ \sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.}$$

**3.** Une question de cours ! Le lemme de Riemann-Lebesgue ! Soit $\lambda$ un réel strictement positif.

Les fonctions $u$ et $v_3 : t \to -\dfrac{\cos(\lambda\,t)}{\lambda}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. De plus $\forall t\in[0,\pi],\ v_3'(t) = \sin(\lambda\,t)$.

Un intégration par parties donne alors :

$$\int_0^\pi u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)\ \left(-\frac{\cos(\lambda\,t)}{\lambda}\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi u'(t)\ \left(-\frac{\cos(\lambda\,t)}{\lambda}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^\pi u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\left[u(0) - u(\pi)\ \cos(\lambda\,\pi) + \int_0^\pi u'(t)\ \cos(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right].$$

$$\left|\int_0^\pi u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{\lambda}\left|u(0) - u(\pi)\ \cos(\lambda\,\pi) + \int_0^\pi u'(t)\ \cos(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

$$\left|\int_0^\pi u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|u(0)| + |u(\pi)|\,|\cos(\lambda\,\pi)| + \left|\int_0^\pi u'(t)\ \cos(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right|\right).$$

$$\left|\int_0^\pi u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{\lambda}\left(|u(0)| + |u(\pi)|\,|\cos(\lambda\,\pi)| + \int_0^\pi |u'(t)|\,|\cos(\lambda\,t)|\,\mathrm{d}t\right)\ \text{car } 0\leqslant\pi.$$

Or $\forall t\in[0,\pi],\ |\cos(\lambda\,t)|\leqslant 1$ donc : $0 \leqslant \left|\displaystyle\int_0^\pi u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\left(|u(0)| + |u(\pi)| + \displaystyle\int_0^\pi |u'(t)|\,\mathrm{d}t\right)$.

Remarquons que $|u(0)| + |u(\pi)| + \displaystyle\int_0^\pi |u'(t)|\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de $\lambda$.

Par conséquent $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{1}{\lambda}\left(|u(0)| + |u(\pi)| + \int_0^\pi |u'(t)|\,\mathrm{d}t\right) = 0$. On obtient alors par encadrement :

$$\boxed{\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi u(t)\ \sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t = 0.}$$

**4.** Pour utiliser pleinement le résultat du programme sur le prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ posons : $\forall t\in]0,\pi],\ g(t) = f(t)$ et montrons que $g$ se prolonge sur $[0,\pi]$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ qui n'est autre que $f$ !!

*Remarque* *En utilisant un corollaire usuel du théorème de prolongement des fonctions de classe* $\mathcal{C}^1$ *on peut se contenter de montrer que* $f$ *est continue sur* $[0,\pi]$, *de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]0,\pi]$ *et que* $f'$ *admet une limite finie en* $0^+$. *On peut également n'utiliser aucun de ces résultats et montrer que* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $]0,\pi]$, *dérivable en* $0$ *et de dérivée continue en* $0$.

$t\to\dfrac{t^2}{2\,\pi} - t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. $t\to 2\,\sin\dfrac{t}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et ne s'y annule pas.

Ainsi $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$.

$$\forall t\in]0,\pi],\ g'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\left[\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\ \sin\frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right)\ \frac{1}{2}\cos\frac{t}{2}\right].$$

$g'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\left[\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}\right].$

Donc $g'(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{2}{t^2}\left[\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}\right].$

Cherchons alors un équivalent de $t \to \left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}$ en 0.

Pour cela utilisons des développements limités usuels d'ordre 2 au voisinage de 0.

$\dfrac{t}{\pi}-1=-1+\dfrac{t}{\pi}+\mathrm{o}(t^2)$ et $\sin\dfrac{t}{2}=\dfrac{t}{2}+\mathrm{o}(t^2)$. Par produit : $\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{2\,\pi}+\mathrm{o}(t^2).$

$\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t=-t+\dfrac{t^2}{2\,\pi}+\mathrm{o}(t^2)$ et $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{(t/2)^2}{2}\right)+\mathrm{o}(t^2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{t^2}{16}+\mathrm{o}(t^2).$

Par produit $\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{4\,\pi}+\mathrm{o}(t^2).$

Alors, par différence, $\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}=-\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{2\,\pi}+\dfrac{t}{2}-\dfrac{t^2}{4\,\pi}+\mathrm{o}(t^2)=\dfrac{t^2}{4\,\pi}+\mathrm{o}(t^2).$

Par conséquent : $\left(\dfrac{t}{\pi}-1\right)\,\sin\dfrac{t}{2}-\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{t}{2}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{t^2}{4\,\pi}\cdot$

Alors $g'(t)\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{2}{t^2}\left(\dfrac{t^2}{4\,\pi}\right)=\dfrac{1}{2\,\pi}\cdot$ Ainsi $\lim\limits_{t\to 0} g'(t)=\dfrac{1}{2\,\pi}\cdot$

$g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$ et $g'$ admet une limite finie en 0 donc, d'après le cours, $g$ admet un prolongement $\widehat{g}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

Notons que $f$ coïncide avec $\widehat{g}$ sur $]0,\pi]$. Montrons que $f(0)=\widehat{g}(0)$ ce qui revient à montrer que $\widehat{g}(0)=-1$.

$g(t)=\dfrac{\frac{t^2}{2\,\pi}-t}{2\,\sin\frac{t}{2}}\underset{t\to 0}{\sim}\dfrac{-t}{2\times\frac{t}{2}}=-1.$ Alors $\lim\limits_{t\to 0} g(t)=-1.$

Alors $\widehat{g}(0)=\lim\limits_{t\to 0}\widehat{g}(t)=\lim\limits_{t\to 0} g(t)=-1=f(0)$. Ceci achève de montrer que $f=\widehat{g}$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi].}$$

*Remarque* $\quad f'(0)=\dfrac{1}{2\,\pi}\cdot$

**5. a.** Soit $m$ un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{m}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\,\cos(n\,t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\sum_{n=1}^{m}\cos(n\,t)\right]\mathrm{d}t.$$

$\forall t\in]0,\pi],\ \left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\cos(n\,t)=\left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\ \dfrac{\cos\frac{(m+1)\,t}{2}\,\sin\frac{m\,t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\cdot$

Alors $\forall t\in]0,\pi],\ \left(\dfrac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\cos(n\,t)=2\,f(t)\,\cos\dfrac{(m+1)\,t}{2}\,\sin\dfrac{m\,t}{2}\cdot$

Or cette égalité vaut également pour $t=0$ ($0=0$ !). Nous pouvons alors écrire que :

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}=\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{t^2}{2\,\pi}-t\right)\sum_{n=1}^{m}\cos(n\,t)\right]\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}f(t)\,\left(2\,\cos\frac{(m+1)\,t}{2}\,\sin\frac{m\,t}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} f(t)\,\left(\sin\left(\frac{(m+1)\,t}{2} + \frac{m\,t}{2}\right) - \sin\left(\frac{(m+1)\,t}{2} - \frac{m\,t}{2}\right)\right) \mathrm{d}t.$$

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} f(t)\,\sin\frac{(2\,m+1)\,t}{2}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} f(t)\,\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)\,\sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2\,\pi} - t\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{6\,\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{6\,\pi} - \frac{\pi^2}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{6}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^{\pi} f(t)\,\sin\left(\frac{(2\,m+1)\,t}{2}\right)\mathrm{d}t.}$$

**b.** $f$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, **I 3.** donne alors $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\,\sin(\lambda\,t)\,\mathrm{d}t = 0.$

Comme $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{2\,m+1}{2} = +\infty$ il vient : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\,\sin\left(\frac{(2\,m+1)\,t}{2}\right)\mathrm{d}t = 0.$

Donc $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Finalement :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{1}{n^2} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot}$$

## Partie II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

**1. a.** Soient $x$ et $y$ deux éléments de $[0,+\infty[$.

- $\displaystyle\frac{1}{(n+x)\,(n+y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\frac{1}{(n+x)^2\,(n+y)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}\cdot$
- Les séries de termes généraux $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{n^3}$ convergent et sont à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que les séries de termes généraux $\dfrac{1}{(n+x)\,(n+y)}$ et $\dfrac{1}{(n+x)^2\,(n+y)}$ convergent.

$$\boxed{\text{Si } x \text{ et } y \text{ sont deux éléments de } [0,+\infty[\text{, les séries de termes généraux } \frac{1}{(n+x)\,(n+y)} \text{ et } \frac{1}{(n+x)^2\,(n+y)} \text{ convergent.}}$$

**b.** $\forall x \in [0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} = x\,\dfrac{1}{(n+x)(n+0)}\cdot$

Ce que nous venons de voir permet de dire, en faisant $y = 0$, que :

$$\boxed{\text{pour tout élément } x \text{ de } [0,+\infty[\text{, la série de terme général } \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \text{ converge.}}$$

**2.** $\displaystyle S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+0}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0.$

$$S(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{m\to+\infty}\left(1-\frac{1}{m+1}\right)=1.$$

$$\boxed{S(0)=0 \text{ et } S(1)=1.}$$

**3. a.** Soient $x$ et $y$ deux éléments de $[0,+\infty[$.

$$S(y)-S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+y}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+x}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+y}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+y-n-x}{(n+x)\,(n+y)}\cdot$$

$$S(y)-S(x)=(y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\cdot$$

$$\boxed{\forall (x,y)\in\big([0,+\infty[\big)^2,\ S(y)-S(x)=(y-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\cdot}$$

**b.** Soient $x$ et $y$ deux éléments de $[0,+\infty[$.

$$|S(y)-S(x)|=|y-x|\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\right|=|y-x|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\cdot$$

$x$ et $y$ étant positifs : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (n+x)\,(n+y)\geqslant n^2>0$ ; donc $\forall m\in\mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\leqslant\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\cdot$

En faisant tendre $m$ vers $+\infty$ on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ car les deux séries convergent.

Alors :

$$\boxed{\forall (x,y)\in\big([0,+\infty[\big)^2,\ \big|S(y)-S(x)\big|\leqslant\frac{\pi^2}{6}\,|y-x|.}$$

**c.** Soit $x$ un élément de $[0,+\infty[$.

$\forall y\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant\big|S(y)-S(x)\big|\leqslant\dfrac{\pi^2}{6}\,|y-x|$ et $\displaystyle\lim_{y\to x}\frac{\pi^2}{6}\,|y-x|=0.$

On obtient alors par encadrement $\displaystyle\lim_{y\to x}S(y)=S(x)$ et ainsi $S$ est continue en $x$.

$$\boxed{S \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

**4. a.** soient $x$ et $y$ deux éléments distincts de $[0,+\infty[$.

Rappelons que $S(y)-S(x)=(y-x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\cdot$ Donc $\dfrac{S(y)-S(x)}{y-x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}\cdot$

Notons également que la série de terme général $\dfrac{1}{(n+x)^2}$ converge d'après **1 . a.** ($y=x$...).

Alors $\displaystyle\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(n+x)\,(n+y)}-\frac{1}{(n+x)^2}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+x)-(n+y)}{(n+x)^2(n+y)}\cdot$

$$\frac{S(y)-S(x)}{y-x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}=(x-y)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2(n+y)}\cdot$$

$$\left| \frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| = |x-y| \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \right| = |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}.$$

Montrons alors que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

$x$ et $y$ sont positifs donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+x)^2\,(n+y) \geqslant n^3 > 0$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\frac{1}{(n+x)^2\,(n+y)} \leqslant \frac{1}{n^3}$.

Finalement $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ car les deux séries convergent.

Donc $\displaystyle\left| \frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| = |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leqslant |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in \big([0,+\infty[\big)^2,\ x \neq y \Longrightarrow \left| \frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.}$$

**b.** Soit $x$ un élément de $[0,+\infty[$.

$\forall y \in [0,+\infty[,\ y \neq x \Longrightarrow 0 \leqslant \displaystyle\left| \frac{S(y)-S(x)}{y-x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ et $\displaystyle\lim_{y\to x} \left( |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \right) = 0$.

Il vient alors par encadrement $\displaystyle\lim_{y\to x} \frac{S(y)-S(x)}{y-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

Ainsi $S$ est dérivable en $x$ et $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

$$\boxed{S \text{ est dérivable sur } [0,+\infty[ \text{ et } \forall x \in [0,+\infty[,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.}$$

**c.** $S'(0) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $S'(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$.

$$\boxed{S'(0) = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } S'(1) = \frac{\pi^2}{6} - 1.}$$

**5.** $\forall x \in [0,+\infty[,\ S''(x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}$. Donc $S''$ est négative sur $[0,+\infty[$. Alors :

$$\boxed{S \text{ est concave sur } [0,+\infty[.}$$

**6. a.** $\varphi$ est continue sur $[1,+\infty[$.

$\forall A \in [1,+\infty[,\ \displaystyle\int_1^A \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^A \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) \mathrm{d}t = \Big[ \ln|t| - \ln|t+x| \Big]_1^A = \left[ \ln\left| \frac{t}{t+x} \right| \right]_1^A$.

$\forall A \in [1,+\infty[,\ \displaystyle\int_1^A \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \ln\left| \frac{A}{A+x} \right| - \ln\left| \frac{1}{1+x} \right| = \ln\frac{A}{A+x} - \ln\frac{1}{1+x}$.

$\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{A}{A+x} = 1$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} \ln \dfrac{A}{A+x} = 0$ et ainsi $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_1^A \varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\ln \dfrac{1}{1+x} = \ln(1+x)$.

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge et vaut } \ln(1+x).}$$

**b.** $\varphi$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et $\forall t \in [1,+\infty[,\ \varphi'(t) = -\dfrac{1}{t^2} + \dfrac{1}{(t+x)^2} \leqslant 0$ (car $0 < t \leqslant t+x$).

$\varphi$ est donc décroissante sur $[1,+\infty[$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [n,n+1],\ \varphi(n+1) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(n)$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n+1) = \displaystyle\int_n^{n+1} \varphi(n+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(n)\,\mathrm{d}t = \varphi(n)$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \varphi(n).}$$

Alors $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \varphi(n+1) \leqslant \sum_{n=1}^{m} \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{m} \varphi(n)$.

Donc $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{n=2}^{m+1} \varphi(n) \leqslant \int_1^{m+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{m} \varphi(n) \quad (*)$.

Or $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \varphi(n)$ existe et vaut $S(x) - \varphi(1)$ ; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n)$ existe et vaut $S(x)$ ; $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

En faisant tendre $m$ vers $+\infty$ dans $(*)$, il vient :

$S(x) - \varphi(1) \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x)$ ou $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(1)$.

Or $\varphi(1) = 1 - \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + 1$. Ainsi :

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.}$$

**c.** Supposons $x$ dans $]1,+\infty[$. $\ln(1+x) \leqslant S(x) \leqslant 1 + \ln(1+x)$ car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \ln(1+x)$.

Comme $\ln x$ est strictement positif on a encore : $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} \leqslant \dfrac{S(x)}{\ln x} \leqslant \dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} \quad (**)$.

$\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} = \dfrac{1}{\ln x}\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right) + \ln x\right) = 1 + \dfrac{1}{\ln x}\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1 + 0 \times 0 = 1$.

On a également : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right) = 0 + 1 = 1$.

L'encadrement $(**)$ donne alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{\ln x} = 1$. Finalement :

$$\boxed{S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x.}$$

**7.** Donnons les résultats importants pour bien tracer l'allure de la courbe représentative de $S$.

- $S$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ car $\forall x \in [0,+\infty[,\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} > 0$.
- $S(0) = 0,\ S(1) = 1,\ S'(0) = \dfrac{\pi^2}{6} \approx 1,6$ et $S'(1) = \dfrac{\pi^2}{6} - 1 \approx 0,6$.
- $S$ est concave donc sa courbe représentative est en dessous de toutes ses tangentes.
- $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

La courbe représentative de $S$ admet en $+\infty$ une branche parabolique dans la direction de $(x'x)$.

Désolé pour l'allure de la courbe...