

## PROBLÈME I

### Preliminaires

1. a. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$ .

$$\forall t \in ]0, +\infty[, \frac{t^n e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = t^{n+2} e^{-t^2} = (t^2)^{\frac{n+2}{2}} e^{-t^2}.$$

Or par croissance comparée  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\alpha e^{-x}) = 0$  donc  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} ((t^2)^\alpha e^{-t^2}) = 0$ .

Alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} ((t^2)^{\frac{n+2}{2}} e^{-t^2}) = 0$ . Ainsi  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^n e^{-t^2}}{\frac{1}{t^2}} = 0$ . Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, t^n e^{-t^2} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right).$$

b. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$ .  $f_n : t \rightarrow t^n e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

- $f_n(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ .
- $\forall t \in [1, +\infty[, f_n(t) \geq 0$  et  $\frac{1}{t^2} \geq 0$ .
- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$  converge car  $2 > 1$ .

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que

$$\int_1^{+\infty} f_n(t) dt \text{ est convergente.}$$

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt \text{ converge également puisque } f_n \text{ est continue sur } [0, 1].$$

Soit  $A$  un réel strictement négatif.

$$\text{Le changement de variable } u = -t \text{ donne sans difficulté : } \int_A^0 f_n(t) dt = - \int_{-A}^0 f_n(-u) du = \int_0^{-A} f_n(-u) du.$$

Observons que  $\forall u \in \mathbb{R}$ ,  $f_n(-u) = (-u)^n e^{-u^2} = (-1)^n u^n e^{-u^2} = (-1)^n f_n(u)$  ( $f_n$  a la parité de  $n$ ).

$$\text{Alors } \int_A^0 f_n(t) dt = (-1)^n \int_0^{-A} f_n(u) du.$$

Or  $\lim_{A \rightarrow -\infty} (-A) = +\infty$  et  $\int_0^{+\infty} f_n(u) du$  converge. Ainsi  $\int_{-\infty}^0 f_n(t) dt$  converge et vaut  $(-1)^n \int_0^{+\infty} f_n(u) du$ .

Finalement  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$  converge et vaut  $(1 + (-1)^n) \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ .

Pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  est convergente.

Remarque Si  $n$  est un élément pair de  $\mathbb{N}$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ .

Si  $n$  est un élément impair de  $\mathbb{N}$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = 0$ .

2. Soit  $P$  un élément de  $\mathbb{R}[X]$ .

Il existe un élément  $r$  de  $\mathbb{N}$  et un élément  $(a_0, a_1, \dots, a_r)$  de  $\mathbb{R}^{r+1}$  tel que  $P = \sum_{n=0}^r a_n X^n$ .

Pour tout élément  $n$  de  $\llbracket 0, r \rrbracket$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  converge donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^r a_n (t^n e^{-t^2}) \right) dt$  converge.

Ainsi  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{n=0}^r a_n t^n \right) e^{-t^2} dt$  converge. Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$  converge.

Pour tout élément  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$  converge.

3. a. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$ . Soient  $A$  et  $B$  deux réels.

Posons  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $u(t) = t^{n+1}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $v(t) = -\frac{1}{2} e^{-t^2}$ .

$u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $u'(t) = (n+1)t^n$  et  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $v'(t) = t e^{-t^2}$ .

Une intégration par parties simple donne alors :

$$\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = \int_A^B u(t) v'(t) dt = \left[ u(t) v(t) \right]_A^B - \int_A^B u'(t) v(t) dt.$$

$$\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = \left[ t^{n+1} \left( -\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \right]_A^B - \int_A^B (n+1) t^n \left( -\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt.$$

$$\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} A^{n+1} e^{-A^2} - \frac{1}{2} B^{n+1} e^{-B^2} + \frac{n+1}{2} \int_A^B t^n e^{-t^2} dt.$$

D'après 1.a.,  $B^{n+1} e^{-B^2} = \underset{B \rightarrow +\infty}{o} \left( \frac{1}{B^2} \right)$ . Or  $\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{B^2} = 0$ . Ainsi  $\lim_{B \rightarrow +\infty} \left( B^{n+1} e^{-B^2} \right) = 0$ .

$\lim_{A \rightarrow -\infty} (-A) = +\infty$ . Donc  $\lim_{A \rightarrow -\infty} \left( (-A)^{n+1} e^{-(-A)^2} \right) = 0$  d'après ce que nous venons de voir.

Ainsi  $\lim_{A \rightarrow -\infty} \left( (-1)^{n+1} \left( A^{n+1} e^{-A^2} \right) \right) = 0$  donc  $\lim_{A \rightarrow -\infty} \left( A^{n+1} e^{-A^2} \right) = 0$ .

Alors  $\int_A^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} A^{n+1} e^{-A^2} - \frac{1}{2} B^{n+1} e^{-B^2} + \frac{n+1}{2} \int_A^B t^n e^{-t^2} dt$ ,  $\lim_{A \rightarrow -\infty} \left( A^{n+1} e^{-A^2} \right) = 0$ ,

$\lim_{B \rightarrow +\infty} \left( B^{n+1} e^{-B^2} \right) = 0$ ,  $I_{n+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{n+1} e^{-t^2} dt$  et  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  convergent.

Alors en faisant tendre  $A$  vers  $-\infty$ , puis  $B$  vers  $+\infty$  dans l'égalité précédente on obtient :  $I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n$ .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{n+1}{2} I_n.}$$

**b.** Nous avons vu plus haut que si  $n$  est un élément impair de  $\mathbb{N}$  alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt = 0$ . Ainsi :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = 0.}$$

**c.** Montrons par récurrence que  $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$ .

•  $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ . Oublions le résultat proposé... pour tester le théorème de changement de variable sur les intégrales généralisées.

Posons  $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ .  $\varphi$  est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. Alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$ . Ce qui donne  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ .

$h : u \rightarrow e^{-u^2}$  est continue sur  $] -\infty, +\infty[$ ,  $\psi : t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{2}}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] -\infty, +\infty[$ , strictement croissante sur  $] -\infty, +\infty[$  et définit une bijection de  $] -\infty, +\infty[$  sur  $] -\infty, +\infty[$ .

Alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) du$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\psi(t)) \psi'(t) dt$  sont de même nature et en cas de convergence sont égales.

Or  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) du = I_0$  existe donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} h(\psi(t)) \psi'(t) dt$  existe et vaut  $I_0$ .

$$\text{Ainsi } I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\psi(t)) \psi'(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi}.$$

Alors  $I_0 = \sqrt{\pi} = \frac{(2 \times 0)!}{2^{2 \times 0} 0!} \sqrt{\pi}$  et la propriété est vraie pour  $p = 0$ .

• Supposons la propriété vraie pour un élément  $p$  de  $\mathbb{N}$  et montrons la pour  $p + 1$ .

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{2p+1}{2} I_{2p} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{2^2(p+1)} I_{2p} = \frac{(2p+2)(2p+1)}{2^2(p+1)} \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} = \frac{(2(p+1))!}{2^{2(p+1)} (p+1)!} \sqrt{\pi}.$$

Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}.}$$

---

## I Recherche d'extremums locaux pour une fonction de deux variables réelles

---

1. Soit  $x$  et  $y$  deux réels.

$t \rightarrow (t-x)^2(t-y)^2$  est une fonction polynôme donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt$  est convergente d'après le préliminaire.

Par conséquent  $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt$  existe.

$\forall t \in \mathbb{R}, (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} = (t^2 - 2xt + x^2)(t^2 - 2yt + y^2) e^{-t^2}$ . Alors :

$\forall t \in \mathbb{R}, (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} = (t^4 - 2(x+y)t^3 + (x^2 + 4xy + y^2)t^2 - 2(xy^2 + yx^2)t + x^2y^2) e^{-t^2}$ .

$\forall t \in \mathbb{R}, (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} = t^4 e^{-t^2} - 2(x+y)t^3 e^{-t^2} + (x^2 + 4xy + y^2)t^2 e^{-t^2} - 2(xy^2 + yx^2)t e^{-t^2} + x^2y^2 e^{-t^2}$ .

Rappelons que pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  converge. Alors, par linéarité, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = I_4 - 2(x+y)I_3 + (x^2 + 4xy + y^2)I_2 - 2(xy^2 + yx^2)I_1 + x^2y^2I_0.$$

Or  $I_3 = I_1 = 0$ .  $I_0 = \sqrt{\pi}$ ,  $I_2 = \frac{0+1}{2}I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$  et  $I_4 = \frac{2+1}{2}I_2 = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$ .

Ainsi  $\int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2\right)\sqrt{\pi}$ .

Ainsi  $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2$ .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2.$$

2.  $F$  est une application polynômiale de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  donc  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . En particulier  $F$  possède des dérivées partielles premières en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}(2x + 4y) + 2xy^2 = x + 2y + 2xy^2$ .

De même  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(4x + 2y) + 2x^2y = 2x + y + 2x^2y$ .

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = x + 2y + 2xy^2 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2x + y + 2x^2y.$$

Soit  $X = (x, y)$  un élément de  $\mathbb{R}^2$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} x + 2y + 2xy^2 = 0 \\ 2x + y + 2x^2y = 0 \end{cases}.$$

En remplaçant la seconde ligne par la seconde moins la première et en factorisant par  $x - y$  il vient :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} x + 2y + 2xy^2 = 0 \\ (x - y)(1 + 2xy) = 0 \end{cases} \text{ . Alors :}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \iff \begin{cases} x = y \\ x(3 + 2x^2) = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} 2xy = -1 \\ x + 2y + (-1)y = 0 \end{cases} \text{ .}$$

$$\begin{cases} x = y \\ x(3 + 2x^2) = 0 \end{cases} \iff x = y = 0.$$

$$\begin{cases} 2xy = -1 \\ x + 2y + (-1)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ .}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0 \iff X = (0, 0) \text{ ou } X = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ou } X = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$F$  possède exactement trois points critiques :  $O = (0, 0)$ ,  $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et  $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

**3.**  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$  donc si  $F$  possède un extremum en un point  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  alors son gradient s'annule en  $X$  et ainsi  $\frac{\partial F}{\partial x}(X) = \frac{\partial F}{\partial y}(X) = 0$ .

Alors  $F$  ne peut admettre un extremum local qu'en  $O$ ,  $A$  ou  $B$ .

Nous avons vu que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Rappelons que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = x + 2y + 2xy^2$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2x + y + 2x^2y$ .

Alors  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = 1 + 2y^2$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = 1 + 2x^2$  et  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = 2 + 4xy$ .

En utilisant les notations de Monge on obtient en  $O = (0, 0)$  :  $rt - s^2 = 1 \times 1 - 2^2 = -3 < 0$ .  $F$  ne possède pas d'extremum local en  $O = (0, 0)$ .

En  $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et  $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  on obtient :  $rt - s^2 = 2 \times 2 - 0^2 = 4 > 0$  et  $r = 2 > 0$ .

$F$  possède en  $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et  $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  un minimum local.

Notons encore que  $F(A) = F(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

En  $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  et  $B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$   $F$  possède un minimum local qui vaut  $\frac{1}{2}$ .  
De plus ce sont les seuls points de  $\mathbb{R}^2$  où  $F$  possède un extremum local.

*Remarque* Vous avez dit local ? Mouais ?

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}((x + y)^2 + 2xy) + (xy)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + y)^2 + (xy)^2 + (xy) + \frac{1}{4}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \left(xy + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Ainsi  $F$  admet un minimum global qui vaut  $\frac{1}{2}$  atteint en les seuls points  $A$  et  $B$ .

## II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

**1.** Soit  $x$  un réel.  $\varphi_x : x \rightarrow \sin(xt) e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq |\varphi_x(t)| = |\sin(xt)| e^{-t^2} \leq e^{-t^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge car } I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que

$$\int_0^{+\infty} |\varphi_x(t)| dt \text{ converge. Ainsi } \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt \text{ est absolument convergente donc convergente.}$$

$\psi_x : x \rightarrow t \cos(xt) e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leq |\psi_x(t)| = |\cos(xt)| t e^{-t^2} \leq t e^{-t^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt \text{ converge car } I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que

$$\int_0^{+\infty} |\psi_x(t)| dt \text{ converge. Ainsi } \int_0^{+\infty} \psi_x(t) dt \text{ est absolument convergente donc convergente.}$$

$$\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt \text{ convergent.}$$

**2.** Soit  $a$  et  $\lambda$  deux réels.  $\sin$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$ . L'inégalité de Taylor-lagrange appliquée à  $\sin$  à l'ordre 1 donne :

$$|\sin(a + \lambda) - \sin(a) - (a + \lambda - a) \sin'(a)| \leq \frac{|a + \lambda - a|^2}{2} \max_{u \in [\min(a, a+\lambda), \max(a, a+\lambda)]} |\sin''(u)|.$$

$$\text{Ainsi } |\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \lambda \cos(a)| \leq \frac{\lambda^2}{2} \max_{u \in [\min(a, a+\lambda), \max(a, a+\lambda)]} |-\sin(u)| \leq \frac{\lambda^2}{2}. \text{ Finalement :}$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, |\sin(a + \lambda) - \sin(a) - \lambda \cos(a)| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

**3. a.** Soit  $x$  un réel et  $h$  un réel non nul. Posons  $\Delta_x(h) = \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x)$ .

$$\Delta_x(h) = \frac{1}{h} (S(x+h) - S(x) - h C(x)).$$

$$\Delta_x(h) = \frac{1}{h} \left( \int_0^{+\infty} \sin((x+h)t) e^{-t^2} dt + \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt - h \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt \right).$$

$$\Delta_x(h) = \frac{1}{h} \left( \int_0^{+\infty} (\sin(xt+ht) + \sin(xt) - ht \cos(xt)) e^{-t^2} dt \right).$$

Soit  $A$  un réel strictement positif.

$$\left| \int_0^A \left( \sin((x+h)t) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \right| \leq \int_0^A \left| \sin((x+h)t) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right| e^{-t^2} dt.$$

En utilisant le résultat de **2.** (avec  $a = xt$  et  $\lambda = ht$ ) il vient :

$$\left| \int_0^A \left( \sin((x+h)t) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \right| \leq \int_0^A \frac{(ht)^2}{2} e^{-t^2} dt = \frac{h^2}{2} \int_0^A t^2 e^{-t^2} dt.$$

$$\int_0^{+\infty} \left( \sin((x+h)t) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \text{ et } \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \text{ existent.}$$

En faisant tendre  $A$  vers  $+\infty$  on obtient alors :

$$\left| \int_0^{+\infty} \left( \sin((x+h)t) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \right| \leq \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{|h|^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

$$\text{Alors } |\Delta_x(h)| = \frac{1}{|h|} \left| \int_0^{+\infty} \left( \sin(xt+ht) + \sin(xt) - ht \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

$$\text{Ainsi } |\Delta_x(h)| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt \text{ pour tout réel } h \text{ non nul.}$$

En faisant tendre  $h$  vers zéro il vient par encadrement :  $\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_x(h) = 0$ .

$$\text{Ainsi } \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right) = 0.$$

$$\text{Pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right) = 0.$$

$$\text{b. Soit } x \text{ un élément de } \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right) = 0 \text{ donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = C(x).$$

Alors  $S$  est dérivable en  $x$  et  $S'(x) = C(x)$ .

$$S \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R}, S'(x) = C(x).$$

**4. a.** Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $A$  un réel strictement positif. Posons ici  $\forall t \in \mathbb{R}, u(t) = \cos(xt)$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, v(t) = -\frac{1}{2} e^{-t^2}$ .

$u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = -x \sin(xt)$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, v'(t) = t e^{-t^2}$ .

De plus  $\int_0^A t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \int_0^A u(t) v'(t) dt$ . En intégrant par parties il vient alors :

$$\int_0^A t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \left[ \cos(xt) \left( -\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) \right]_0^A - \int_0^A (-x \sin(xt)) \left( -\frac{1}{2} e^{-t^2} \right) dt.$$

$$\int_0^A t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(xA) e^{-A^2} - \frac{x}{2} \int_0^A \sin(xt) e^{-t^2} dt \quad (\star).$$

Notons que  $\left| \cos(xA) e^{-A^2} \right| = |\cos(xA)| e^{-A^2} \leq e^{-A^2}$  donc, par encadrement  $\lim_{A \rightarrow +\infty} (\cos(xA) e^{-A^2}) = 0$  car

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} e^{-A^2} = 0.$$

De plus  $\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt$  et  $\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$  converge donc en faisant tendre  $A$  vers  $+\infty$  dans (★) il vient :

$$\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt; \text{ soit encore : } C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x).$$

$$\text{Pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x).$$

**b.** Posons  $\forall x \in \mathbb{R}, \ell(x) = 2 e^{\frac{x^2}{4}} S(x) - \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ .

$x \rightarrow 2 e^{\frac{x^2}{4}}$  et  $S$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc  $x \rightarrow 2 e^{\frac{x^2}{4}} S(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$x \rightarrow e^{\frac{x^2}{4}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $x \rightarrow \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$  est une primitive de cette fonction sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi

$x \rightarrow \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$\ell$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme différence de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

$$\text{De plus } \forall x \in \mathbb{R}, \ell'(x) = 2 \left(\frac{x}{2}\right) e^{\frac{x^2}{4}} S(x) + 2 e^{\frac{x^2}{4}} S'(x) - e^{\frac{x^2}{4}} = 2 e^{\frac{x^2}{4}} \left(\frac{x}{2} S(x) - \frac{1}{2} + S'(x)\right).$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, \ell'(x) = 2 e^{\frac{x^2}{4}} (-C(x) + S'(x)) = 0.$$

Par conséquent  $\ell$  est constante sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $\forall x \in \mathbb{R}, \ell(x) = \ell(0)$ .

$$\text{Or } \ell(0) = 2 e^{\frac{0^2}{4}} S(0) - \int_0^0 e^{\frac{t^2}{4}} dt = 2 S(0) = \int_0^{+\infty} \sin(0 \times t) e^{-t^2} dt = 0.$$

Ainsi  $\forall x \in \mathbb{R}, 2 e^{\frac{x^2}{4}} S(x) - \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt = \ell(x) = 0$ . Finalement

$$\forall x \in \mathbb{R}, 2 e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

**c.**  $\forall x \in \mathbb{R}, 2 e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \frac{1}{2 e^{\frac{x^2}{4}}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt\right) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt \text{ et } S'(x) = C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt.$$

### III Obtention d'un développement limité

**1.** Soit  $x$  un réel.  $t \rightarrow \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

De plus  $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{1}{1+x^2 t^2} \leq 1$  et  $0 \leq e^{-t^2}$ . Alors  $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} \leq e^{-t^2}$ .



La convergence de  $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$  et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$  converge.

Pour tout réel  $x$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt$  converge.

**2. a.** Soit  $u$  un réel positif ou nul.  $1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u} = \frac{(1-u+u^2)(1+u) - 1}{1+u} = \frac{(1+u^3) - 1}{1+u} = \frac{u^3}{1+u}$ .

Or  $0 \leq \frac{1}{1+u} \leq 1$  et  $0 \leq u^3$  donc  $0 \leq \frac{u^3}{1+u} \leq u^3$ . Ainsi  $0 \leq 1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u} \leq u^3$ .

$\forall u \in [0, +\infty[, 0 \leq 1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u} \leq u^3$ .

**b.** Soit  $x$  un réel.  $t \rightarrow 1 - x^2 t^2 + x^4 t^4$  est une fonction polynôme donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt$  converge.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( 1 - x^2 t^2 + x^4 t^4 - \frac{1}{1+x^2 t^2} \right) e^{-t^2} dt.$$

$\forall t \in \mathbb{R}, x^2 t^2 \in [0, +\infty[$  donc d'après ce qui précède :  $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq 1 - x^2 t^2 + x^4 t^4 - \frac{1}{1+x^2 t^2} \leq (x^2 t^2)^3$ .

Comme  $\forall t \in \mathbb{R}, e^{-t^2} \geq 0 : 0 \leq (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} - \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} \leq x^6 t^6 e^{-t^2}$  pour tout réel  $t$ .

Alors  $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2 t^2} e^{-t^2} dt \leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt$  car toutes les intégrales convergent.

Ainsi  $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt$ .

Remarquons que  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^6 t^6 e^{-t^2} dt = x^6 I_6 = x^6 \frac{4+1}{2} I_4 = x^6 \frac{5}{2} \frac{3}{4} \sqrt{\pi} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$ . Finalement :

$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$ .

**3.**  $\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt = I_0 - x^2 I_2 + x^4 I_4 = \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} x^4$ .

Posons  $Q = \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} X^2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} X^4$ .  $Q$  est un élément de  $\mathbb{R}[X]$  de degré 4 donc de degré inférieur ou égal à 5.

Montrons que  $g(x) = Q(x) + o(x^5)$  au voisinage de 0. Nous pourrions alors dire que  $g$  possède un développement limité à l'ordre 5 en 0 de partie régulière  $Q$ .

Pour cela il suffit de montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - Q(x)}{x^5} = 0$  ou que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q(x) - g(x)}{x^5} = 0$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq Q(x) - g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |Q(x) - g(x)| = Q(x) - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6 \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} |x|^6.$$

$$\text{Donc : } \forall x \in \mathbb{R}^*, 0 \leq \left| \frac{Q(x) - g(x)}{x^5} \right| \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} |x|.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{15\sqrt{\pi}}{8} |x| = 0 \text{ donc par encadrement il vient } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Q(x) - g(x)}{x^5} = 0.$$

Ceci achève de montrer que  $g(x) = Q(x) + o(x^5)$  au voisinage de 0 avec  $Q = \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} X^2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} X^4$ . Ainsi :

$$g \text{ admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 qui est : } g(x) = \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} x^4 + o(x^5).$$

#### IV Nature d'une série

1. Soit  $p$  un élément de  $\mathbb{N}$ .  $t \rightarrow \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{1}{(2p)!} t^{2p} e^{-t^2} \text{ et } \frac{1}{(2p)!} I_{2p} = \frac{1}{(2p)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence

$$\text{de } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt.$$

$$\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \text{ converge.}$$

2. Soit  $p$  un élément de  $\mathbb{N}$ .  $\forall t \in \mathbb{R}, 0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{1}{(2p)!} t^{2p} e^{-t^2}$ .

$$\text{Ainsi } 0 \leq u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt \leq \frac{1}{(2p)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt = \frac{1}{(2p)!} I_{2p} \text{ car ces intégrales convergent.}$$

$$\text{Pour tout élément } p \text{ de } \mathbb{N}, 0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi} \text{ donc } \forall p \in \mathbb{N}, \frac{I_{2p}}{(2p)!} = \sqrt{\pi} \frac{(1/4)^p}{p!}. \text{ Ainsi } \forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_p \leq \sqrt{\pi} \frac{(1/4)^p}{p!}.$$

La convergence de la série de terme général  $\frac{(1/4)^p}{p!}$  et les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général  $u_p$ .

$$\text{La série de terme général } u_p \text{ converge.}$$

---

## PROBLÈME II

---

**1. a.** Par définition même de la matrice  $C$  on a,

$$\boxed{\text{pour tout élément } i \text{ de } \llbracket 1, n-1 \rrbracket : f(e_i) = e_{i+1}.}$$

**b.** Montrons par récurrence que pour tout élément  $j$  de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f^j(e_1) = e_{j+1}$ .

La propriété est vraie pour  $j = 0$  car  $f^0 = \text{id}$ .

Supposons la propriété vraie pour un élément  $j$  de  $\llbracket 0, n-2 \rrbracket$  et montrons la pour  $j+1$ .

Par hypothèse  $f^j(e_1) = e_{j+1}$ . Alors  $f^{j+1}(e_1) = f(f^j(e_1)) = f(e_{j+1}) = f(e_{j+1+1})$  d'après **a.**

Ainsi s'achève la récurrence. Donc  $\forall j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $f^j(e_1) = e_{j+1}$ . En particulier :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f^j(e_1) = e_{j+1}.}$$

*Remarque* On a alors  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n) = (e_1, f(e_1), \dots, f^{n-1}(e_1))$ .

Par définition de la matrice  $C$  :  $f(e_n) = -a_0 e_1 - a_1 e_2 - \dots - a_{n-2} e_{n-1} - a_{n-1} e_n$ .

Donc  $f^n(e_1) = f(f^{n-1}(e_1)) = f(e_{n-1+1}) = f(e_n) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_{n-2} e_{n-1} + a_{n-1} e_n)$ .

$$\boxed{f^n(e_1) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_{n-2} e_{n-1} + a_{n-1} e_n) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j e_{j+1}.}$$

**2. a.**  $g(e_1) = f^n(e_1) + a_{n-1} f^{n-1}(e_1) + \dots + a_1 f(e_1) + a_0 \text{id}(e_1) = f^n(e_1) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(e_1)$ .

En utilisant **1.** on obtient :  $g(e_1) = -\sum_{j=0}^{n-1} a_j e_{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j e_{j+1} = 0_{\mathbb{C}^n}$ .

$$\boxed{g(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}.}$$

**b.** Soit  $i$  un élément de  $\mathbb{N}$ .  $g \circ f^i = \left( f^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \right) \circ f^i = f^{n+i} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+i}$ .

Alors :  $g \circ f^i = f^{i+n} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{i+k} = f^i \circ \left( f^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k \right) = f^i \circ g$ .

$$\boxed{\forall i \in \mathbb{N}, g \circ f^i = f^i \circ g.}$$

c. Soit  $i$  un élément de  $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

$$f^i(e_1) = e_{i+1}. \text{ Donc } g(e_{i+1}) = g(f^i(e_1)) = (g \circ f^i)(e_1) = (f^i \circ g)(e_1) = (f^i(g(e_1))) = f^i(0_{\mathbb{C}^n}) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Alors  $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, g(e_{i+1}) = 0_{\mathbb{C}^n}$ . Ou :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, g(e_i) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

*Remarque*  $P$  est également un polynôme annulateur de  $C$  donc de sa matrice compagnon.

d. Ainsi l'endomorphisme  $g$  coïncide avec l'endomorphisme nul de  $\mathbb{C}^n$  sur la base  $\mathcal{B}_0$ .

Ces deux endomorphismes sont donc égaux. Par conséquent  $g = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ .

Or  $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0 \text{id} = P(f)$ . Finalement  $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ .

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \text{ est un polynôme annulateur de } f.$$

Application 1: Posons  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

$A$  est la matrice compagnon du polynôme  $P_A = X^5 + (-0)X^4 + (-1)X^3 + (-2)X^2 + (-0)X + (-1)!$

$P_A = X^5 - X^3 - 2X^2 - 1$  et  $P_A$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Alors  $A^5 - A^3 - 2A^2 - I_5 = 0_{\mathcal{M}_5(\mathbb{C})}$ .

Par conséquent  $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_5(\mathbb{C}) \text{ telle que } A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5.$$

e.  $P$  est un polynôme annulateur de  $f$  donc les valeurs propres de  $f$  sont des racines de  $P$ . Or l'ensemble des valeurs propres de  $f$  est aussi l'ensemble des valeurs propres de  $C$ . Ainsi

$$\text{les valeurs propres de } C \text{ sont des racines de } P.$$

3. a.  $Q(f)(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j f^j(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j e_{j+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} e_i$ .

$$Q(f)(e_1) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j e_{j+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} e_i.$$

**b.** Reprenons le polynôme  $Q$  de la question précédente. Observons que c'est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  **quelconque**.

Supposons que  $Q$  est un polynôme annulateur de  $f$ . Alors  $Q(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$ . En particulier  $Q(f)(e_1) = 0_{\mathbb{C}^n}$ .

Donc  $\sum_{i=1}^n \alpha_{i-1} e_i = 0_{\mathbb{C}^n}$ . Comme la famille  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est libre :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \alpha_{i-1} = 0$ .

Alors  $Q = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$  est le polynôme nul ce qui contredit l'hypothèse.

Il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  et annulateur de  $f$ .

**c.** Soit  $\lambda$  une racine de  $P$ .

$P(f) = ((X - \lambda)R)(f) = (X - \lambda)(f) \circ R(f) = (f - \lambda \text{Id}) \circ R(f)$ . Comme  $P(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$  :

$$(f - \lambda \text{Id}) \circ R(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}.$$

**d.** Reprenons les hypothèses du **c.**

$P = (X - \lambda)R$  et  $P$  est de degré  $n$  donc  $R$  est un polynôme de degré  $n - 1$ .

En particulier  $R$  est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ . Alors  $R$  n'est pas un polynôme annulateur de  $f$ .

Ainsi  $R(f) \neq 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$  donc **il existe** un élément  $a$  de  $\mathbb{C}^n$  tel que  $R(f)(a)$  ne soit pas le vecteur nul.

Posons  $b = R(f)(a)$ .  $b$  est non nul.

De plus :  $(f - \lambda \text{id})(b) = (f - \lambda \text{id})(R(f)(a)) = ((f - \lambda \text{id}) \circ R(f))(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}(a) = 0_{\mathbb{C}^n}$ .

$b$  n'est pas le vecteur nul et  $(f - \lambda \text{id})(b) = 0_{\mathbb{C}^n}$  donc  $\lambda$  est une valeur propre de  $f$  donc également de  $C$ .

Toutes les racines de  $P$  sont des valeurs propres de  $C$ .

*Remarques* 1. On pouvait également raisonner par l'absurde. On supposant que  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $f$  on obtient l'existence de  $(f - \lambda \text{id})^{-1}$  qui permet d'obtenir (par composition)  $R(f) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)}$  donc une contradiction.

2. Notons que **2. e.** et **3. d.** montrent que l'ensemble des valeurs propres de  $C$  est l'ensemble des racines de  $P$ .

**4. a.** Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{C}$ . Pour tout élément  $k$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  notons  $H_k$  la  $k^{\text{ème}}$  colonne de  $C - xI_n$ .

Pour montrer que  $C - xI_n$  est de rang au moins  $n - 1$  il suffit de montrer que la famille  $(H_1, H_2, \dots, H_{n-1})$  est libre non ?

Notons encore  $(E_1, E_2, \dots, E_n)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .  $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $H_k = -x E_k + E_{k+1}$ .

Soit  $(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})$  un élément de  $\mathbb{C}^{n-1}$  tel que  $\sum_{k=1}^{n-1} z_k H_k = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}$ .

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} = \sum_{k=1}^{n-1} z_k H_k = \sum_{k=1}^{n-1} (z_k (-x) E_k + z_k E_{k+1}) = - \sum_{k=1}^{n-1} (z_k x E_k) + \sum_{k=1}^{n-1} (z_k E_{k+1}).$$

$$0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} = - \sum_{k=1}^{n-1} (z_k x E_k) + \sum_{k=2}^n (z_{k-1} E_k) = -z_1 x E_1 + \sum_{k=2}^{n-1} ((-z_k x + z_{k-1}) E_k) + z_{n-1} E_n.$$

$(E_1, E_2, \dots, E_n)$  étant une famille libre on obtient :  $-z_1 x = 0$ ,  $\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ ,  $-z_k x + z_{k-1} = 0$  et  $z_{n-1} = 0$ .

Ne reste plus qu'à démontrer par une petite récurrence descendante que  $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $z_k = 0$ .

La propriété est vraie pour  $n-1$ . Supposons la vraie pour  $k$  dans  $\llbracket 2, n-1 \rrbracket$  et montrons la pour  $k-1$ .

Par hypothèse  $z_k = 0$ . Or  $-z_k x + z_{k-1} = 0$  donc  $z_{k-1} = 0$ . Ce qui achève la récurrence !

Ainsi  $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $z_k = 0$ . La famille  $(H_1, H_2, \dots, H_{n-1})$  est donc libre et  $C - x I_n$  est au moins de rang  $n-1$ .

Pour tout nombre complexe  $x$ , la matrice  $C - x I_n$  est de rang supérieur ou égal à  $n-1$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $C$  donc de  $f$ . La dimension du sous-espace propre SEP  $(C, \lambda)$  de  $C$  associé à  $\lambda$  est la même que la dimension du sous-espace propre SEP  $(f, \lambda)$  de  $f$  associé à  $\lambda$ .

Ainsi  $\dim \text{SEP}(C, \lambda) = \dim \text{SEP}(f, \lambda) = \dim \text{Ker}(f - \lambda \text{id}) = \dim \mathbb{C}^n - \text{rg}(f - \lambda \text{id}) = n - \text{rg}(C - \lambda I_n)$ .

Or  $\text{rg}(C - \lambda I_n) \geq n-1$  donc  $n - \text{rg}(C - \lambda I_n) \leq 1$  Ainsi  $\dim \text{SEP}(C, \lambda) \leq 1$ . Or la dimension d'un sous-espace propre est toujours supérieure ou égale à 1. Par conséquent  $\text{SEP}(C, \lambda)$  est de dimension 1.

Chaque sous espace propre de  $C$  est de dimension 1.

**b.** Les sous-espaces propres de  $C$  étant de dimension 1, la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $C$  est égale au nombre de valeurs propres distinctes de  $C$  c'est à dire au nombre de racines distinctes de  $P$ .

Rappelons que  $C$  est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est  $n$ . Alors :

$C$  est diagonalisable si et seulement si  $P$  admet  $n$  racines deux à deux distinctes.

**5. a. Application 2 :** Notons que  $A_1$  est la matrice compagnon du polynôme  $P_{A_1} = X^4 - 1$ .

Or  $P_{A_1}$  admet quatre racines distinctes dans  $\mathbb{C}$  :  $1, -1, i$  et  $-i$ . Ainsi :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable.}$$

**b. Application 3:** Notons que  $A_2$  est la matrice compagnon du polynôme  $P_{A_2} = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4$ .

1 est racine de  $P_{A_2}$ . De plus  $P_{A_2} = (X - 1)(X^3 - X^2 - 4X + 4) = (X - 1)(X^2(X - 1) - 4(X - 1))$ .

Alors  $P_{A_2} = (X - 1)^2(X^2 - 4) = (X - 1)^2(X - 2)(X + 2)$ .

$P_{A_2}$  n'a que trois racines distinctes dans  $\mathbb{C}$  : 1, 2 et  $-2$  donc

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

**6. a.** Le cours indique que si  $M$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ) alors  ${}^tM$  est inversible si et seulement si  $M$  est inversible.

Pour tout nombre complexe  $t$  :  $B - tI_n = {}^tC - t{}^tI_n = {}^t(C - tI_n)$ .

Ainsi  $B - tI_n$  est inversible si et seulement si  $C - tI_n$  est inversible.

pour tout nombre complexe  $t$ ,  $B - tI_n$  est inversible si et seulement si  $C - tI_n$  est inversible.

**b.** Soit  $\lambda$  un complexe. Ce qui précède permet de dire que  $B - \lambda I_n$  n'est pas inversible si et seulement si  $C - \lambda I_n$  est n'est pas inversible.

Alors  $\lambda$  est valeur propre de  $B$  si et seulement si  $\lambda$  est valeur propre de  $C$ .

$B$  et  $C$  ont les mêmes valeurs propres.

**c.** Soit  $\lambda$  un élément de  $\mathbb{C}$  et soit  $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$  un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ .

Notons que  $B - \lambda I_n = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$ .

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -\lambda - a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, -\lambda u_k + u_{k+1} = 0 \text{ et } -a_0 u_1 - a_1 u_2 - \cdots - a_{n-2} u_{n-1} - (\lambda + a_{n-1}) u_n = 0.$$

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, u_{k+1} = \lambda u_k \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_{k+1} + \lambda u_n = 0.$$

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = \lambda^{k-1} u_1 \text{ et } \sum_{k=0}^{n-1} (a_k \lambda^k u_1) + \lambda \lambda^{n-1} u_1 = 0.$$

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = \lambda^{k-1} u_1 \text{ et } \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k + \lambda^n \right) u_1 = 0.$$

$$U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = \lambda^{k-1} u_1 \text{ et } P(\lambda) u_1 = 0.$$

Or  $P(\lambda) = 0$ . Donc  $U \in \text{SEP}(B, \lambda) \iff \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, u_k = \lambda^{k-1} u_1 \iff U \in \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right)$ .

Une base du sous-espace propre de  $B$  associé à la valeur propre  $\lambda$  est :  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right)$ .

**d.**  $P$  admet  $n$  racines distinctes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Or les valeurs propres de  $B$  sont les valeurs propres de  $C$  qui sont les racines de  $P$ .

Ainsi  $B$  admet  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .  $B$  est alors diagonalisable.

Posons pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket, U_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_k \\ \lambda_k^2 \\ \vdots \\ \lambda_k^{n-1} \end{pmatrix}$ .

Pour tout  $k$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket, (U_k)$  est une base du sous-espace propre de  $B$  associé à la valeur propre  $\lambda_k$ .

Comme  $B$  est diagonalisable,  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est somme directe des sous-espaces propres de  $B$  donc  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $B$  respectivement associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Notons  $V$  la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  à la base  $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ .



$V$  est inversible comme matrice de passage et  $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$  par définition même de  $U_1, U_2, \dots, U_n$ .

$B$  est diagonalisable et la matrice  $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$  est inversible.

**7. a.**  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(\varepsilon_i) = \mu_i \varepsilon_i$  donc  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \mathbb{N}, u^k(\varepsilon_i) = \mu_i^k \varepsilon_i$ . Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u^k(a) = u^k(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n) = u^k(\varepsilon_1) + u^k(\varepsilon_2) + \cdots + u^k(\varepsilon_n) = \mu_1^k \varepsilon_1 + \mu_2^k \varepsilon_2 + \cdots + \mu_n^k \varepsilon_n.$$

Pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ , la matrice de  $u^k(a)$  dans la base  $\mathcal{E}$  est  $S_k = \begin{pmatrix} \mu_1^k \\ \mu_2^k \\ \vdots \\ \mu_n^k \end{pmatrix}$ .

$E$  étant de dimension  $n$ , la famille  $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$  est une base de  $E$  si et seulement si elle est de rang  $n$  ou si et seulement si la famille  $(S_0, S_1, \dots, S_{n-1})$  est de rang  $n$ .

$(S_0, S_1, \dots, S_{n-1})$  est de rang  $n$  si et seulement si sa matrice dans la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  est de rang  $n$ .

Or cette matrice est  $W = \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \cdots & \mu_1^{n-1} \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mu_n & \mu_n^2 & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}$  et sa transposée est  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-1} & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}$ .

Comme les complexes  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  sont deux à deux distincts, d'après **6. d.** cette dernière matrice est inversible. Alors  $W$  est inversible donc  $\mathcal{B}_a$  est de rang  $n$ .

Ceci achève de montrer que  $\mathcal{B}_a$  est une base de  $E$ .

Si  $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$  alors  $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$  est une base de  $E$ .

**b.** Déterminons la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}_a$ . Constatons que  $\forall k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, u(u^k(a)) = u^{k+1}(a)$  !

De plus  $u(u^{n-1}(a)) = u^n(a)$ . Soit  $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$  la famille des coordonnées de  $u^n(a)$  dans la base  $\mathcal{B}_a$ .

Posons  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, b_k = -c_k$ . Alors  $u(u^{n-1}(a)) = u^n(a) = -b_0 a - b_1 u(a) - \cdots - b_{n-1} u^{n-1}(a)$ .

Ainsi la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}_a$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -b_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -b_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -b_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

C'est la matrice compagnon du polynôme  $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$ .

Il existe un polynôme  $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0$  tel que la matrice associée à  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$  soit la matrice compagnon du polynôme  $P_1$ .