LYON 2007 PREMIER PROBLÈME

Partie I Étude de l'application f.

1. $x \to \dfrac{1}{x}$ et $x \to \ln(1+x)$ sont continues en tout point de $]0,+\infty[$ donc, par produit, f est continue en tout point de $]0,+\infty[$.

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$.

Nous avons alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$. f est donc continue en 0.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

2. a. $x \to \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ comme fonction rationnelle.

$x \to x+1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$; $\forall x \in]0,+\infty[,\ 1+x \in \mathbb{R}^{+*}$; ln est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Alors, par composition, $x \to \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Ainsi par produit f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1}{1+x}\, x - \ln(1+x)\right) = \dfrac{A(x)}{x^2}\cdot$

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) = \frac{A(x)}{x^2}\cdot}$$

b. Au voisinage de 0, $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \mathrm{o}(x)$ donc $\dfrac{x}{1+x} = x - x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

Au voisinage de 0 on a aussi $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

Alors, au voisinage de 0, $\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) = (x - x^2) - \left(x - \dfrac{x^2}{2}\right) = -\dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$.

Donc $\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}\cdot$ Alors $\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot}$$

c. ▶ Version 1 Avec le théorème de la "limite de la dérivée" (au programme ?).

• f est continue sur $[0,+\infty[$;

• f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;

• f' admet une limite finie à droite en 0 qui vaut $-\dfrac{1}{2}\cdot$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}\cdot$

► Version 2 : avec le théorème du cours sur le prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Posons $\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}\cdot$ Tout ce qui précède montre que :

• g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$;

• g' admet une limite finie à droite en 0.

Alors g se prolonge en une fonction $\hat{g}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Notons que f et $\hat{g}$ coïncident sur $]0,+\infty[$.

Or $\hat{g}(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \hat{g}(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. f et $\hat{g}$ coïncident en 0.

Finalement $f = \hat{g}$ et ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

En particulier $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -\dfrac{1}{2}\cdot$

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[\text{ et } f'(0) = -\frac{1}{2}\cdot}$$

d. $x \to \dfrac{x}{1+x}$ et $x \to \ln(1+x)$ sont dérivables sur $[0,+\infty[$ donc A est dérivable sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ A'(x) = \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = -\dfrac{x}{(1+x)^2}\cdot$

A est continue sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ A'(x) < 0$ donc A est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$.

Notons encore que $A(0) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right) = -\infty$.

$$\boxed{A \text{ est strictement décroissante sur } [0,+\infty[,\ A(0) = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} A(x) = -\infty.}$$

A étant strictement décroissante sur $[0,+\infty[$, $\forall x \in]0,+\infty[,\ A(x) < A(0) = 0$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2} < 0$. f étant continue sur $[0,+\infty[$ on peut alors dire que :

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0,+\infty[.}$$

e. $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
Alors :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

3. a. Rappelons que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{A(x)}{x^2}\cdot$

Rappelons également que : A est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que $\forall x \in [0,+\infty[,\ A'(x) = -\dfrac{x}{(1+x)^2}\cdot$

Ainsi A est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. $x \to \dfrac{1}{x^2}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, $x \to \dfrac{A(x)}{x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. Ce qui suffit pour dire que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$.

De plus : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = \dfrac{1}{x^4}\Big(A'(x)\,x^2 - A(x)\,(2x)\Big) = \dfrac{1}{x^3}\left(-\dfrac{x}{(1+x)^2}\,x - 2\left(\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)\right)\right)$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = \dfrac{1}{x^3}\left(-\dfrac{x^2+2x(1+x)}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)\right) = \dfrac{1}{x^3}\left(-\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x)\right)$.

$$\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = \frac{1}{x^3}\left(-\frac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ \ln(1+x)\right) = \frac{B(x)}{x^3}\cdot}$$

b. $x \to -\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2}$ et $x \to 2\ln(1+x)$ sont dérivables sur $[0,+\infty[$ donc B est dérivable sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in [0,+\infty[,\ B'(x) = -\dfrac{(6x+2)\,(1+x)^2 - (3x^2+2x)\,2(1+x)}{(1+x)^4} + \dfrac{2}{(1+x)}\cdot$

$\forall x \in [0,+\infty[,\ B'(x) = -\dfrac{2(3x+1)\,(1+x) - 2(3x^2+2x)}{(1+x)^3} + \dfrac{2}{(1+x)}\cdot$

$\forall x \in [0,+\infty[,\ B'(x) = 2\,\dfrac{-(3x^2+4x+1)+(3x^2+2x)+(1+x)^2}{(1+x)^3} = \dfrac{2\,x^2}{(1+x)^3}\cdot$

Alors $\forall x \in [0,+\infty[,\ B'(x) \geqslant 0$. B est croissante sur $[0,+\infty[$. Notons que $B(0)=0$.

Notons encore que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2}\right) = -3$ car $-\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{3x^2}{x^2} = -3$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} B(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{3x^2+2x}{(1+x)^2} + 2\ \ln(1+x)\right) = +\infty$.

$$\boxed{B \text{ est croissante sur } [0,+\infty[,\ B(0)=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} B(x) = +\infty.}$$

$B(0)=0$ et B est croissante sur $[0,+\infty[$ donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ B(x) \geqslant 0$.

Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = \dfrac{B(x)}{x^3} \geqslant 0$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est convexe sur }]0,+\infty[.}$$

Remarque *f est même convexe sur $[0,+\infty[$. En effet f' est continue sur $[0,+\infty[$ et de dérivée positive sur $]0,+\infty[$. Donc f' est croissante sur $[0,+\infty[$ et f est alors convexe sur $[0,+\infty[$.*

Exercice *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$ et que $f''(0) = \dfrac{2}{3}\cdot$*

4. RAS ! ! Il convient simplement de se rappeler que :

- $f(0)=1$.
- f est (strictement) décroissante sur $[0,+\infty[$.

- La demi-tangente au point d'abscisse 0 est portée par la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}\,x + 1$.

- La courbe représentative de f est au-dessus de sa demi-tangente au point d'abscisse 0.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La droite d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f.

Partie II Un développement en série.

---

1. Soit N dans $\mathbb{N}$ et soit t un réel de l'intervalle $[0,1]$.

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, t^k = \sum_{k=0}^{N} (-t)^k = \frac{1-(-t)^{N+1}}{1-(-t)} = \frac{1-(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t} \text{ car } -t \text{ n'est pas égal à 1.}$$

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, t^k = \frac{1}{1+t} - \frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t} \text{ donc } \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, t^k + \frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t}\cdot$$

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, t^k + \frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t}\cdot}$$

2. Soit N dans $\mathbb{N}$ et soit x un réel de l'intervalle $[0,1]$.

$$\forall t \in [0,1],\ \frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k\, t^k + \frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t}\cdot$$

En intégrant et en utilisant la linéarité de l'intégrale il vient :

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \int_0^x t^k\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \big[\ln|1+t|\big]_0^x = \ln(1+x)$ et $\forall k \in [\![0,N]\!],\ \displaystyle\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}}{k+1}\cdot$

Alors $\displaystyle\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\text{Si } N \in \mathbb{N} \text{ et si } x \in [0,1],\ \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^{k+1}}{k+1} + J_N(x) \text{ où } J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.}$$

3. Soit N dans $\mathbb{N}$ et soit x un réel de l'intervalle $[0,1]$.

Comme $0 \leqslant x$, $\displaystyle |J_N(x)| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x \left|\frac{(-1)^{N+1}\, t^{N+1}}{1+t}\right|\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$

Or $\forall t \in [0,x],\ \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ et $t^{N+1} \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,x],\ \dfrac{t^{N+1}}{1+t} \leqslant t^{N+1}$.

Alors $\displaystyle |J_N(x)| \leqslant \int_0^x \frac{t^{N+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^{N+1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{N+2}}{N+2}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \forall N \in \mathbb{N},\ |J_N(x)| \leqslant \frac{x^{N+2}}{N+2}\cdot}$$

4. Soi x un élément de $[0,1]$.

$\forall N \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant |J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2} \leqslant \dfrac{1}{N+2}$ et $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+2} = 0$.

Par encadrement on obtient alors : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} J_N(x) = 0$.

Or $\forall N \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x) - J_N(x)$. Donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$.

Alors la série de terme général $\dfrac{(-1)^k\, x^{k+1}}{k+1}$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k\, x^{k+1}}{k+1} = \ln(1+x)$. En translatant on peut dire que la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} = \ln(1+x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } [0,1], \text{ la série de terme général } \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n} = \ln(1+x).}$$

Exercice *Montrer que ce résultat vaut encore pour $x \in]-1,0[$.*

Partie III Égalité d'une intégrale et d'une somme de série.

---

1. Soit N un élément de $\mathbb{N}$ et x un réel de l'intervalle $]0,1]$.

$\left|\ln(1+x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^{k+1}}{k+1}\right| = |J_N(x)| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$. Ce qui donne : $\left|x\, f(x) - x \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1}\right| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

Alors : $x \left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1}\right| = |x| \left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1}\right| = \left|x\, f(x) - x \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1}\right| \leqslant \dfrac{x^{N+2}}{N+2}$.

En divisant par x qui est strictement positif on obtient : $\left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1}\right| \leqslant \dfrac{x^{N+1}}{N+2}$.

Notons que $x \to f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1}$ et $x \to \dfrac{x^{N+1}}{N+2}$ prennent la valeur 0 en 0 donc l'inégalité précédente vaut encore pour $x = 0$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \forall N \in \mathbb{N},\ \left| f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1}\right| \leqslant \frac{x^{N+1}}{N+2}.}$$

2. Soit N un élément de $\mathbb{N}$.

$$\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

$\displaystyle\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\, x^k}{k+1}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. Alors :

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| = \left|\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^k}{k+1}\right)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|f(x) - \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k\,x^k}{k+1}\right|\mathrm{d}x.$$

Donc $0 \leqslant \left|\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\right| \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{N+1}}{N+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(N+2)^2}\cdot$

$\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{(N+2)^2} = 0$. Alors par encadrement on obtient : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Ceci suffit pour dire que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}t.}$$

3. Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{1\leqslant 2p+1\leqslant 2N+1} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{1\leqslant 2p\leqslant 2N+1} \frac{1}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}\cdot$$

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{1\leqslant 2p+1\leqslant 2N+1} \frac{(-1)^{(2p+1)-1}}{(2p+1)^2} + \sum_{1\leqslant 2p\leqslant 2N+1} \frac{(-1)^{(2p)-1}}{(2p)^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}\cdot$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } N \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}\cdot}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } N \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4p^2}\cdot}$$

4. Soit N un élément de $\mathbb{N}^*$. En soustrayant les deux égalités de Q3 on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = 2\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{4\,p^2} \text{ ou } \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p^2}\cdot$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ il vient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}\cdot$ Alors :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}\cdot}$$

Partie IV Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles.

1. Rappelons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Posons que $\forall x \in [0,+\infty[,\ \widehat{F}(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

$\widehat{F}$ est la primitive de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$ qui prend la valeur 0 en 0.

Donc $\widehat{F}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\forall x \in [0,+\infty[,\ \widehat{F}'(x) = f(x)$. Ainsi $\widehat{F}'$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Finalement $\widehat{F}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,+\infty[$. Alors la restriction F de $\widehat{F}$ à $]0,+\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle.

Notons aussi que : $\forall x \in]0,+\infty[,\ F'(x) = f(x)$ et $F''(x) = f'(x)$.

- $u : (x,y) \to xy$, $v : (x,y) \to x$ et $w : (x,y) \to y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$ comme fonctions polynômes ;
- $\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, u(x,y) > 0,\ v(x,y) > 0$ et $w(x,y) > 0$;
- F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Par composition $(x,y) \to F(xy)$, $(x,y) \to F(x)$ et $(x,y) \to F(y)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.

G est alors une combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$. Ainsi :

$$\boxed{G \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[^2.}$$

Soit (x,y) un élément de $]0,+\infty[^2$.

$\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)\,F'\big(u(x,y)\big) - \dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y)\,F'\big(v(x,y)\big) - \dfrac{\partial w}{\partial x}(x,y)\,F'\big(w(x,y)\big) = y\,f(xy) - 1\times f(x) - 0 \times f(y)$.

$\dfrac{\partial G}{\partial x}(x,y) = y\,f(xy) - f(x)$. De même $\dfrac{\partial G}{\partial y}(x,y) = x\,f(xy) - f(y)$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = y\,f(xy) - f(x) \text{ et } \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = x\,f(xy) - f(y).}$$

Soit (x,y) un élément de $]0,+\infty[^2$. En procédant comme pour les dérivées partielles premières on obtient :

$\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = y^2 f'(xy) - f'(x)$, $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial x}(x,y) = f(xy) + yx\,f'(xy)$ et $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = x^2 f'(xy) - f'(y)$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = y^2 f'(xy) - f'(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,y) = x^2 f'(xy) - f'(y).}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial x}(x,y) = f(xy) + yx\,f'(xy).}$$

2. Soit $X = (x,y)$ un élément de $]0,+\infty[^2$.

$$\frac{\partial G}{\partial x}(X) = \frac{\partial G}{\partial y}(X) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} y f(xy) - f(x) = 0 \\ x f(xy) - f(y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0 \\ \dfrac{\ln(1+xy)}{y} - \dfrac{\ln(1+y)}{y} = 0 \end{cases}.$$

$\frac{\partial G}{\partial x}(X) = \frac{\partial G}{\partial y}(X) = 0 \Longleftrightarrow \ln(1+xy) = \ln(1+x) = \ln(1+y) = 0 \Longleftrightarrow 1+xy = 1+x = 1+y.$

$\frac{\partial G}{\partial x}(X) = \frac{\partial G}{\partial y}(X) = 0 \Longleftrightarrow xy = x = y \Longleftrightarrow x = y$ et $x^2 = x \Longleftrightarrow x = y = 1$ (car x est strictement positif).

$$\boxed{G \text{ admet } (1,1) \text{ comme unique point critique.}}$$

3. $]0,+\infty[^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit de deux ouverts de $\mathbb{R}$ et G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet ouvert.

Ainsi si G admet un extremum en un point de $]0,+\infty[^2$, ce point est un point critique de G c'est donc $(1,1)$.

Posons $A = (1,1)$, $r = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(A)$, $s = \frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial x}(A)$ et $t = \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(A)$.

$r = 1^2\, f'(1\times 1) - f'(1) = 0$ et $s = f(1\times 1) + 1\times 1\, f'(1\times 1) = f(1) + f'(1) = \ln 2 + \frac{1}{2} - \ln 2 = \frac{1}{2}\cdot$

Alors $rt - s^2 = -s^2 = -\frac{1}{4} < 0$ donc G n'admet pas d'extremum en $A = (1,1)$.

$$\boxed{G \text{ n'admet pas d'extremum local.}}$$
