

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss

Soit m un réel. Posons $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

ψ_m est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres m et σ^2 .

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x) dx$ existe et vaut 1. Par conséquent, $\int_{-\infty}^{+\infty} (\sqrt{2\pi}\sigma \psi_m(x)) dx$ existe et vaut $\sqrt{2\pi}\sigma$.

Notons alors que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2\pi}\sigma \psi_m(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = e^{-(x-m)^2}$ et $\sqrt{2\pi}\sigma = \sqrt{\pi}$.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx$ existe et vaut $\sqrt{\pi}$.

Pour tout réel m , $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2} dx$ existe et vaut $\sqrt{\pi}$.

Partie I : Un produit scalaire sur E.

1. Soient α et β deux réels quelconques ! $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, donc $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$.

En divisant par 2 il vient $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.

Si α et β sont deux réels (positifs ou nuls) : $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$.

Dans toute la suite w est l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}$ (c'est dans II...)

2. u , v et w sont continues sur \mathbb{R} donc le produit uvw est continue sur \mathbb{R} .

De plus la question précédente donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |u(x)v(x)| = |u(x)||v(x)| \leq \frac{1}{2}(|u(x)|^2 + |v(x)|^2) = \frac{1}{2}((u(x))^2 + (v(x))^2).$$

En remarquant que w est positive sur \mathbb{R} on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |u(x)v(x)w(x)| = |u(x)||v(x)|w(x) \leq \frac{1}{2}((u(x))^2 + (v(x))^2)w(x) \text{ ou encore :}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq |u(x)v(x)w(x)| \leq \frac{1}{2}(u(x))^2 w(x) + \frac{1}{2}(v(x))^2 w(x) \quad (*).$$

De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 w(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} (v(x))^2 w(x) dx$ convergent car u et v sont des éléments de E .

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} (u(x))^2 w(x) + \frac{1}{2} (v(x))^2 w(x) \right) dx$ converge.

(*) et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors (en deux temps...) la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x) v(x) w(x)| dx$.

Finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) v(x) w(x) dx$ est absolument convergente donc convergente.

Si u et v sont deux éléments de E , $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) v(x) e^{-x^2} dx$ converge.

3. a. Notons E' le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continues sur \mathbb{R} et montrons que E est un sous-espace vectoriel de E' .

- Par définition de E , E est contenu dans E' .

- Posons $\forall x \in \mathbb{R}, \theta(x) = 0$. θ est un élément de E' et de toute évidence $\int_{-\infty}^{+\infty} (\theta(x))^2 e^{-x^2} dx$ converge.

θ est donc un élément de E et ainsi E n'est pas vide.

- Soit λ un réel. Soient u et v deux éléments de E . Montrons que $\lambda u + v$ est un élément de E .

$\lambda u + v$ est tout d'abord continue sur \mathbb{R} car u et v sont continues sur \mathbb{R} .

Observons que $(\lambda u + v)^2 w = \lambda^2 u^2 w + 2 \lambda u v w + v^2 w$.

De plus les trois intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 w(x) dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} (v(x))^2 w(x) dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) v(x) w(x) dx$ convergent d'après la définition de E et la question précédente.

Alors par combinaison linéaire $\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda u(x) + v(x))^2 w(x) dx$ converge.

Ceci achève de montrer que $\lambda u + v$ appartient à E .

Ceci achève aussi de montrer que E est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel E' .

E est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

b. • Notons d'abord que si u et v sont deux éléments de E , $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) v(x) e^{-x^2} dx$ converge donc $(u | v)$ est un réel !

- Soient λ un réel. Soient u, v et t trois éléments de E .

$$(\lambda u + v | t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda u + v)(x) t(x) e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda u(x) t(x) e^{-x^2} + v(x) t(x) e^{-x^2}) dx.$$

Alors $(\lambda u + v | t) = \lambda \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) t(x) e^{-x^2} dx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) t(x) e^{-x^2} dx = \lambda (u | t) + (v | t)$ car toutes les intégrales convergent.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v, t) \in E^3, (\lambda u + v | t) = \lambda (u | t) + (v | t).$

• $\forall (u, v) \in E^2, (u | v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) v(x) e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} v(x) u(x) e^{-x^2} dx = (v | u).$

• Soit u un élément de E . $\forall x \in \mathbb{R}, (u(x))^2 e^{-x^2} \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} dx$ converge.

Alors $(u | u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} dx$ est un réel positif ou nul.

$\forall u \in E, (u | u) \geq 0.$

• Soit u un élément de E tel que $(u | u) = 0$. $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 e^{-x^2} dx = 0.$

- ◊ $u^2 w$ est continue sur \mathbb{R} ;
- ◊ $u^2 w$ est positive ou nulle sur \mathbb{R} ;
- ◊ $\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x))^2 w(x) dx = 0$;
- ◊ $-\infty \neq +\infty !$

Alors plus de doute, $u^2 w$ est nulle sur \mathbb{R} .

$\forall x \in \mathbb{R}, (u(x))^2 w(x) = 0$ et $w(x) \neq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, (u(x))^2 = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = 0$. $u = 0_E.$

$\forall u \in E, (u | u) = 0 \Rightarrow u = 0_E.$

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .

4. Soit k un élément de \mathbb{N} . Montrons que $x \rightarrow x^k$ appartient à E .

Tout d'abord $x \rightarrow x^k$ est continue sur \mathbb{R} . Montrons maintenant que $\int_{-\infty}^{+\infty} (x^k)^2 e^{-x^2} dx$ converge.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 (x^k)^2 e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(x^2)^{k+1}}{e^{x^2}} \right) = 0$ par croissance comparée.

- ◊ $x \rightarrow (x^k)^2 e^{-x^2}$ est continue sur \mathbb{R} ;
- ◊ $(x^k)^2 e^{-x^2} =_{x \rightarrow +\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$;
- ◊ $\forall x \in [1, +\infty[, (x^k)^2 e^{-x^2} \geq 0$ et $\frac{1}{x^2} \geq 0$;
- ◊ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\int_1^{+\infty} (x^k)^2 e^{-x^2} dx$ donc la convergence de $\int_0^{+\infty} (x^k)^2 e^{-x^2} dx$.

$x \rightarrow (x^k)^2 e^{-x^2}$ étant paire sur \mathbb{R} , $\int_{-\infty}^0 (x^k)^2 e^{-x^2} dx$ converge (et vaut $\int_0^{+\infty} (x^k)^2 e^{-x^2} dx$).

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} (x^k)^2 e^{-x^2} dx$ converge. Ce qui achève de montrer que $x \rightarrow x^k$ appartient à E .

Soit alors P un élément de F . Montrons que P appartient à E .

Il existe un élément r de \mathbb{N} et $r + 1$ réels a_0, a_1, \dots, a_r tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k$.

Or pour tout k dans \mathbb{N} , $x \rightarrow x^k$ appartient à E ; P est donc combinaison linéaire d'éléments de E . Comme E est un espace vectoriel, P appartient à E .

F est contenu dans E .

Partie II : Polynômes d'Hermite

1. $\forall x \in \mathbb{R}, w(x) = e^{-x^2}$. $\forall x \in \mathbb{R}, w'(x) = -2x e^{-x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, w''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, w'''(x) = 8x e^{-x^2} + (4x^2 - 2)(-2x)e^{-x^2} = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, H_1(x) = -e^{x^2}(-2x e^{-x^2}) = 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}, H_2(x) = e^{x^2}((4x^2 - 2)e^{-x^2}) = 4x^2 - 2$,

$\forall x \in \mathbb{R}, H_3(x) = -e^{x^2}((-8x^3 + 12x)e^{-x^2}) = 8x^3 - 12x$.

$\forall x \in \mathbb{R}, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2$ et $H_3(x) = 8x^3 - 12x$.

2. a. Soit n un élément de \mathbb{N} . $\forall x \in \mathbb{R}, H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x)$. En dérivant on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}, H_n'(x) = (-1)^n (2x) e^{x^2} w^{(n)}(x) + (-1)^n e^{x^2} w^{(n+1)}(x) = 2x H_n(x) - (-1)^{n+1} e^{x^2} w^{(n+1)}(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, H_n'(x) = 2x H_n(x) - H_{n+1}(x)$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - H_n'(x)$.

Pour tout n dans \mathbb{N} et pour tout x dans $\mathbb{R} : H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - H_n'(x)$.

b. Montrons par récurrence que pour tout n dans \mathbb{N} , H_n est un polynôme de degré n .

- La propriété est vraie pour $n=0$ car $\forall x \in \mathbb{R}, H_0(x) = 1$.

- Supposons la propriété vraie pour un élément n de \mathbb{N} . Montrons la pour $n + 1$.

$\forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - H_n'(x)$ et, $x \rightarrow 2x, H_n$ et H_n' sont des polynômes.

Ainsi H_{n+1} est un polynôme.

De plus H_n est un polynôme de degré n donc $x \rightarrow 2xH_n(x)$ est un polynôme de degré $n+1$ et H'_n est un polynôme de degré strictement inférieur à n .

Par conséquent H_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. Ceci achève la récurrence.

Pour tout n dans \mathbb{N} , H_n est un polynôme de degré n .

c. Soit x un réel. $H_0(x) = 1$. Alors $H_1(x) = 2xH_0(x) - H'_0(x) = 2x$.

$$H_2(x) = 2xH_1(x) - H'_1(x) = 2x(2x) - 2 = 4x^2 - 2.$$

$$H_3(x) = 2xH_2(x) - H'_2(x) = 2x(4x^2 - 2) - 8x = 8x^3 - 12x.$$

$$H_4(x) = 2xH_3(x) - H'_3(x) = 2x(8x^3 - 12x) - (24x^2 - 12) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

Nous avons ainsi retrouvé les résultats de **II.1**. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

3. Pour tout n dans \mathbb{N} , notons α_n le coefficient du terme de plus haut degré de H_n .

$$\alpha_0 = 1 \text{ car } H_0 = 1.$$

Soit n un élément de \mathbb{N} . Le terme de plus haut degré de H_n est " $\alpha_n x^n$ ". Ainsi le terme de plus haut degré de $x \rightarrow 2xH_n$ est " $2\alpha_n x^{n+1}$ ". De plus H'_n est un polynôme de degré strictement inférieur à n .

Le terme de plus haut degré de $x \rightarrow 2xH_n - H'_n$, donc de H_{n+1} , est alors " $2\alpha_n x^{n+1}$ ". Ainsi $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n$.

$(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1. Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = 2^n$.

Pour tout n dans \mathbb{N} , le coefficient du terme de plus haut degré de H_n est 2^n .

4. $\forall x \in \mathbb{R}, w(-x) = w(x)$. Une récurrence simple donne alors $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (-1)^n w^{(n)}(-x) = w^{(n)}(x)$.

$$\text{Alors } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (-1)^n (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(-x) = (-1)^n e^{x^2} w^{(n)}(x).$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (-1)^n H_n(-x) = H_n(x).$$

$$\text{Finalement : } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, H_n(-x) = (-1)^{2n} H_n(-x) = (-1)^n H_n(x).$$

Pour tout n dans \mathbb{N} et pour tout x dans $\mathbb{R} : H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

Soit n un élément de \mathbb{N} .

Si n est pair $\forall x \in \mathbb{R}, H_n(-x) = H_n(x)$ et H_n est pair(e).

Si n est impair $\forall x \in \mathbb{R}, H_n(-x) = -H_n(x)$ et H_n est impair(e).

Pour tout n dans \mathbb{N} , H_n a la parité de n .

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

1. a. Soit n dans \mathbb{N}^* et soit P un élément de F . Montrons que $(P' | H_{n-1}) = (P | H_n)$.

Il suffit de montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) H_n(x) e^{-x^2} dx$.

Soit α et β deux réels. Posons $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ell_n(x) = H_{n-1}(x) e^{-x^2}$. P et ℓ_n sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Notons aussi que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ell'_n(x) = H'_{n-1}(x) e^{-x^2} + H_{n-1}(x) (-2x) e^{-x^2} = -(2x H_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x)) e^{-x^2} = -H_n(x) e^{-x^2}.$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\int_{\alpha}^{\beta} P'(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} dx = \left[P(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} \right]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} P(x) H_n(x) e^{-x^2} dx. \text{ Ainsi :}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} P'(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} dx = P(\beta) H_{n-1}(\beta) e^{-\beta^2} - P(\alpha) H_{n-1}(\alpha) e^{-\alpha^2} + \int_{\alpha}^{\beta} P(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \quad (**).$$

Ne reste plus qu'à faire tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$. Mais pour cela un petit résultat intermédiaire s'impose.

Lemme 1 : Pour tout élément Q de F : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (Q(x) e^{-x^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (Q(x) e^{-x^2}) = 0$.

Montrons le lemme. Dans cette preuve $\lim_{x \rightarrow \infty}$ voudra dire indifféremment $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty}$.

Soit Q un élément de F . Si Q est le polynôme nul le résultat est clair. Supposons $Q \neq 0_F$.

Soit " $a x^r$ " le terme de plus haut degré de Q . $Q(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} a x^r$ donc $|Q(x)| \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} |a x^r|$.

Alors $|Q(x) e^{-x^2}| = |Q(x)| e^{-x^2} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} |a x^r| e^{-x^2} = |a| \frac{(x^2)^{\frac{r}{2}}}{e^{x^2}}$.

Alors $\lim_{x \rightarrow \infty} (|Q(x) e^{-x^2}|) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(|a| \frac{(x^2)^{\frac{r}{2}}}{e^{x^2}} \right) = 0$ par croissance comparée. Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} (Q(x) e^{-x^2}) = 0$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

$P H_{n-1}$ est un élément de F . Le lemme donne alors $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (P(\alpha) H_{n-1}(\alpha) e^{-\alpha^2}) = 0$ et

$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} (P(\beta) H_{n-1}(\beta) e^{-\beta^2}) = 0$.

En faisant successivement tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$ dans $(**)$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \text{ (ces deux intégrales convergent).}$$

En multipliant par $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ on obtient : $(P' | H_{n-1}) = (P | H_n)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } P \text{ dans } F : (P' | H_{n-1}) = (P | H_n).}$$

b. Montrons le lemme suivant.

Lemme 2 : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall P \in F, (P | H_n) = (P^{(k)} | H_{n-k}).}$

Soit P un élément de F et n un élément de \mathbb{N} .

Montons par récurrence que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (P | H_n) = (P^{(k)} | H_{n-k})$.

- La propriété est vraie pour $k = 0$!
- Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Montrons la pour $k + 1$.

En appliquant le résultat de la question précédente il vient :

$$(P^{(k)} | H_{n-k}) = ((P^{(k)})' | H_{(n-k)-1}) = (P^{(k+1)} | H_{n-(k+1)}).$$

Ceci qui achève la récurrence.

Soit n un élément de \mathbb{N}^* et P un élément de F_{n-1} .

Le lemme 2 donne en particulier $(P | H_n) = (P^{(n)} | H_{n-n}) = (P^{(n)} | H_0)$. Or $P^{(n)}$ est le polynôme nul car P appartient à F_{n-1} . Donc $(P | H_n) = (P^{(n)} | H_0) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } P \text{ dans } F_{n-1} : (P | H_n) = 0.}$$

c. Soit n dans \mathbb{N} . Montrons que (H_0, H_1, \dots, H_n) est une famille orthogonale. C'est vrai si $n = 0$!
Supposons n non nul.

Soient i et j deux éléments distincts de $\llbracket 0, n \rrbracket$. Montrons que $(H_i | H_j) = 0$. Comme $(H_i | H_j) = (H_i | H_j)$ on peut supposer pour ce faire que $i < j$.

Alors $H_i \in F_i$ (car $\deg H_i = i$), $H_j \in F_j$ (car $\deg H_j = j$) et $H_i \subset F_{j-1}$ (car $i \leq j - 1$).

Le résultat précédent appliqué pour $n = j$ ($j \in \mathbb{N}^*$ car $i < j$) et $P = H_i$ permet de dire que $(H_i | H_j) = 0$.

H_i et H_j sont orthogonaux.

Ainsi les éléments de la famille (H_0, H_1, \dots, H_n) sont dans F et sont deux à deux orthogonaux.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \text{ la famille } (H_0, H_1, \dots, H_n) \text{ est orthogonale dans } F.}$$

2. Soit n un élément de \mathbb{N} . (H_0, H_1, \dots, H_n) est famille orthogonale d'éléments **non nuls** de F_n . C'est donc une famille libre d'éléments de F_n de cardinal $n + 1$. Comme F_n est de dimension $n + 1$, (H_0, H_1, \dots, H_n) est une base de F_n .

Pour tout n dans \mathbb{N} , la famille (H_0, H_1, \dots, H_n) est une base (orthogonale) de F_n .

3. a. Soit n un élément de \mathbb{N} . Le lemme 2 donne $\|H_n\|^2 = (H_n | H_n) = (H_n^{(n)} | H_{n-n}) = (H_n^{(n)} | H_0)$.

Pour tout n dans \mathbb{N} , $\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} | H_0)$.

b. Soit n un élément de \mathbb{N} .

$$\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} | H_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(n)} H_0 e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n n! e^{-x^2} dx = \frac{2^n n!}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Le préliminaire donne $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Alors $\|H_n\|^2 = 2^n n!$ donc $\|H_n\| = \sqrt{2^n n!}$.

Pour tout n dans \mathbb{N} , $\|H_n\| = \sqrt{2^n n!}$.

Partie IV : Un endomorphisme symétrique

1. • Soit P un élément de F . $-P'' + 2X P' + P$ est encore un élément de F ! $f(P)$ appartient à F .

f est une application de F dans F .

• Soit λ un réel. Soient P et Q deux éléments de F .

$$f(\lambda P + Q) = -(\lambda P + Q)'' + 2X(\lambda P + Q)' + \lambda P + Q = -\lambda P'' - Q'' + 2X(\lambda P' + Q') + \lambda P + Q.$$

$$f(\lambda P + Q) = \lambda(-P'' + 2X P' + P) + (-Q'' + 2X Q' + Q) = \lambda f(P) + f(Q).$$

f est une application linéaire. Finalement :

f est un endomorphisme de F .

2. a. Soit P un élément de F .

$$(g \circ h)(P) = g(h(P)) = g(P') = 2X P' - (P')' = -P'' + 2X P' + P - P = f(P) - P = (f - \text{Id}_F)(P).$$

$$(h \circ g)(P) = (g(P))' = (2X P - P')' = 2P + 2X P' - P'' = f(P) + P = (f + \text{Id}_F)(P).$$

$\forall P \in F$, $(g \circ h)(P) = (f - \text{Id}_F)(P)$ et $(h \circ g)(P) = (f + \text{Id}_F)(P)$. Donc

$$g \circ h = f - \text{Id}_F \text{ et } h \circ g = f + \text{Id}_F.$$

b. $g \circ h = f - \text{Id}_F$. En composant à droite par g il vient : $g \circ h \circ g = f \circ g - g$.

$h \circ g = f + \text{Id}_F$ donc en composant à gauche par g il vient : $g \circ h \circ g = g \circ f + g$.

Alors $f \circ g - g = g \circ f + g$. Donc $f \circ g - g \circ f = 2g$.

$$f \circ g - g \circ f = 2g.$$

3. Soit λ un réels et P un élément de F tels que $f(P) = \lambda P$.

$$2g(P) = (f \circ g)(P) - (g \circ f)(P) = f(g(P)) - g(f(P)) = f(g(P)) - g(\lambda P) = f(g(P)) - \lambda g(P).$$

Ainsi $f(g(P)) = (\lambda + 2)g(P)$.

$$\text{Pour tout réel } \lambda \text{ et pour tout élément } P \text{ de } F, \text{ si } f(P) = \lambda P \text{ alors } f(g(P)) = (\lambda + 2)g(P).$$

4. a. $f(H_0) = -H_0'' + 2X H_0' + H_0 = H_0$ car $H_0'' = H_0' = 0_F$ puisque $H_0 = 1$.

$$f(H_0) = H_0.$$

b. Soit k un élément de \mathbb{N} . $g(H_k) = 2X H_k - H_k' = H_{k+1}$ d'après **II 2.a.**

$$\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N} : g(H_k) = H_{k+1}.$$

Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(H_k) = (2k + 1) H_k$.

• $f(H_0) = H_0 = (2 \times 0 + 1) H_0$; la propriété est vraie pour $k = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément k de \mathbb{N} . Alors $f(H_k) = (2k + 1) H_k$.

IV 3. donne alors $f(g(H_k)) = ((2k + 1) + 2) g(H_k)$.

Comme $g(H_k) = H_{k+1}$: $f(H_{k+1}) = (2k + 3) H_{k+1} = (2(k + 1) + 1) H_{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

$$\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N} : f(H_k) = (2k + 1) H_k.$$

5. Soient P et Q deux éléments de F . Soient α et β deux réels.

Posons : $\forall x \in \mathbb{R}, \ell_P(x) = P'(x) e^{-x^2}$. ℓ_P et Q sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Notons aussi que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ell_P'(x) = P''(x) e^{-x^2} + P'(x) (-2x) e^{-x^2} = -(-P''(x) + 2x P') e^{-x^2} = -(f(P)(x) - P(x)) e^{-x^2}.$$

En posant $T = f(P) - P$ on a $\forall x \in \mathbb{R}, \ell'_p(x) = -T(x) e^{-x^2}$.

Intégrons alors par parties.

$$\int_{\alpha}^{\beta} P'(x) Q'(x) e^{-x^2} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \ell_P(x) Q'(x) dx = \left[\ell_P(x) Q(x) \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} \ell'_P(x) Q(x) dx.$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} P'(x) Q'(x) e^{-x^2} dx = \left[P'(x) Q(x) e^{-x^2} \right]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} T(x) Q(x) e^{-x^2} dx.$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} P'(x) Q'(x) e^{-x^2} dx = P'(\beta) Q(\beta) e^{-\beta^2} - P'(\alpha) Q(\alpha) e^{-\alpha^2} + \int_{\alpha}^{\beta} T(x) Q(x) e^{-x^2} dx \quad (**).$$

Ne reste plus qu'à faire tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$.

P' et Q' sont deux éléments de F donc de E , ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) Q'(x) e^{-x^2} dx$ existe.

Pour des raisons analogues $\int_{-\infty}^{+\infty} T(x) Q(x) e^{-x^2} dx$ existe également.

De plus $P'Q$ est un élément de F ; le lemme 1 donne alors :

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \left(P'(\alpha) Q(\alpha) e^{-\alpha^2} \right) = 0 \text{ et } \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(P'(\beta) Q(\beta) e^{-\beta^2} \right) = 0.$$

En faisant tendre successivement α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$ dans $(**)$ il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) Q'(x) e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) Q(x) e^{-x^2} dx. \text{ En multipliant par } \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ on obtient : } (P' | Q') = (T | Q).$$

Alors $(P' | Q') = (f(P) - P | Q) = (f(P) | Q) - (P | Q)$.

$$\boxed{\forall (P, Q) \in F^2, (P' | Q') = (f(P) | Q) - (P | Q)}.$$

6. Dans cette question n est un élément de \mathbb{N} .

a. Soit P un élément de F_n .

P'' est un élément de F_n . P' est un polynôme de degré strictement inférieur à n donc XP est également un élément de F_n .

P'' , XP et P sont donc trois éléments du sous-espace vectoriel F_n . Alors $f(P) = -P'' + 2XP' + P$ est un élément de F_n .

$$\boxed{\forall P \in F_n, f(P) \in F_n}.$$

b. Soient P et Q deux éléments de F_n .

D'après IV 5. : $(f(P) | Q) = (P' | Q') + (P | Q)$ et $(f(Q) | P) = (Q' | P') + (Q | P)$.

La symétrie de $(. | .)$ donne alors $(f(P) | Q) = (f(Q) | P)$ puis $(f(P) | Q) = (P | f(Q))$ et enfin :

$$(f_n(P) | Q) = (P | f_n(Q)).$$

f_n est un endomorphisme symétrique de F_n .

Remarque f est également un endomorphisme symétrique de F !

c. Rappelons que (H_0, H_1, \dots, H_n) est une base orthogonale de F_n .

De plus $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f_n(H_k) = f(H_k) = (2k + 1) H_k$ et $H_k \neq 0_{F_n}$; ainsi pour tout élément k de $\llbracket 0, n \rrbracket$, H_k est un vecteur propre de f_n (associé à la valeur propre $2k + 1$).

(H_0, H_1, \dots, H_n) est une base orthogonale de F_n constituée de vecteurs propres de f_n .

Posons $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $G_k = \frac{1}{\|H_k\|} H_k = \frac{1}{\sqrt{2^k k!}} H_k$.

(G_0, G_1, \dots, G_n) est une base orthonormale de F_n encore constituée de vecteurs propres de f_n .

$\left(\frac{1}{\sqrt{2^k k!}} H_k \right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propres de f_n .

Partie V : Intervention d'exponentielles

1. Soit a un réel.

• D'abord φ_a est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continue sur \mathbb{R} .

• $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\varphi_a(x))^2 e^{-x^2} = e^{2ax - x^2} = e^{-(x^2 - 2ax + a^2) + a^2} = e^{a^2} e^{-(x-a)^2}$.

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ converge et vaut $\sqrt{\pi}$ d'après le préliminaire.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a^2} e^{-(x-a)^2} dx$ converge et vaut $\sqrt{\pi} e^{a^2}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_a(x))^2 e^{-x^2} dx$ converge et vaut $\sqrt{\pi} e^{a^2}$. Ceci achève de montrer que :

 φ_a est un élément de E .

Remarque Retenons également que : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_a(x))^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{a^2}$.

2. Soient a et b deux réels. $(\varphi_a | \varphi_b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(x) \varphi_b(x) e^{-x^2} dx$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi_a(x) \varphi_b(x) = e^{ax} e^{bx} = e^{(a+b)x} = \left(e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)x} \right)^2 = \left(\varphi_{\frac{a+b}{2}}(x) \right)^2$.

La remarque de la première question permet de dire que : $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi_{\frac{a+b}{2}}(x) \right)^2 e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(x) \varphi_b(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{(\frac{a+b}{2})^2}$. Ainsi $(\varphi_a | \varphi_b) = e^{(\frac{a+b}{2})^2}$.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (\varphi_a | \varphi_b) = e^{(\frac{a+b}{2})^2}.$$

3. Soit n un élément de \mathbb{N}^* . $\|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^2 = (\varphi_{\sqrt{\ln n}} | \varphi_{\sqrt{\ln n}}) = e^{(\frac{\sqrt{\ln n} + \sqrt{\ln n}}{2})^2} = e^{\ln n} = n$.

Ainsi $\|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2} = \frac{1}{n}$. Plus de doute :

$$\text{la série de terme général } \|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2} \text{ diverge.}$$

4. Soit n un élément de \mathbb{N} . $\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^2 = (\varphi_{\sqrt{n}} | \varphi_{\sqrt{n}}) = e^{(\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n}}{2})^2} = e^n$. Alors : $\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$.

La série géométrique de raison $\frac{1}{e}$ est convergente car $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$.

$$\text{De plus } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}.$$

$$\text{La série de terme général } \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} = \frac{e}{e-1}.$$

Partie VI Une limite de probabilité conditionnelle

1. w est continue sur \mathbb{R} . Posons $\forall x \in \mathbb{R}, W(x) = \int_0^x w(t) dt$.

W est la primitive sur (l'intervalle) \mathbb{R} qui prend la valeur 0 en 0. W est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, W'(x) = w(x)$.

Notons que la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ donne la convergence de $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$ pour tout réel x .

$$\forall x \in]0, +\infty[, \Phi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = - \int_0^x e^{-t^2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = -W(x) + \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

W étant de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , Φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

De plus $\forall x \in]0, +\infty[\Phi'(x) = -W'(x) = -w(x) = -e^{-x^2}$.

$$\Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x \in]0, +\infty[\Phi'(x) = -e^{-x^2}.$$

2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = 0$ comme reste d'une intégrale convergente.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-x^2}}{2}\right) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

Alors par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} K(x) = 0.}$$

b. Φ , G et K sont dérivables sur $]0, +\infty[$, donc $G - \Phi$ et $\Phi - K$ sont également dérivables sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, (G - \Phi)'(x) = G'(x) - \Phi'(x) = \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x^4}\right) \frac{e^{-x^2}}{2} + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}\right) (-2x) \frac{e^{-x^2}}{2} + e^{-x^2}.$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, (G - \Phi)'(x) = \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x^4} - 1 + \frac{1}{2x^2} + 1\right) e^{-x^2} = \frac{3}{4x^4} e^{-x^2}.$$

$\forall x \in]0, +\infty[, (G - \Phi)'(x) \geq 0$ donc $G - \Phi$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[, (\Phi - K)'(x) = \Phi'(x) - K'(x) = -e^{-x^2} - \left(-\frac{1}{2x^2} e^{-x^2} + \frac{1}{2x} (-2x) e^{-x^2}\right).$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, (\Phi - K)'(x) = \left(-1 + \frac{1}{2x^2} + 1\right) e^{-x^2} = \frac{1}{2x^2} e^{-x^2}.$$

$\forall x \in]0, +\infty[, (\Phi - K)'(x) \geq 0$ donc $\Phi - K$ est croissante sur $]0, +\infty[$.

$$\boxed{G - \Phi \text{ et } \Phi - K \text{ sont croissantes sur }]0, +\infty[.}$$

c. $G - \Phi$ est croissante sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (G - \Phi)(x) = 0 - 0 = 0$; ainsi $\forall x \in]0, +\infty[, (G - \Phi)(x) \leq 0$.

$\Phi - K$ est croissante sur $]0, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\Phi - K)(x) = 0 - 0 = 0$; ainsi $\forall x \in]0, +\infty[, (\Phi - K)(x) \leq 0$.

Alors $\forall x \in]0, +\infty[, G(x) \leq \Phi(x) \leq K(x)$.

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, G(x) \leq \Phi(x) \leq K(x).}$$

d. Soit x un élément de $]0, +\infty[$. $G(x) \leq \Phi(x) \leq K(x)$ et $\frac{2x}{e^{-x^2}} \geq 0$.

$$\text{Alors } \frac{2x}{e^{-x^2}} G(x) \leq \frac{2x}{e^{-x^2}} \Phi(x) \leq \frac{2x}{e^{-x^2}} K(x).$$

$$\text{Or : } \frac{2x}{e^{-x^2}} G(x) = 1 - \frac{1}{2x^2} \text{ et } \frac{2x}{e^{-x^2}} K(x) = 1.$$

$$\text{Finalement : } \forall x \in]0, +\infty[, 1 - \frac{1}{2x^2} \leq \frac{2x}{e^{-x^2}} \Phi(x) \leq 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) = 1$, il vient par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^{-x^2}} \Phi(x)\right) = 1$.

$$\text{Alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\Phi(x)}{\frac{e^{-x^2}}{2x}}\right) = 1 \text{ et : } \Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

$$\boxed{\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x}.$$

3 a. $\psi_0 : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sqrt{2})} e^{-\frac{(x-0)^2}{2(1/\sqrt{2})^2}}$ est une densité de X . Notons que $\forall x \in \mathbb{R}, \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - \int_x^{+\infty} \psi_0(x) dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-x^2} dx = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi(x).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi(x).$$

Remarque On a également : $\forall x \in \mathbb{R}, P(X > x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi(x)$.

b. Soit c un réel positif. Soit x un réel.

$$P_{(X>x)}(X \leq x+c) = \frac{P(\{X \leq x+c\} \cap \{X > x\})}{P(X > x)} = \frac{P(x < X \leq x+c)}{P(X > x)} = \frac{P(x < X) - P(X > x+c)}{P(X > x)}.$$

$$P_{(X>x)}(X \leq x+c) = 1 - \frac{P(X > x+c)}{P(X > x)} = 1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi(x+c)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi(x)} = 1 - \frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)}.$$

$$\Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x^2}}{2x} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\Phi(x)}{\frac{e^{-x^2}}{2x}} \right) = 1.$$

$$\text{Par composition des limites : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\Phi(x+c)}{\frac{e^{-(x+c)^2}}{2(x+c)}} \right) = 1. \text{ Ainsi } \Phi(x+c) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-(x+c)^2}}{2(x+c)}.$$

$$\text{Alors } \frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{e^{-(x+c)^2}}{2(x+c)}}{\frac{e^{-x^2}}{2x}} = \frac{x}{x+c} e^{-(x+c)^2+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-(x+c)^2+x^2} = e^{-2xc-c^2}.$$

$$\text{Par conséquent : } \frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-2xc-c^2}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2xc-c^2} = 0 \text{ car } c \text{ est strictement positif.}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} P_{(X>x)}(X \leq x+c) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \right) = 1.$$

$$\text{Pour tout réel } c \text{ strictement positif : } \lim_{x \rightarrow +\infty} P_{(X>x)}(X \leq x+c) = 1.$$