

## PROBLÈME 1

### Partie I - Calcul d'une intégrale

1. •  $f_{a,b} : x \rightarrow \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

• Au voisinage de 0 :  $e^{-ax} = 1 - ax + o(x)$  et  $e^{-bx} = 1 - bx + o(x)$  donc  $e^{-ax} - e^{-bx} = (b - a)x + o(x)$ .

Ainsi  $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = (b - a) + o(1)$  au voisinage de 0. Dans ces conditions  $\lim_{x \rightarrow 0} f_{a,b}(x) = b - a$ .

$f_{a,b}$  est donc prolongeable par continuité en 0. Par conséquent  $\int_0^1 f_{a,b}(x) dx$  converge.

•  $a$  et  $b$  sont strictement positifs donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f_{a,b}(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{a} \frac{ax}{e^{ax}} - \frac{1}{b} \frac{bx}{e^{bx}} \right) = 0$  par croissance comparée.

On a donc également  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 |f_{a,b}(x)|) = 0$  et ainsi  $|f_{a,b}(x)| = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  au voisinage de  $+\infty$ .

De plus  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  converge et,  $|f_{a,b}|$  et  $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$  sont positives sur  $[1, +\infty[$ .

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de  $\int_1^{+\infty} f_{a,b}(x) dx$ .

Finalement  $\int_0^{+\infty} f_{a,b}(x) dx$  converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \text{ converge.}}$$

2. a. Soit  $(\varepsilon, X)$  un élément de  $]0, +\infty[^2$  tel que  $\varepsilon \leq X$ .

Notons que  $x \rightarrow \frac{e^{-ax}}{x}$  est continue sur  $[\varepsilon, X]$  et que la fonction  $x \rightarrow ax$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Ceci autorise le changement de variable  $y = ax$  dans ce qui suit.

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y/a} \frac{1}{a} dy = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

De manière analogue on obtient :  $\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-bx}}{x} dx = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy$ .

Pour tout  $(\varepsilon, X)$  appartenant à  $]0, +\infty[^2$  tel que  $\varepsilon \leq X$  :

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy \text{ et } \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-bx}}{x} dx = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

**b.** Soit  $(\varepsilon, X)$  un élément de  $]0, +\infty[^2$  tel que  $\varepsilon \leq X$ .

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax}}{x} dx - \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy + \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

Pour tout  $(\varepsilon, X)$  appartenant à  $]0, +\infty[^2$  tel que  $\varepsilon \leq X$  :

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

**3. a.** •  $y \rightarrow 1 - e^{-y}$  et  $y \rightarrow \frac{1}{y}$  sont continues sur  $]0, +\infty[$ . Par produit  $h$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

•  $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ . Alors  $e^{-y} - 1 \underset{y \rightarrow 0}{\sim} -y$  donc  $1 - e^{-y} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y$ . Finalement  $\frac{1 - e^{-y}}{y} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} 1$ .

Alors  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-y}}{y} = 1 = h(0)$ . Ceci suffit très largement pour dire que  $h$  est continue en 0.

L'application  $h$  de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\forall y \in [0, +\infty[, h(y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .

**b.** Soit  $\varepsilon$  un réel strictement positif.

$h$  est continue sur  $[0, +\infty[$ . Considérons alors une primitive  $H$  de  $h$  sur  $[0, +\infty[$ .

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y} - 1}{y} dy + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{y} dy = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} h(y) dy + \left[ \ln |y| \right]_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + (\ln(b\varepsilon) - \ln(a\varepsilon)).$$

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + (\ln(b\varepsilon) - \ln(a\varepsilon)) = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln\left(\frac{b\varepsilon}{a\varepsilon}\right) = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln\frac{b}{a}.$$

Or  $H$  est continue en 0 donc  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon)) = H(0) - H(0) = 0$ .

$$\text{Donc } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln\frac{b}{a} \right) = \ln\frac{b}{a}.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = \ln\frac{b}{a}.$$

**c.** Soit  $X$  un élément de  $]0, +\infty[$ .

$$\forall \varepsilon \in ]0, X], \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

Ce qui précède montre alors que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy \right) = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

$$\text{Donc } \int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

$$\text{Pour tout élément } X \text{ de } ]0, +\infty[, \int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

d. Soit  $X$  un élément de  $]0, +\infty[$ .

Nous avons vu que  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$  converge donc pour tout réel  $z$  strictement positif  $\int_z^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$  converge également.

Alors  $\int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy = \int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy$  car ces deux intégrales convergent puisque  $aX$  et  $bX$  sont des réels strictement positifs.

De plus  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = 0$  (resp.  $\lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = 0$ ) comme reste d'une intégrale convergente.

$$\text{Ainsi } \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( \int_{aX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{bX}^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \right) = 0 - 0 = 0.$$

$$\text{Donc } \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left( \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy \right) = \ln \frac{b}{a}. \text{ Finalement :}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$$

## Partie II - Étude d'un produit scalaire

1. Notons  $E'$  l'espace vectoriel réel des applications de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .

- $E$  est contenu dans  $E'$ .

- Posons  $\forall x \in [0, +\infty[, f_0(x) = 0$ .  $f_0$  est bornée sur  $[0, +\infty[, f_0$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$  et  $f_0(0) = 0$ .

Ainsi  $f_0$  est un élément de  $E$  donc  $E$  n'est pas vide.

- Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $E$  et soit  $\lambda$  un réel.

$\triangleright f$  (resp.  $g$ ) est bornée sur  $[0, +\infty[$ . Donc il existe un réel positif  $M_f$  (resp.  $M_g$ ) tel que

$$\forall x \in [0, +\infty[, |f(x)| \leq M_f \text{ (resp. } \forall x \in [0, +\infty[, |g(x)| \leq M_g).$$

$\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $|\lambda f(x) + g(x)| \leq |\lambda| |f(x)| + |g(x)| \leq |\lambda| M_f + M_g$  donc  $\lambda f + g$  est bornée sur  $[0, +\infty[$ .

$\triangleright f$  et  $g$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$  donc  $\lambda f + g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ .

$\triangleright (\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = \lambda \times 0 + 0 = 0$ .

Par conséquent  $\lambda f + g$  appartient à  $E$ . Ceci achève de montrer que :

$E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .

**2.** •  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $|f_1(x)| = |\sin x| \leq 1$  donc  $f_1$  est bornée sur  $[0, +\infty[$ .

$f_1$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$  car  $\sin$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

$f_1(0) = \sin 0 = 0$ .

Donc  $f_1$  appartient à  $E$ .

•  $f_2(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$ .  $f_2$  n'appartient pas à  $E$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$  donc  $f_3$  n'est pas bornée sur  $[0, +\infty[$ .  $f_3$  n'appartient pas à  $E$ .

•  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $0 \leq e^{-x} \leq 1$  donc  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $0 \leq f_4(x) = 1 - e^{-x} \leq 1$ .  $f_4$  est bornée sur  $[0, +\infty[$ .

$x \rightarrow 1 - e^{-x}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $f_4$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ .

$f_4(0) = e^{-0} - 1 = 0$ .

Par conséquent  $f_4$  appartient à  $E$ .

$f_1$  et  $f_4$  sont deux éléments de  $E$ .  $f_2$  et  $f_3$  n'appartiennent pas à  $E$ .

**3. a.** Soit  $f$  un élément de  $E$ .  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ . Donc  $f$  est dérivable en 0.

En remarquant que  $f$  est nulle en 0 il vient :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0)$ .

Pour tout élément  $f$  de  $E$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ .

**b.** Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $E$ . Posons  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\varphi(x) = \frac{f(x)g(x)}{x^2}$ .

•  $\varphi$  est continue sur  $]0, +\infty[$  car  $f, g$  et  $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$  sont continues sur  $]0, +\infty[$ .

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(x)}{x} \frac{g(x)}{x} \right) = f'(0)g'(0)$ .

Ainsi  $\varphi$  est prolongeable par continuité en 0 donc  $\int_0^1 \varphi(x) dx$  converge.

•  $f$  (resp.  $g$ ) est bornée sur  $[0, +\infty[$ . Donc il existe un réel positif  $M_f$  (resp.  $M_g$ ) tel que

$\forall x \in [0, +\infty[, |f(x)| \leq M_f$  (resp.  $\forall x \in [0, +\infty[, |g(x)| \leq M_g$ ).

$\forall x \in [1, +\infty[, 0 \leq |\varphi(x)| = \frac{|f(x)| |g(x)|}{x^2} \leq \frac{M_f M_g}{x^2}$  et  $\int_1^{+\infty} \frac{M_f M_g}{x^2} dx$  converge (car  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  converge).

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de  $\int_1^{+\infty} |\varphi(x)| dx$ .  $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$  est absolument convergente donc convergente.

Finalement  $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx$  converge.

Si  $f$  et  $g$  sont deux éléments de  $E$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx$  converge.

4. • Notons que pour tout élément  $(f, g)$  de  $E^2$ ,  $(f | g)$  appartient à  $\mathbb{R}$ .

• Soient  $f, g$  et  $\ell$  trois éléments de  $E$ . Soit  $\lambda$  un réel.

$$(\lambda f + g | \ell) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda f(x) + g(x)) \ell(x)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda f(x) \ell(x) + g(x) \ell(x)}{x^2} dx.$$

$$(\lambda f + g | \ell) = \lambda \int_0^{+\infty} \frac{f(x) \ell(x)}{x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{g(x) \ell(x)}{x^2} dx = \lambda (f | \ell) + (g | \ell) \text{ car toutes les intégrales convergent.}$$

$$\forall (f, g, \ell) \in E^3, (\lambda f + g | \ell) = \lambda (f | \ell) + (g | \ell).$$

• Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $E$ .  $(f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{g(x)f(x)}{x^2} dx = (g | f)$ .

$$\forall (f, g) \in E^2, (f | g) = (g | f).$$

• Soit  $f$  un élément de  $E$ .  $\forall x \in ]0, +\infty[, \frac{f(x)f(x)}{x^2} \geq 0$  donc  $(f | f) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)f(x)}{x^2} dx \geq 0$ .

$$\forall f \in E, (f | f) \geq 0.$$

• Soit  $f$  un élément de  $E$  tel que  $(f | f) = 0$ .

$$\triangleright \int_0^{+\infty} \frac{(f(x))^2}{x^2} dx = 0.$$

$$\triangleright x \rightarrow \frac{(f(x))^2}{x^2} \text{ est continue sur } ]0, +\infty[.$$

$$\triangleright x \rightarrow \frac{(f(x))^2}{x^2} \text{ est positive sur } ]0, +\infty[.$$

$$\triangleright 0 \neq +\infty !$$

Les quatre points précédents permettent de dire que  $\forall x \in ]0, +\infty[, \frac{(f(x))^2}{x^2} = 0$ .

Alors  $\forall x \in ]0, +\infty[, (f(x))^2 = 0$  donc  $\forall x \in ]0, +\infty[, f(x) = 0$ .

Comme  $f(0) = 0 : \forall x \in [0, +\infty[, f(x) = 0$ . Ainsi  $f = 0_E$ .

$$\forall f \in E, (f | f) = 0 \Rightarrow f = 0_E.$$

Les cinq points précédents montrent que :

$(\cdot | \cdot)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**5.** Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $E$ . Soient  $A$  et  $B$  deux réels strictement positifs.

Posons  $u = fg$  et  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $v(x) = -\frac{1}{x}$ .

$u$  et  $v$  sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ . De plus  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $u'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$  et  $v'(x) = \frac{1}{x^2}$ .

Ceci légitime l'intégration par parties suivantes.

$$\int_A^B \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx = \left[ -\frac{f(x)g(x)}{x} \right]_A^B - \int_A^B \left( -\frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} \right) dx.$$

$$\int_A^B \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx = \frac{f(A)g(A)}{A} - \frac{f(B)g(B)}{B} + \int_A^B \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx \quad (\star).$$

$f$  (resp.  $g$ ) est bornée sur  $[0, +\infty[$ . Donc il existe un réel positif  $M_f$  (resp.  $M_g$ ) tel que

$$\forall x \in [0, +\infty[, |f(x)| \leq M_f \text{ (resp. } \forall x \in [0, +\infty[, |g(x)| \leq M_g).$$

$$\text{Alors } 0 \leq \left| \frac{f(B)g(B)}{B} \right| = \frac{|f(B)||g(B)|}{B} \leq \frac{M_f M_g}{B}.$$

Comme  $\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{M_f M_g}{B} = 0$  il vient par encadrement  $\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{f(B)g(B)}{B} = 0$ .

De plus  $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{f(A)g(A)}{A} = \lim_{A \rightarrow 0} \left( \frac{f(A)}{A} g(A) \right) = f'(0) \times g(0) = f'(0) \times 0 = 0$  (d'après le résultat de **3. a.** et la continuité de  $g$  en 0).

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{f(B)g(B)}{B} = 0, \lim_{A \rightarrow 0} \frac{f(A)g(A)}{A} = 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx \text{ converge.}$$

Il résulte alors de  $(\star)$  que  $\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx$  converge et vaut  $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx$ .

$$\text{Ainsi } (f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx.$$

Pour tout couple  $(f, g)$  d'éléments de  $E$ ,  $(f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx$  converge et

$$(f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx.$$

**6. a.** Soit  $\alpha$  un réel strictement positif.

$\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq e^{-\alpha x} \leq 1$  donc  $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq u_\alpha(x) = 1 - e^{-\alpha x} \leq 1$ .  $u_\alpha$  est bornée sur  $[0, +\infty[$ .

$x \rightarrow 1 - e^{-\alpha x}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  donc  $u_\alpha$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, +\infty[$ .

$u_\alpha(0) = 1 - e^{-\alpha \times 0} = 1 - 1 = 0$ . Ceci achève de montrer que  $u_\alpha$  appartient à  $E$ .

$\forall \alpha \in ]0, +\infty[, u_\alpha \in E$ .

**b.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs.

$$(u_\alpha | u_\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{u'_\alpha(x) u_\beta(x) + u_\alpha(x) u'_\beta(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha e^{-\alpha x} (1 - e^{-\beta x}) + (1 - e^{-\alpha x}) \beta e^{-\beta x}}{x} dx.$$

$$(u_\alpha | u_\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha (e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}) + \beta (e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x})}{x} dx.$$

$\alpha$ ,  $\beta$  et  $\alpha + \beta$  étant strictement positifs, **I.3.d** montre que les intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx$  convergent et valent respectivement  $\ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$  et  $\ln \frac{\alpha + \beta}{\beta}$ .

Alors  $(u_\alpha | u_\beta) = \alpha \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx + \beta \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx = \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\alpha + \beta}{\beta}$ .

$$(u_\alpha | u_\beta) = \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\alpha + \beta}{\beta} = (\alpha + \beta) \ln(\alpha + \beta) - \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta.$$

Pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  d'éléments de  $]0, +\infty[ : (u_\alpha | u_\beta) = \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\alpha + \beta}{\beta}$ .

Pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  d'éléments de  $]0, +\infty[ : (u_\alpha | u_\beta) = (\alpha + \beta) \ln(\alpha + \beta) - \alpha \ln \alpha - \beta \ln \beta$ .

**c.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels strictement positifs.

$$\frac{\alpha + \beta}{\alpha} > 1 \text{ et } \frac{\alpha + \beta}{\beta} > 1 \text{ donc } \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} > 0 \text{ et } \ln \frac{\alpha + \beta}{\beta} > 0.$$

Ainsi  $(u_\alpha | u_\beta) = \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\alpha + \beta}{\beta} > 0$ .

Pour tout couple  $(\alpha, \beta)$  d'éléments de  $]0, +\infty[ : (u_\alpha | u_\beta) > 0$ .

### Partie III - Étude de densités de variables aléatoires

**1.** •  $\forall x \in ]-\infty, 0]$ ,  $v(x) = 0 \geq 0$ !

Soit un  $x$  un élément de  $]0, +\infty[$ .  $4c^2x \geq c^2x$  donc  $e^{-c^2x} \geq e^{-4c^2x}$ . Alors  $e^{-c^2x} - e^{-4c^2x} \geq 0$ .

Comme  $x \ln 4$  est strictement positif :  $v(x) = \frac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{x \ln 4} \geq 0$ .

Finalement  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $v(x) \geq 0$ .

•  $v$  est nulle sur  $] - \infty, 0]$  donc  $v$  est continue sur  $] - \infty, 0]$ .

$x \rightarrow e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}$  et  $x \rightarrow \frac{1}{x \ln 4}$  sont continues sur  $]0, +\infty[$ . Par produit  $v$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

Finalement  $v$  est au moins continue sur  $\mathbb{R}^*$  donc sur  $\mathbb{R}$  privé d'un ensemble fini de points.

- $\int_{-\infty}^0 v(x) dx$  existe et vaut 0 car  $v$  est nulle sur  $] - \infty, 0]$ .

$c^2$  et  $4c^2$  sont des réels strictement positifs donc, d'après **I.3.d.** :  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{x} dx$  existe et vaut  $\ln \frac{4c^2}{c^2}$  ou  $\ln 4$ .

Alors  $\int_0^{+\infty} v(x) dx$  existe et vaut  $\frac{1}{\ln 4} \times \ln 4$  ou 1. Finalement  $\int_{-\infty}^{+\infty} v(x) dx$  existe et vaut 1.

Les trois points précédents montrent que :

$v$  est une densité d'une variable aléatoire réelle.

- 2.**  $\forall x \in ] - \infty, 0]$ ,  $x v(x) = 0$  donc  $\int_{-\infty}^0 x v(x) dx$  existe et vaut 0.

$$\forall x \in ]0, +\infty[, x v(x) = \frac{1}{\ln 4} (e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}).$$

Si  $\lambda$  est un réel strictement positif le cours sur les lois exponentielles nous autorise à dire que  $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx$  existe et vaut 1.

Ainsi pour tout réel strictement positif  $\lambda$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$  existe et vaut  $\frac{1}{\lambda}$ .

Donc  $\int_0^{+\infty} e^{-c^2x} dx$  et  $\int_0^{+\infty} e^{-4c^2x} dx$  existent et valent respectivement  $\frac{1}{c^2}$  et  $\frac{1}{4c^2}$ .

Alors  $\int_0^{+\infty} x v(x) dx$  existe et vaut  $\frac{1}{\ln 4} \frac{1}{c^2} - \frac{1}{\ln 4} \frac{1}{4c^2}$  ou  $\frac{3}{4c^2 \ln 4}$ .

Finalement  $\int_{-\infty}^{+\infty} x v(x) dx$  converge et vaut  $\frac{3}{4c^2 \ln 4}$ . Par conséquent :

$X$  admet une espérance qui vaut  $\frac{3}{4c^2 \ln 4}$ .

- 3. a.** Nous noterons  $F_X$  et  $F_Y$  les fonctions de répartition de  $X$  et de  $Y$ .

$Y$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  donc  $\forall x \in ] - \infty, 0[, F_Y(x) = 0$ .

$$\forall x \in [0, +\infty[, F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = F_X(x^2).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} F_X(x^2) & \text{si } x \in [0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrons que  $F_Y$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  au moins sur  $\mathbb{R}^*$ .

- $x \rightarrow x^2$  et  $F_X$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  donc par composition  $x \rightarrow F_X(x^2)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $F_Y$  est continue sur  $[0, +\infty[$  donc continue en tout point de  $]0, +\infty[$  et continue à droite en 0.

$F_Y$  est nulle sur l'intervalle ouvert  $] - \infty, 0]$ , donc  $F_Y$  est continue en tout point de  $] - \infty, 0]$ .

Observons que  $F_Y(0) = F_X(0) = \int_{-\infty}^0 v(x) dx = 0$ . Alors  $\lim_{x \rightarrow 0^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0)$ ;  $F_Y$  est continue à gauche en 0.

Ceci achève de montrer que  $F_Y$  est continue en tout point de  $\mathbb{R}$ .

•  $v$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  donc  $F_X$  est au moins de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $F'_X(x) = v(x)$ .

$x \rightarrow x^2$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  et  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ ,  $x^2 \in \mathbb{R}^*$ . Donc par composition  $x \rightarrow F_X(x^2)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Ainsi  $F_Y$  est de classes  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

$F_Y$  étant nulle sur  $] - \infty, 0[$  elle est également de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $] - \infty, 0[$ .

$F_Y$  est donc au moins de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  donc sur  $\mathbb{R}$  privé d'un ensemble fini de points. Ceci achève de montrer que :

$$Y = \sqrt{X} \text{ est une variable aléatoire à densité.}$$

$\forall x \in ] - \infty, 0[$ ,  $F_Y(x) = 0$  donc  $\forall x \in ] - \infty, 0[$ ,  $F'_Y(x) = 0$ .

$\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $F_Y(x) = F_X(x^2)$  donc  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $F'_Y(x) = 2x F'_X(x^2) = 2x v(x^2)$ .

$$\forall x \in ]0, +\infty[, F'_Y(x) = 2x \frac{e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}}{x^2 \ln 4} = 2x \frac{e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}}{x^2 2 \ln 2} = \frac{e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}}{x \ln 2}.$$

$$\text{Posons } \forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \begin{cases} \frac{e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}}{x \ln 2} & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$f_Y$  est positive sur  $\mathbb{R}$  et coïncide avec  $F'_Y$  sur  $\mathbb{R}^*$  donc sur  $\mathbb{R}$  privé d'un ensemble fini de points. Ainsi  $f_Y$  est une densité de  $Y$ .

La fonction  $f_Y$  définie par :  $\forall x \in \mathbb{R}, f_Y(x) = \begin{cases} \frac{e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}}{x \ln 2} & \text{si } x \in ]0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , est une densité de  $Y$ .

**b.**  $Y^2 = X$  et  $X$  possède une espérance. Ainsi  $E(Y^2)$  existe donc  $Y$  possède un moment d'ordre 2 donc une espérance et une variance.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_Y(x) dx = \int_0^{+\infty} x f_Y(x) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} (e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}) dx.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 x^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}c}} e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}c}\right)^2}}.$$

Ainsi  $x \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 x^2}$  est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres 0 et  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}c}\right)^2$ .

Donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-c^2 x^2} dx$  existe et vaut 1. Alors  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2 x^2} dx$  existe et vaut  $\frac{\sqrt{\pi}}{c}$ .

Par parité  $\int_0^{+\infty} e^{-c^2 x^2} dx$  existe et vaut  $\frac{\sqrt{\pi}}{2c}$ .

En remplaçant  $c$  par  $2c$  on peut dire que  $\int_0^{+\infty} e^{-4c^2 x^2} dx$  existe et vaut  $\frac{\sqrt{\pi}}{4c}$ . Alors :

$$E(Y) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} (e^{-c^2 x^2} - e^{-4c^2 x^2}) dx = \frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} e^{-c^2 x^2} dx - \frac{1}{\ln 2} \int_0^{+\infty} e^{-4c^2 x^2} dx.$$

$$E(Y) = \frac{1}{\ln 2} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2c} - \frac{\sqrt{\pi}}{4c} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4c \ln 2}.$$

$$Y \text{ possède une espérance qui vaut : } \frac{\sqrt{\pi}}{4c \ln 2}.$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = E(X) - (E(Y))^2 = \frac{3}{4c^2 \ln 4} - \left( \frac{\sqrt{\pi}}{4c \ln 2} \right)^2 = \frac{3}{4c^2 \ln 4} - \frac{\pi}{16c^2 (\ln 2)^2}$$

$$Y \text{ possède une variance qui vaut : } \frac{3}{4c^2 \ln 4} - \frac{\pi}{16c^2 (\ln 2)^2} \text{ ou } \frac{6 \ln 2 - \pi}{16c^2 (\ln 2)^2}.$$

## PROBLÈME 2

### Partie I - Deux exemples

$$1. (R_\theta)^2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{pmatrix}.$$

$$(R_\theta)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$(R_\theta)^2 = I_2.$$

La fonction cos prend une infinité de valeurs donc  $\{R_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$  est un ensemble infini et tous ses éléments sont des racines carrées de  $I_2$ . Ainsi :

$I_2$  admet une infinité de racines carrées.

$$2. \text{ Supposons qu'il existe une matrice } R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}.$$

Donc  $a^2 + bc = c(a + d) = d^2 + bc = 0$  et  $b(a + d) = 1$ .

Nécessairement  $a + d$  n'est pas nul. Ainsi  $c = 0$ . Alors  $a^2 = d^2 = 0$ . Donc  $a = d = 0$ , ce qui contredit  $a + d \neq 0$ .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ n'admet pas de racine carrée.}$$

## Partie II - Racine carrées d'une matrice de la forme $I_n + N$ avec $N$ nilpotente

1.  $\sqrt{1+t} = (1+t)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{(1/2)(1/2-1)}{2!}t^2 + \frac{(1/2)(1/2-1)(1/2-2)}{3!}t^3 + o(t^3)$  au voisinage de 0.

$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3)$  au voisinage de 0.

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3) \text{ au voisinage de 0.}$$

2. • **Version 1.** On calcule !

Posons  $S = 1 + X - (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2$ . Alors  $S = 1 + X - \left(1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3\right)^2$ .

$$S = 1 + X - \left(1 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{64}X^4 + \frac{1}{256}X^6 + X - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{8}X^3 - \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{16}X^4 - \frac{1}{64}X^5\right).$$

$$S = -\frac{1}{64}X^4 - \frac{1}{256}X^6 - \frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{64}X^5 = -\frac{5}{64}X^4 + \frac{1}{64}X^5 - \frac{1}{256}X^6 = X^4 \left(-\frac{5}{64} + \frac{1}{64}X - \frac{1}{256}X^2\right).$$

$$\text{Donc } 1 + X = \left(1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3\right)^2 + X^4 \left(-\frac{5}{64} + \frac{1}{64}X - \frac{1}{256}X^2\right).$$

$$Q = -\frac{5}{64} + \frac{1}{64}X - \frac{1}{256}X^2 \text{ est un élément de } \mathbb{R}[X] \text{ tel que : } 1 + X = \left(1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3\right)^2 + X^4 Q(X)$$

ou tel que  $1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X)$ .

• **Version 2.** Avec peu de calculs et surtout avec la possibilité de généraliser à l'ordre  $p$ ...

$$\text{Posons } P = a_0 + a_1 X + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3. \quad P = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X^3.$$

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 + o(t^3) = P(t) + o(t^3) \text{ au voisinage de 0.}$$

Alors il existe un réel  $\alpha$  appartenant à  $]0, 1[$  et une application  $\varepsilon$  de  $] - \alpha, \alpha[$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\forall t \in ] - \alpha, \alpha[$ ,  $\sqrt{1+t} = P(t) + t^3 \varepsilon(t)$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$ .

$$\forall t \in ] - \alpha, \alpha[, \quad 1 + t = (P(t))^2 + 2P(t)t^3 \varepsilon(t) + t^6 (\varepsilon(t))^2.$$

$$\forall t \in ] - \alpha, \alpha[ \setminus \{0\}, \quad \frac{1+t - (P(t))^2}{t^3} = 2P(t)\varepsilon(t) + t^3 (\varepsilon(t))^2.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1+t - (P(t))^2}{t^3} = 2 \times P(0) \times 0 + 0^3 \times 0^2 = 0.$$

$1 + X - P^2$  est un polynôme de degré au plus 6 (en fait de degré 6...).  $1 + X - P^2 = \sum_{k=0}^6 b_k X^k$  où  $(b_0, b_1, \dots, b_6) \in \mathbb{R}^6$ .

Supposons qu'il existe un élément  $i_0$  de  $\llbracket 0, 3 \rrbracket$  tel que  $b_{i_0} \neq 0$ . Notons alors  $j$  le plus petit élément de  $\{k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket \mid b_k \neq 0\}$ .

$1 + X - P^2 = \sum_{k=j}^6 b_k X^k$  et  $b_j$  n'est pas nul.

Alors  $1 + t - P^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} b_j t^j$ . Donc  $\frac{1 + t - P^2(t)}{t^3} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} b_j t^{j-3}$ .

Or  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + t - (P(t))^2}{t^3} = 0$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0} (b_j t^{3-j}) = 0$ . Comme  $b_j$  n'est pas nul :  $\lim_{t \rightarrow 0} t^{3-j} = 0$ .

En particulier  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{3-j} = 0$ . Or  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{3-j} = +\infty$  si  $j < 3$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{3-j} = 1$  si  $j = 3$ . Une légère contradiction apparaît !!

Ainsi  $\forall j \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ ,  $b_j = 0$ . Donc  $1 + X - P^2 = \sum_{j=4}^6 b_j X^j = X^4 \sum_{j=4}^6 b_j X^{j-4}$ .

Ainsi  $Q = \sum_{j=4}^6 b_j X^{j-4}$  est un élément de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $1 + X = P^2 + X^4 Q(X)$  donc tel que  $1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X)$ .

Il existe un élément  $Q$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel que  $1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X)$ .

**3.**  $I_n + N = (a_0 I_n + a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3)^2 + N^4 Q(N)$  et  $N^4 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ .

Donc  $(a_0 I_n + a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3)^2 = I_n + N$ .

Par conséquent  $a_0 I_n + a_1 N + a_2 N^2 + a_3 N^3$  ou  $I_n + \frac{1}{2} N - \frac{1}{8} N^2 + \frac{1}{16} N^3$  est une racine carrée de  $I_n + N$ .

$I_n + \frac{1}{2} N - \frac{1}{8} N^2 + \frac{1}{16} N^3$  est une racine carrée de  $I_n + N$ .

### Partie III - Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant $n$ valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

**1. a.** Soit SEP  $(f, \lambda)$  un sous-espace propre de  $f$  et  $x$  un élément de ce sous-espace propre.  $f(x) = \lambda x$ .

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ . Donc  $f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$ . Donc  $g(x)$  appartient à SEP  $(f, \lambda)$ .

Pour tout élément  $x$  de SEP  $(f, \lambda)$ ,  $g(x)$  appartient à SEP  $(f, \lambda)$ ; SEP  $(f, \lambda)$  est stable par  $g$ .

Chaque sous-espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .

*Remarque* De même chaque sous-espace propre de  $g$  est stable par  $f$ .

**b.** Notons que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  admettant  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes et que  $n$  est la dimension de  $\mathbb{R}^n$ .

Alors non seulement  $f$  est diagonalisable mais ses sous espaces propres sont des droites vectorielles.

Soit  $x$  un vecteur propre de  $f$  et  $\lambda$  la valeur propre associée.  $x$  est un vecteur non nul de SEP  $(f, \lambda)$  et SEP  $(f, \lambda)$  est une droite vectorielle. Ainsi SEP  $(f, \lambda) = \text{Vect}(x)$ .

D'après ce qui précède  $g(x)$  appartient à SEP  $(f, \lambda)$  donc à  $\text{Vect}(x)$ . Alors il existe un réel  $\alpha$  tel que :  $g(x) = \alpha x$ . Comme  $x$  n'est pas nul,  $x$  est un vecteur propre de  $g$ .

Tout vecteur propre de  $f$  est vecteur propre de  $g$ .

**c.**  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  admettant  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes et  $n$  est la dimension de  $\mathbb{R}^n$ . Ainsi :

$f$  est diagonalisable.

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .  $\mathcal{B}$  est encore une base de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $g$ . Ainsi la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$  est diagonale.

La matrice de  $g$  dans une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $f$  est diagonale.

$f$  est diagonalisable donc il existe au moins une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $f$ . La matrice de  $g$  dans cette base étant diagonale, nécessairement :

$g$  est diagonalisable.

**2. a.**  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ayant  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes donc  $A$  est diagonalisable. Ainsi :

il existe une matrice inversible  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^{-1}AP$  soit une matrice diagonale.

*Remarque* Si nous ne le redisons pas, dans la suite  $P$  est une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $D = P^{-1}AP$  soit diagonale et  $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

**b.** Soit  $P$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^{-1}AP$  soit une matrice diagonale.

$D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .  $\text{Sp } A = \text{Sp } D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Comme les valeurs propres de  $A$  sont des réels (strictement) positifs :  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, d_i \geq 0$ .

Posons  $\Delta_0 = \text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$  et  $R_0 = P\Delta_0P^{-1}$ .

Notons que  $A = PDP^{-1}$ . De plus :

$$\Delta_0^2 = (\text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n}))^2 = \text{Diag}\left((\sqrt{d_1})^2, (\sqrt{d_2})^2, \dots, (\sqrt{d_n})^2\right) = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = D.$$

Alors  $R_0^2 = (P\Delta_0P^{-1})^2 = P\Delta_0^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$ .  $R_0$  est une racine carrée de  $A$ .

Soit  $P$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^{-1}AP$  soit une matrice diagonale.

Si  $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  alors  $P\text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})P^{-1}$  est une racine carrée de  $A$ .

**c.**  $AR = R^2R = R^3 = RR^2 = RA$ .

Si  $R$  est une racine carrée de  $A$  :  $AR = RA$ .

Soit  $\mathcal{B}_0$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Notons  $f$  et  $g$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^n$  de matrices  $A$  et  $R$  dans la base  $\mathcal{B}_0$ .  $f$  a  $n$  valeurs propres deux à deux distinctes car c'est le cas pour  $A$  par hypothèse. De plus  $f \circ g = g \circ f$  car  $AR = RA$ .

$P$  est une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^n$  et une seule telle que  $P$  soit la matrice de passage de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}$ .

*Remarque* Si  $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et si  $P = (p_{i,j})$ ,  $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$  avec, pour tout  $j$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i$ .

$D = P^{-1}AP$  est alors la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Comme  $D$  est diagonale,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^n$  constituée de vecteurs propres de  $f$ . **1.c** permet alors de dire que la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$  est diagonale.

Or la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $P^{-1}RP$ . Ainsi  $P^{-1}RP$  est diagonale.

Si  $R$  est une racine carrée de  $A$  et si  $P$  est une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^{-1}AP$  soit diagonale alors  $P^{-1}RP$  est diagonale.

**d.**  $P$  est toujours une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^{-1}AP$  soit une matrice diagonale.  $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .

Notons que  $\text{Sp } A = \text{Sp } D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ . Par hypothèse les valeurs propres de  $A$  sont strictement positives. Par conséquent les réels  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sont strictement positifs.

Ce qui précède montre que si  $R$  est une racine carrée de  $A$  alors il existe une matrice diagonale  $\Delta$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}RP = \Delta$  ou  $R = P\Delta P^{-1}$ .

Ainsi les racines carrées de  $A$  sont du type  $P\Delta P^{-1}$  où  $\Delta$  est une matrice diagonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Il est donc légitime de rechercher les racines carrées de  $A$  sous la forme  $P\Delta P^{-1}$  où  $\Delta$  est une matrice diagonale.

Soit alors une matrice diagonale  $\Delta = \text{Diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Posons  $R = P\Delta P^{-1}$ .

$$R^2 = A \iff (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta P^{-1} \iff P\Delta^2 P^{-1} = P\Delta P^{-1} \iff \Delta^2 = \Delta.$$

Notons que la dernière équivalence est justifiée par le fait que  $P$  est inversible.

$$R^2 = A \iff (\text{Diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n))^2 = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) \iff \text{Diag}(\delta_1^2, \delta_2^2, \dots, \delta_n^2) = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n).$$

$$R^2 = A \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta_i^2 = d_i \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \varepsilon_i \in \{-1, 1\}, \delta_i = \varepsilon_i \sqrt{d_i}.$$

Ainsi l'ensemble des racines carrées de  $A$  est l'ensemble

$$\mathcal{R} = \left\{ P \text{Diag} \left( \varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{d_n} \right) P^{-1}; (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \right\}.$$

Comme  $\{-1, 1\}^n$  a  $2^n$  éléments il semble assez clair que  $\mathcal{R}$  a également  $2^n$  éléments.

Démontrons le (cela ne s'impose pas le jour du concours!!) en prouvant que  $\{-1, 1\}^n$  et  $\mathcal{R}$  sont équipotents c'est à dire qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre.

$$\text{Posons } \forall (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = P \text{Diag} \left( \varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{d_n} \right) P^{-1}.$$

Le résultat obtenu plus haut indique clairement que  $\psi$  est une application surjective de  $\{-1, 1\}^n$  dans  $\mathcal{R}$ .

Montrons qu'elle est injective. Soient  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$  et  $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$  deux éléments de  $\{-1, 1\}^n$  tels que  $\psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \psi(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ .

$$P \text{Diag} \left( \varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{d_n} \right) P^{-1} = P \text{Diag} \left( \varepsilon'_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon'_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon'_n \sqrt{d_n} \right) P^{-1}.$$

En multipliant à droite par  $P$  et à gauche par  $P^{-1}$  il vient :

$$\text{Diag} \left( \varepsilon_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{d_n} \right) = \text{Diag} \left( \varepsilon'_1 \sqrt{d_1}, \varepsilon'_2 \sqrt{d_2}, \dots, \varepsilon'_n \sqrt{d_n} \right).$$

Alors  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varepsilon_i \sqrt{d_i} = \varepsilon'_i \sqrt{d_i}$ . Or  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sqrt{d_i} \neq 0$ . Ainsi  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varepsilon_i = \varepsilon'_i$ .

Donc  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_n)$ . Ceci achève de montrer l'injectivité de  $\psi$ .

$\psi$  est donc bijective et ainsi le cardinal de  $\mathcal{R}$  est celui de  $\{-1, 1\}^n$  c'est à dire  $2^n$ .

$A$  possède exactement  $2^n$  racines carrées.

---

## Partie IV - Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

---

Dans la suite  $\|\cdot\|$  est la norme associée au produit scalaire canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

1. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $S$ . Soit  $X$  un vecteur propre associé.

Comme  $S$  est positive :  ${}^tX S X \geq 0$ . Alors  $0 \leq {}^tX S X = {}^tX(\lambda X) = \lambda {}^tX X = \lambda \|X\|^2$ .

Donc  $0 \leq \lambda \|X\|^2$  et  $\|X\|^2 > 0$  car  $X$  n'est pas nul. Par conséquent :  $\lambda \geq 0$ .

Toutes les valeurs propres de  $S$  sont positives ou nulles.

2.  $S$  est une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . D'après le cours :

il existe une matrice orthogonale  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $D = P^{-1} S P$  soit diagonale.

3. Posons  $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ .  $\text{Sp } A = \text{Sp } D = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}$ .

Comme les valeurs propres de  $S$  sont positives ou nulles, les réels  $d_1, d_2, \dots, d_n$  sont positifs ou nuls.

Posons  $\Delta_0 = \text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n})$  et  $R_0 = P \Delta_0 P^{-1}$ .

Notons que  $S = P D P^{-1}$ . De plus :

$$\Delta_0^2 = (\text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n}))^2 = \text{Diag}((\sqrt{d_1})^2, (\sqrt{d_2})^2, \dots, (\sqrt{d_n})^2) = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n) = D.$$

Alors  $R_0^2 = (P \Delta_0 P^{-1})^2 = P \Delta_0^2 P^{-1} = P D P^{-1} = S$ .  $R_0$  est une racine carrée de  $S$ .

Montrons alors que  $R_0$  est symétrique et positive. Rappelons que  $P$  est orthogonale ; ainsi  $P^{-1} = {}^t P$ . Notons également que  $\Delta_0$  est symétrique car elle diagonale.

$${}^t R_0 = {}^t (P \Delta_0 P^{-1}) = {}^t (P \Delta_0 {}^t P) = {}^t ({}^t P) {}^t \Delta_0 {}^t P = P {}^t \Delta_0 {}^t P = P \Delta_0 {}^t P = P \Delta_0 P^{-1} = R_0 ; R_0 \text{ est symétrique.}$$

Soit  $X$  un élément de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . Posons  $Y = P^{-1} X$ .

Il existe un élément  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ . De plus  $Y = {}^t P X$ .

$$\text{Alors } {}^t X R_0 X = {}^t X P \Delta_0 P^{-1} X = {}^t X P \Delta_0 {}^t P X = {}^t ({}^t P X) \Delta_0 {}^t P X = {}^t Y \Delta_0 Y.$$

$${}^t X R_0 X = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_n) \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} y_1 \\ \sqrt{d_2} y_2 \\ \vdots \\ \sqrt{d_n} y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (y_i \sqrt{d_i} y_i).$$

Alors  ${}^t X R_0 X = \sum_{i=1}^n \sqrt{d_i} y_i^2$  donc  ${}^t X R_0 X$  est positif ou nul. Ceci achève de montrer que  $R_0$  est positive.

Donc  $R_0$  est une racine carrée symétrique et positive de  $S$ .

Soit  $P$  une matrice orthogonale de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $D = P^{-1} S P$  soit une matrice diagonale.

Si  $D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$  alors  $P \text{Diag}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \dots, \sqrt{d_n}) P^{-1}$  est une racine carrée symétrique et positive de  $S$ .

**4. a.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $R$ . Soit  $X$  un élément de  $\text{SEP}(R, \lambda)$ .

$$S X = R^2 X = R(R X) = R(\lambda X) = \lambda R X = \lambda(\lambda X) = \lambda^2 X ; S X = \lambda^2 X.$$

Ainsi  $\text{SEP}(R, \lambda) \subset \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid S X = \lambda^2 X\}$ . Comme  $\text{SEP}(R, \lambda)$  n'est pas réduit au vecteur nul de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , il en est de même pour  $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid S X = \lambda^2 X\}$ .

Alors  $\lambda^2$  est une valeur propre de  $S$  et :  $\text{SEP}(R, \lambda) \subset \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid S X = \lambda^2 X\} = \text{SEP}(S, \lambda^2)$ .

Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $R$ ,  $\lambda^2$  est une valeur propre de  $S$  et  $\text{SEP}(R, \lambda) \subset \text{SEP}(S, \lambda^2)$ .

**b.** Soit  $X$  un élément de  $\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i)$ .

Il existe un élément  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  de  $\prod_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i)$  tel que  $X = \sum_{i=1}^p X_i$ .

Or  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\text{SEP}(R, \lambda_i) \subset \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$  donc  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $X_i \in \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$ .

Alors  $X = \sum_{i=1}^p X_i \in \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$ . Finalement :

$$\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2).$$

**c.**  $\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$  donc  $\dim \left( \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i) \right) \leq \dim \left( \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2) \right)$ .

Ces sommes étant directes :  $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP}(R, \lambda_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$ .

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  sont LES valeurs propres de  $R$  et  $R$  est diagonalisable car  $R$  est une matrice symétrique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , alors :  $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP}(R, \lambda_i) = n$ .

$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_p^2$  sont DES valeurs propres de  $S$  et la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $S$  n'exède pas  $n$  (en fait elle vaut ici  $n$ , car  $S$  est diagonalisable !); ainsi  $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2) \leq n$ .

$$n = \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) \leq \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2) \leq n.$$

d. Dans ces conditions  $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2) = n$ . Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $S$  est inférieure ou égale à  $n$ ,  $S$  ne peut pas avoir d'autres valeurs propres que  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_p^2$ .

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_p^2 \text{ sont les seules valeurs propres de } S.$$

$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\text{SEP} (R, \lambda_i) \subset \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$  donc  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\dim \text{SEP} (R, \lambda_i) \leq \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$ .

Rappelons que  $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) = n = \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$ .

Supposons alors qu'il existe un élément  $i_0$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $\dim \text{SEP} (R, \lambda_{i_0}) < \dim \text{SEP} (S, \lambda_{i_0}^2)$ .

$$\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) = \sum_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket - \{i_0\}} \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) + \dim \text{SEP} (R, \lambda_{i_0}).$$

$$\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) \leq \sum_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket - \{i_0\}} \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2) + \dim \text{SEP} (R, \lambda_{i_0}).$$

$$\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) < \sum_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket - \{i_0\}} \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2) + \dim \text{SEP} (S, \lambda_{i_0}^2).$$

Alors  $\sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (R, \lambda_i) < \sum_{i=1}^p \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$ . D'où une légère contradiction.

Ainsi  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\dim \text{SEP} (R, \lambda_i) = \dim \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$ . De plus  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\text{SEP} (R, \lambda_i) \subset \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$ .

$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  étant un espace vectoriel de dimension finie, on a alors :

$$\text{pour tout élément } i \text{ de } \llbracket 1, p \rrbracket, \text{SEP} (R, \lambda_i) = \text{SEP} (S, \lambda_i^2).$$

e. Pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $C_i$  la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $P$ . Comme  $P$  est une matrice orthogonale de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  est une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

Notons que  $P$  est alors la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  à la base  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ .

De plus  $P^{-1}SP$  est une matrice diagonale donc  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $S$ .

$\text{Sp } R = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$ ,  $\text{Sp } S = \{\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_p^2\}$  et  $\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $\text{SEP} (R, \lambda_i) = \text{SEP} (S, \lambda_i^2)$ . Alors  $R$  et  $S$  ont les mêmes vecteurs propres.

Ainsi  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  constituée de vecteurs propres de  $R$ .

Comme  $P$  est alors la matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  à la base  $(C_1, C_2, \dots, C_n)$  :

$$P^{-1}RP \text{ est une matrice diagonale.}$$

**f.** Supposons que  $R'$  soit une seconde racine carrée symétrique et positive de  $S$ .

D'après ce qui précède :  $P^{-1}RP$  et  $P^{-1}R'P$  sont deux matrices diagonales.

Posons  $P^{-1}RP = \text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$  et  $P^{-1}R'P = \text{Diag}(r'_1, r'_2, \dots, r'_n)$ .

$$\text{Diag}(r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2) = (\text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_n))^2 = (P^{-1}RP)^2 = P^{-1}R^2P = P^{-1}SP.$$

De même  $\text{Diag}(r_1'^2, r_2'^2, \dots, r_n'^2) = P^{-1}S'P$ . Ainsi  $\text{Diag}(r_1^2, r_2^2, \dots, r_n^2) = \text{Diag}(r_1'^2, r_2'^2, \dots, r_n'^2)$ .

Alors  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $r_i^2 = r_i'^2$ .

$R$  est une matrice symétrique positive. On montre alors comme dans **1.** que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

$$\text{Or : } \{r_1, r_2, \dots, r_n\} = \text{Sp} \text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_n) = \text{Sp}(P^{-1}RP) = \text{Sp} R.$$

Ainsi  $r_1, r_2, \dots, r_n$  sont des réels positifs ou nuls. On montre de même que  $r'_1, r'_2, \dots, r'_n$  sont des réels positifs ou nuls.

$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $r_i^2 = r_i'^2$  donne alors  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $r_i = r_i'$ .

Dans ces conditions  $\text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_n) = \text{Diag}(r'_1, r'_2, \dots, r'_n)$  et ainsi  $P^{-1}RP = P^{-1}R'P$ .

En multipliant à droite par  $P^{-1}$  et à gauche par  $P$  il vient  $R = R'$ .

$$S \text{ admet une unique racine carrée symétrique positive.}$$

*Remarque* Résultat on ne peut plus classique mais obtenu de manière bien laborieuse...

---