EM LYON 2010 S J.F. COSSUTTA Lycée Marcelin BERTHELOT SAINT-MAUR

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

PROBLÈME 1

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques - Illustrations

---

Remarque *Dans la suite nous noterons* $[\![1,p]\!]$ *l'ensemble* $\{1,\ldots,p\}$.

Pour toute matrice C *de* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ *ou de* $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ *et pour tout* i *dans* $[\![1,p]\!]$ *nous noterons* $(C)_i$ *le coefficient de* C *situé sur la* $i^{\text{ème}}$ *ligne.*

1. a. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$$A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{p} \Big((A)_{i,j} \times 1\Big) = 1 \end{cases}.$$

$$A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{p} \Big((A)_{i,j}\,(V)_j\Big) = (V)_i \end{cases} \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V \end{cases}.$$

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \text{ de } \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ A \in \mathcal{ST}_p \iff \begin{cases} \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ (A)_{i,j} \geqslant 0 \\ AV = V \end{cases}.}$$

1. b. Soit A un élément de $\mathcal{ST}_p$. V n'est pas nul(le) et $AV = V$. Donc 1 est valeur propre de A et V en est un vecteur propre associé.

$$\boxed{\text{1 est une valeur propre commune à toutes les matrices de } \mathcal{ST}_p.}$$

2. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{ST}_p$.

• Soient i et j deux éléments de $[\![1,p]\!]$. $(AB)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \Big((A)_{i,k}\,(B)_{k,j}\Big)$.

Or $\forall k \in [\![1,p]\!],\ (A)_{i,k} \geqslant 0$ et $(B)_{k,j} \geqslant 0$ car A et B sont des éléments de $\mathcal{ST}_p$.

Donc $\forall k \in [\![1,p]\!],\ (A)_{i,k}\,(B)_{k,j} \geqslant 0$. Ainsi $(AB)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \Big((A)_{i,k}\,(B)_{k,j}\Big) \geqslant 0$, et ceci pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$.

• $AV = V$ et $BV = V$ car A et B sont des éléments de $\mathcal{ST}_p$, donc $(AB)V = A(BV) = AV = V$.

Ceci achève de montrer que AB est un élément de $\mathcal{ST}_p$.

$$\boxed{\text{Le produit de deux éléments de } \mathcal{ST}_p \text{ est un élément de } \mathcal{ST}_p.}$$

3. a) A_1 est une matrice triangulaire inférieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux c'est à dire 1, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$.

A_1 est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ayant 3 valeurs propres distinctes donc A_1 est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

$$\boxed{A_1 \text{ est diagonalisable et le sous-espace propre de } A_1 \text{ associé à la valeur propre 1 est de dimension 1.}}$$

Remarque Notons que SEP $(A_1, 1) = \text{Vect}(V)$, SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$, SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

3. b. (i) • Les coefficients de A_3 sont des réels positifs ou nuls.

• $A_3V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V.$

Donc A_3 est un élément de $\mathcal{ST}_3$.

• A_3 est une matrice triangulaire inférieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

Ainsi les deux valeurs propres de A_3 sont 1 et $\dfrac{1}{2}$.

Cherchons les dimensions des sous-espaces propres de A_3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$.

$X \in$ SEP $(A_3, 1) \iff A_3X = X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = x \\ (1/2)\, x + (1/2)\, y = y \\ (1/2)\, y + (1/2)\, z = z \end{cases}.$

$X \in$ SEP $(A_3, 1) \iff \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$. Ainsi SEP $(A_3, 1) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Alors $\dim \text{SEP}$ $(A_3, 1) = 1$.

$X \in$ SEP $\left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) \iff A_3X = \dfrac{1}{2}\, X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$

$X \in$ SEP $\left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) \iff \begin{cases} x = (1/2)\, x \\ (1/2)\, x + (1/2)\, y = (1/2)\, y \\ (1/2)\, y + (1/2)\, z = (1/2)\, z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$

Ainsi SEP $\left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Alors $\dim \text{SEP}$ $\left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) = 1$.

$\dim \mathrm{SEP}\left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) + \dim \mathrm{SEP}\left(A_3, \dfrac{1}{2}\right) = 2 \neq 3$. A_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

A_3 est une matrice de $\mathcal{ST}_3$ qui n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

$$\boxed{\text{Il existe au moins un élément de } \mathcal{ST}_3 \text{ non diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C})\text{, par exemple } A_3.}$$

3. b. (ii) • Les coefficients de A_2 sont des réels positifs ou nuls.

• $A_2 V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = V.$

Donc A_2 est un élément de $\mathcal{ST}_3$. 1 est donc valeur propre de A_2.

• Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$X \in \mathrm{SEP}\ (A_2, 1) \Longleftrightarrow A_2 X = X \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x \\ (1/2)\, y + (1/2)\, z = y \\ (1/2)\, y + (1/2)\, z = z \end{cases}.$$

$X \in \mathrm{SEP}\ (A_3, 1) \Longleftrightarrow z = y$. Ainsi SEP $(A_2, 1)$ est l'hyperplan de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $y - z = 0$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Par conséquent SEP $(A_2, 1)$ est de dimension 2.

$$\boxed{\text{L'affirmation << Pour tout élément } A \text{ de } \mathcal{ST}_3\text{, le sous-espace propre pour } A \text{ associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 >> est fausse .}}$$

4. a. $AX = \lambda\, X$ donc $\forall k \in [\![1, p]\!],\ (AX)_k = \lambda\,(X)_k$. En particulier $(AX)_i = \lambda\,(X)_i = \lambda\, x_i$.

Alors : $|\lambda|\,|x_i| = |\lambda\, x_i| = |(AX)_i| = \left|\displaystyle\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}\, x_j\right| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{p} |(A)_{i,j}\, x_j| = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} |(A)_{i,j}|\,|x_j| = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}\,|x_j|$ (les coefficients de A sont des réels positifs ou nuls).

Or $\forall j \in [\![1, p]\!],\ |x_j| \leqslant |x_i|$ et $(A)_{i,j} \geqslant 0$. Donc : $|\lambda|\,|x_i| \leqslant \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j}\,|x_i| = |x_i| \sum_{j=1}^{p} (A)_{i,j} = |x_i| \times 1 = |x_i|$.

$$\boxed{|\lambda\, x_i| \leqslant |x_i|.}$$

4. b. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ n'est pas nul(le) donc $|x_i|$ n'est pas nul car $|x_i| = \underset{1 \leqslant k \leqslant p}{\mathrm{Max}}\, |x_k|$.

Alors $|\lambda|\,|x_i| = |\lambda\, x_i| \leqslant |x_i|$ et $|x_i| > 0$. Par division on obtient : $|\lambda| \leqslant 1$.

$$\boxed{|\lambda| \leqslant 1.}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres dans } \mathbb{C} \text{ des éléments de } \mathcal{ST}_p \text{ ont un module inférieur ou égal à 1.}}$$

Partie II : Suites des moyennes de puissances de matrices stochastiques

1. a. Montrons par récurrence que pour tout élément n de $\mathbb{N}$, A^n appartient à $\mathcal{ST}_p$.

• I_p est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls. De plus $I_p\, V = V$.

Ainsi I_p est un élément de $\mathcal{ST}_p$. Alors A^0 appartient à $\mathcal{ST}_p$ et la propriété est vraie pour $n = 0$.

• Supposons que pour un élément n de $\mathbb{N}$, A^n soit un élément de $\mathcal{ST}_p$.

A et A^n sont alors deux éléments de $\mathcal{ST}_p$. D'après **I 2.** leur produit est un élément de $\mathcal{ST}_p$.

Alors A^{n+1} appartient à $\mathcal{ST}_p$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \text{ de } \mathcal{ST}_p \text{ et pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ A^n \text{ est une matrice de } \mathcal{ST}_p.}$$

1. b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

• Pour tout k dans $\mathbb{N}$, A^k appartient à $\mathcal{ST}_p$. Donc pour tout k dans $\mathbb{N}$, A^k est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls.

Alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des réels positifs ou nuls.

Il en est de même pour $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

• Pour tout k dans $\mathbb{N}$, A^k appartient à $\mathcal{ST}_p$. Donc pour tout k dans $\mathbb{N}$, $A^k\, V = V$. Alors :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right) V = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (A^k\, V) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V = \frac{1}{n}\,(n\, V) = V.$$

Ceci achève de montrer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ appartient à $\mathcal{ST}_p$.

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \text{ de } \mathcal{ST}_p \text{ et pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k \text{ est une matrice de } \mathcal{ST}_p.}$$

Exercice Montrer que $\mathcal{ST}_p$ est un convexe de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et retrouver le résultat précédent.

2. Soit x un réel tel que $|x| \leqslant 1$ et soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \begin{cases} n & \text{si } x=1 \\ \dfrac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$. Ce qui donne encore : $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1-x^n}{1-x} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$.

Donc si $x=1$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = 1$! Supposons que x ne vaut pas 1. Alors $x \in [-1,1[$, donc $|x| \leqslant 1$.

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right| = \frac{1}{n}\,\frac{|1-x^n|}{1-x} \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1+|x|^n}{1-x} \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1+1}{1-x} = \frac{1}{n}\,\frac{2}{1-x}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\,\frac{2}{1-x}\right) = 0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = 0$.

Finalement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ tel que } |x| \leqslant 1 : \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{si } x \neq 1 \end{cases}.}$$

3. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit (i,j) un élément de $[\![1,p]\!]^2$.

• Supposons i et j distincts. Notons que pour tout k dans $\mathbb{N}$, D^k est une matrice diagonale.

Alors : $\displaystyle (M_n)_{i,j} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D^k\right)_{i,j} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (D^k)_{i,j} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 0 = 0$. Par conséquent $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(M_n)_{i,j} = 0$.

Soit encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(M_n)_{i,j} = (\Delta)_{i,j}$.

• Montrons maintenant que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(M_n)_{i,i} = (\Delta)_{i,i}$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, $(D^k)_{i,i} = \big((D)_{i,i}\big)^k$ (car D^k est diagonale).

Alors : $\displaystyle (M_n)_{i,i} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D^k\right)_{i,i} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (D^k)_{i,i} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \big((D)_{i,i}\big)^k$.

D est semblable à A donc D a les mêmes valeurs propres que A. Or D est diagonale donc ses valeurs propres sont ses élément diagonaux. Ainsi le spectre de D est l'ensemble $\{(D)_{i,i}\,;\, i \in [\![1,p]\!]\}$.

Les valeurs propres de A dans $\mathbb{C}$ ont un module inférieur ou égal à 1. Ainsi pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, $(D)_{i,i}$ est un réel dont la valeur absolue est au plus 1.

Rappelons que par hypothèse $(D)_{i,i} = 1$ si $i \in [\![1,r]\!]$ et $(D)_{i,i} \neq 1$ sinon.

Plus de doute alors, d'après ce qui précède : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(M_n)_{i,i} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\big((D)_{i,i}\big)^k\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in [\![1,r]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Soit encore $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(M_n)_{i,i} = (\Delta)_{i,i}$.

Finalement $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(M_n)_{i,j} = (\Delta)_{i,j}$ et ainsi la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers Δ.

$$\boxed{\text{La suite } (M_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \Delta.}$$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n = P$ et $V_n = P^{-1}$.

La suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers P et la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers P^{-1}.

D'après ce qui est admis la suite $(U_n\, M_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $P\,\Delta$.

Toujours en utilisant la même propriété, on peut alors dire que la suite $\Big((U_n\, M_n)\, V_n\Big)_{n\geqslant 1}$ converge vers $(P\,\Delta)\,P^{-1}$.

Notons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (U_n\, M_n)\, V_n = P\, M_n\, P^{-1} = B_n$ et que $B = P\,\Delta\, P^{-1}$. Plus de doute :

$$\boxed{\text{la suite } (B_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } B.}$$

N'en restons pas là et observons que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = P\, M_n\, P^{-1} = P\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} D^k\right) P^{-1}$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (P\, D^k\, P^{-1}) = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (P\, D\, P^{-1})^k = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k$.

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } P\,\Delta\,P^{-1}.}$$

4. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Nous venons de voir que $B_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k$. Alors d'après **II 1. b.**, B_n appartient à $\mathcal{ST}_p$ car A appartient à $\mathcal{ST}_p$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n \in \mathcal{ST}_p.}$$

4. b. Rappelons que B est une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et que $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ B_{i,j} = \lim\limits_{n\to+\infty} (B_n)_{i,j}$.

De plus pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, B_n appartient à $\mathcal{ST}_p$.

- $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ (B_n)_{i,j} \geqslant 0$. En passant à la limite il vient : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ B_{i,j} \geqslant 0$.
- $\forall i \in [\![1,p]\!], \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} (B_n)_{i,j} = 1$. En passant à la limite il vient : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} B_{i,j} = 1$.

Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{B \text{ appartient à } \mathcal{ST}_p.}$$

Remarque *Pour le second point il était tentant de passer à la limite sur $B_n\, V = V$ sauf que le préliminaire n'évoque pas cette possilbilité !.*

Exercice *Montrer que toute suite convergente d'éléments de $\mathcal{ST}_p$ a sa limite dans $\mathcal{ST}_p$ (et qu'ainsi $\mathcal{ST}_p$ est un fermé de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$).*

Partie III : Aspect probabiliste

Remarque Nous ne serons pas plus royaliste que le "roi concepteur" et nous ne soulèverons pas de difficulté au niveau des probabilités conditionnelles sur la nullité de la probabilité de l'événement qui conditionne...

1. • Pour tout (i,j) dans $[\![1,3]\!]^2$, $A_{i,j}$ est une probabilité donc $A_{i,j}$ est un réel positif ou nul.

• Soit i dans $[\![1,3]\!]$.

Rappelons que $P_{(X_0=i)}$ est une probabilité et que $\big((X_1=j)\big)_{j\in[\![1,3]\!]}$ est un système complet d'événements.

Alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} A_{i,j} = \sum_{j=1}^{3} P_{(X_0=i)}(X_1=j) = P_{(X_0=i)}\left(\bigcup_{j=1}^{3}(X_1=j)\right) = P_{(X_0=i)}(\Omega) = 1.$

Donc $\forall i \in [\![1,3]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{3} A_{i,j} = 1$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{A \in \mathcal{ST}_3.}$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Soit j un élément de $[\![1,3]\!]$.

$\big((X_n=i)\big)_{i\in[\![1,3]\!]}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne :

$P(X_{n+1}=j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\Big(P(X_n=i)\,P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j)\Big).$

Or $\forall i \in [\![1,3]\!],\ P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) = P_{(X_0=i)}(X_1=j) = A_{i,j}$.

Alors : $(L_{n+1})_j = P(X_{n+1}=j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\Big(P(X_n=i)\,A_{i,j}\Big) = \sum_{i=1}^{3}\Big((L_n)_i\,A_{i,j}\Big).$

Finalement $\forall j \in [\![1,3]\!],\ (L_{n+1})_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{3}\Big((L_n)_i\,A_{i,j}\Big)$. Ce qui signifie que $L_{n+1} = L_n\,A$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+1} = L_n\,A.}$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = L_0\,A^n$.

• La propriété est vraie pour $n=0$ car $A^0 = I_3$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $n+1$.

$L_{n+1} = L_n\,A = (L_0\,A^n)\,A = L_0\,A^{n+1}$. Ce qui achève la récurrence.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ L_n = L_0\,A^n.}$$

3. Nous savons déjà que les valeurs propres de A_1 sont 1, 1/2 et 1/3, que ses sous-espaces propres sont de dimension 1 et que A_1 est diagonalisable.

Nous savons également que SEP $(A_1, 1) = \text{Vect}(V) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Observons que : $A_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément non nul de SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right)$ qui est une droite vectorielle.

Ainsi SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Déterminons SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right)$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$X \in \text{SEP}\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) \iff A_1 X = \dfrac{1}{2} X \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1/2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$X \in \text{SEP}\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) \iff \begin{cases} x = (1/2)\,x \\ (1/2)\,x + (1/2)\,y = (1/2)\,y \\ (1/3)\,x + (1/3)\,y + (1/3)\,z = (1/2)\,z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ 0 + (1/2)\,y = (1/2)\,y \\ 0 + (1/3)\,y + (1/3)\,z = (1/2)\,z \end{cases}$.

$X \in \text{SEP}\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) \iff \begin{cases} x = 0 \\ (1/3)\,y = (1/6)\,z \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 2\,y \end{cases}$.

Alors SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$.

$\mathcal{B}_1 = (\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $\mathcal{B}_2 = (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ et $\mathcal{B}_3 = (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ sont respectivement des bases de SEP $(A_1, 1)$, SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right)$ et SEP $\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right)$.

Rappelons que : $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = \text{SEP}\,(A_1, 1) \oplus \text{SEP}\left(A_1, \dfrac{1}{2}\right) \oplus \text{SEP}\left(A_1, \dfrac{1}{3}\right)$.

Alors $\mathcal{B} ='' \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3'' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_1 respectivement associés aux valeurs propres 1, $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{3}$.

Notons P_1 la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, P_1 est inversible et $P_1^{-1}\,A\,P = \text{Diag}(1, 1/2, 1/3) = D_1$.

Notons que $A = P_1\, D_1\, P_1^{-1}$.

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible et à coefficients diagonaux tous égaux à 1, telle que $A = P_1\, D_1\, P_1^{-1}$.

Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ tels que $P_1\, X = X'$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Donc $\begin{cases} x = x' \\ x + y = y' \\ x + 2y + z = z' \end{cases}$.

Ce qui donne aisément : $\begin{cases} x = x' \\ y = -x + y' = -x' + y' \\ z = -x - 2y + z' = -x' - 2(-x' + y') + z' \end{cases}$. Ainsi $\begin{cases} x = x' \\ y = -x' + y' \\ z = x' - 2y' + z' \end{cases}$.

Ceci permet d'affirmer que :

$$\boxed{P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

4. $D_1 = \mathrm{Diag}\,(1, 1/2, 1/3)$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ D_1^n = \mathrm{Diag}\,(1, (1/2)^n, (1/3)^n)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (1/2)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (1/3)^n = 0$ car $|(1/2)| < 1$ et $|(1/3)| < 1$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} D_1^n = \mathrm{Diag}\,(1, 0, 0)$.

$$\boxed{\text{La suite } (D_1^n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$A_1 = P_1\, D_1\, P_1^{-1}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_1^n = (P_1\, D_1\, P_1^{-1})^n = P_1\, D_1^n\, P_1^{-1}$.

Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = P_1$ et $S_n = P_1^{-1}$. Posons encore $\widehat{D_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(R_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers P_1 et $(D_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\widehat{D_1}$ donc $(R_n\, D_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $P_1\, \widehat{D_1}$.

Comme $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers P_1^{-1}, $\big((R_n\, D_1^n)\, S_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge vers $(P_1\, \widehat{D_1})\, P_1^{-1}$.

Ce qui signifie que $(P_1\, D_1^n\, P_1^{-1})_{n\geqslant 1}$ converge vers $P_1\, \widehat{D_1}\, P_1^{-1}$ ou que $(A_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $P_1\, \widehat{D_1}\, P_1^{-1}$.

$$P_1\, \widehat{D_1}\, P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{La suite } (A_1^n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ L_n = L_0\, A_1^n$. Posons : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ H_n = L_0$.

La suite $(H_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers L_0, la suite $(A_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc la suite $(H_n\, A_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi la suite $(L_0\, A_1^n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La suite $(L_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers $L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \big(P(X_0=1)\ P(X_0=2)\ P(X_0=3)\big) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$L_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \big(P(X_0=1)+P(X_0=2)+P(X_0=3)\ 0\ 0\big) = (1\ 0\ 0).$$

$$\boxed{\text{La suite } (L_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } (1\ 0\ 0).}$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1,\ \lim_{n\to+\infty} P(X_n=2)=0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} P(X_n=3)=0.}$$

$$\boxed{\text{Donc la suite } (X_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge en loi vers la variable certaine égale à 1.}}$$

Observons que pour obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=3)=0$ il suffit d'obtenir $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1$.

Rappelons que $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ et que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2,\ P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=j) = (A_1)_{i,j}$.

Alors : $\begin{cases} P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=1,\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=0,\ P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=3)=0 \\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=1/2,\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)=1/2,\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=3)=0 \\ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=1)=1/3,\ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2)=1/3,\ P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=3)=1/3 \end{cases}$.

Notons que l'urne 1 est "absorbante" car si à un instant n l'objet est dans cette urne il y reste aux instants suivants (presque sûrement...). Donc si presque sûrement il se trouve à un instant dans l'urne 1, presque sûrement il y restera et nous aurons $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1)=1$.

C'est le cas si au départ il est dans l'urne 1.

Supposons maintenant qu'au départ l'objet soit dans l'urne 2. La probabilité pour qu'à l'instant suivant il ne soit pas dans l'urne 1 est $1/2$. La probabilité pour qu'il ne soit pas dans l'urne 1 au cours des n premiers instants ($n \in \mathbb{N}^*$) est $(1/2)^n$. La probabilité pour qu'il ne soit jamais dans l'urne 1 est $\lim_{n\to+\infty}(1/2)^n$ donc 0. Donc presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1 et ainsi $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = 1$.

Supposons maintenant qu'au départ l'objet soit dans l'urne 3. La probabilité pour qu'à l'instant suivant il reste dans l'urne 3 est $1/3$. La probabilité pour qu'il soit dans l'urne 3 au cours des n premiers instants ($n \in \mathbb{N}^*$) est $(1/3)^n$. La probabilité pour qu'il reste toujours dans l'urne 3 est $\lim_{n\to+\infty}(1/3)^n = 0$ donc 0. Donc presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1 ou dans l'urne 2. Comme dans le cas précédent si à un instant il se trouve dans l'urne 2, presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1. Ainsi si l'objet se trouve au départ dans l'urne 3, presque sûrement à un instant l'objet se trouvera dans l'urne 1 et nous aurons encore $\lim_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = 1$.

PROBLÈME 2

Préliminaires

1. • La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $2 > 1$.

• $\dfrac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{4n^2} \geqslant 0$ et la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2}$ converge d'après ce qui précède.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$ donc la série de terme général $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right|$ est convergente.

Ainsi la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

$$\boxed{\text{Les séries de termes généraux } \dfrac{1}{n^2},\ \dfrac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } \dfrac{(-1)^n}{n^2} \text{ sont convergentes.}}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}\cdot$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\cdot$

Or par hypothèse $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$ Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}\cdot$

Nous retrouvons ainsi la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et de plus :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\cdot}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}\cdot$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}\cdot$

Les séries de termes généraux $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ étant convergentes il vient en passant à la limite :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}\cdot$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\cdot}$$

Partie I : Éléments d'étude de f

---

1. Soit x un élément de $\mathbb{R}$. $t \to \dfrac{t^x}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$.

• $\dfrac{t^x}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} t^x = \dfrac{1}{t^{-x}}\cdot$

• $\forall t \in]0,1],\ \dfrac{1}{t^{-x}} \geqslant 0$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$ sont de même nature.

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$ converge si et seulement si $-x<1$ donc si et seulement si $x>-1$.

Le domaine de définition de $x \to \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est donc J ce qui permet très largement de dire que :

$$\boxed{\text{pour tout élément } x \text{ de } J,\ \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \big[\ln|1+t|\big]_0^1 = \ln 2.$

$f(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t+1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t - f(0) = 1-\ln 2.$

$$\boxed{f(0)=\ln 2 \text{ et } f(1) = 1-\ln 2.}$$

3. Soit x un élément de J. $\forall t\in]0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ et $t^x \geqslant 0$ donc $\forall t \in]0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{t^x}{1+t} \leqslant t^x = \dfrac{1}{t^{-x}}\cdot$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$ sont convergentes, il vient en intégrant : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$ ou $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t$ (car $0 \leqslant 1$).

$\displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 t^x\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{\varepsilon^{x+1}}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1}$ cars $x+1>0$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}\cdot$ On a alors $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in J,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x+1}\cdot}$$

$\forall x \in J,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0$. Il vient lors par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

4. a. Soient x et y deux éléments de J et soit t un élément de $]0,1]$. Supposons que $x \leqslant y$.

$\ln t \leqslant 0$ donc $x\,\ln t \geqslant y\,\ln t$. Par croissance de la fonction exponentielle il vient $e^{x\,\ln t} \geqslant e^{y\,\ln t}$ donc $t^x \geqslant t^y$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in J^2,\ \forall t \in]0,1],\ (x \leqslant y \Rightarrow t^x \geqslant t^y).}$$

4. b. Soient x et y deux éléments de J tels que $x \leqslant y$.

$\forall t \in]0,1],\ t^x \geqslant t^y$ et $\dfrac{1}{1+t} \geqslant 0$. Donc $\forall t \in]0,1],\ \dfrac{t^x}{1+t} \geqslant \dfrac{t^y}{1+t}\cdot$

En intégrant il vient $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{t^y}{1+t}\,\mathrm{d}t = f(y)$ (car $0 \leqslant 1$).

$\forall (x,y) \in J^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } J.}$$

5. Soit x un élément de J. Notons que $x+1$ appartient encore à J.

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^x\,(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t.$$

Nous avons vu plus haut que $\displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$ donc $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in J,\ f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}\cdot}$$

6. Soit x un élément de $]0,+\infty]$. Notons alors que $x-1$ est dans J. f est décroissante sur J donc

- $\dfrac{1}{x+1} = f(x) + f(x+1) \leqslant 2\,f(x)$ ce qui donne $\dfrac{1}{x+1} \leqslant 2\,f(x)$.
- $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{(x-1)+1} = f(x-1) + f(x) \geqslant 2\,f(x)$ ce qui donne $\dfrac{1}{x} \geqslant 2\,f(x)$.

Ainsi $\dfrac{1}{x+1} \leqslant 2\,f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$ Cela donne encore $\dfrac{x}{x+1} \leqslant 2\,x\,f(x) \leqslant 1$ car x est strictement positif.

Donc $\forall x \in]0,+\infty],\ \dfrac{x}{x+1} \leqslant 2\,x\,f(x) \leqslant 1$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(2\,x\,f(x)\big) = 1$ ce qui permet de dire que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,x}\cdot}$$

7. a. Ce résultat peut s'obtenir sans difficulté par récurrence. Voici une seconde piste.

$\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{x+k+1} = f(x+k) + f(x+k+1).$

Donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{(-1)^k}{x+k+1} = (-1)^k\, f(x+k) + (-1)^k\, f(x+k+1) = (-1)^k\, f(x+k) - (-1)^{k+1}\, f(x+k+1).$

Soit n dans $\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k+1} = \sum_{k=0}^{n} \Big((-1)^k\, f(x+k) - (-1)^{k+1}\, f(x+k+1)\Big) = (-1)^0\, f(x+0) - (-1)^{n+1}\, f(x+n+1).$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k+1} = f(x) - (-1)^{n+1}\, f(x+n+1)$. Alors $\displaystyle f(x) = (-1)^{n+1}\, f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k+1}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in J,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (-1)^{n+1}\, f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}\cdot}$$

7. b. $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} = f(x) - (-1)^{n+1}\, f(n+1+x).$

$\forall n \in \mathbb{N},\ |(-1)^{n+1}\, f(n+1+x)| = f(n+1+x)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n+1+x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big((-1)^{n+1}\, f(n+1+x)\Big) = 0.$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} = f(x)$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{pour tout élément } x \text{ de } J, \text{ la série de terme général } \frac{(-1)^k}{k+1+x} \text{ converge et } f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}\cdot}$$

8. a. Soient x et y deux éléments de J et soit k un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| = \left|\frac{(k+1+y)-(k+1+x)}{(k+1+x)\,(k+1+y)}\right| = \frac{|y-x|}{(k+1+x)\,(k+1+y)} = \frac{|x-y|}{(k+1+x)\,(k+1+y)}\cdot$$

Or $k+1+x \geqslant k > 0$ et $k+1+y \geqslant k > 0$ car x et y sont dans J ($x+1>0$ et $y+1>0$...) et k dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $0 \leqslant \dfrac{1}{k+1+x} \leqslant \dfrac{1}{k}$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{k+1+x} \leqslant \dfrac{1}{k}\cdot$ Dans ces conditions : $\dfrac{1}{k+1+x}\,\dfrac{1}{k+1+y} \leqslant \dfrac{1}{k^2}\cdot$

$\dfrac{1}{(k+1+x)\,(k+1+y)} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ et $|x-y| \geqslant 0$ donc $\dfrac{|x-y|}{(k+1+x)\,(k+1+y)} \leqslant |x-y|\,\dfrac{1}{k^2}\cdot$

Alors $\left|\dfrac{1}{k+1+x} - \dfrac{1}{k+1+y}\right| = \dfrac{|x-y|}{(k+1+x)\,(k+1+y)} \leqslant |x-y|\,\dfrac{1}{k^2}\cdot$

$$\boxed{\forall (x,y) \in J^2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| \leqslant |x-y|\,\frac{1}{k^2}\cdot}$$

Soient x et y deux éléments de J. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|.$$

Notons que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|=\sum_{k=0}^{n}\left|(-1)^k\Big(\frac{1}{k+1+x}-\frac{1}{k+1+y}\Big)\right|$. Ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|=\sum_{k=0}^{n}\left(\left|(-1)^k\right|\left|\frac{1}{k+1+x}-\frac{1}{k+1+y}\right|\right)=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k+1+x}-\frac{1}{k+1+y}\right|.$$

Ainsi : $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k+1+x}-\frac{1}{k+1+y}\right|.$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|\leqslant\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{k+1+x}-\frac{1}{k+1+y}\right|.$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|\leqslant\left|\frac{1+y-(1+x)}{(1+x)\,(1+y}\right|+\sum_{k=1}^{n}\left(|x-y|\,\frac{1}{k^2}\right)\leqslant\frac{|y-x|}{(1+x)\,(1+y)}+|x-y|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|\leqslant|x-y|\left(\frac{1}{(1+x)\,(1+y)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\left(\dfrac{1}{(x+1)\,(y+1)}+\dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

$$\boxed{\forall(x,y)\in J^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\left(\frac{1}{(x+1)\,(y+1)}+\frac{\pi^2}{6}\right).}$$

8. b. Soit a un élément de J.

$\forall x\in J,\ 0\leqslant|f(x)-f(a)|\leqslant|x-a|\left(\dfrac{1}{(x+1)\,(a+1)}+\dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(|x-a|\left(\frac{1}{(x+1)\,(a+1)}+\frac{\pi^2}{6}\right)\right)=0\times\left(\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{\pi^2}{6}\right)=0.$

On obtient alors par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. Ce qui montre que f est continue en a et ceci pour tout élément a de J.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } J.}$$

9. Soit x un élément de J. $f(x)+f(x+1)=\dfrac{1}{x+1}$. Alors $(x+1)\,f(x)=1-(x+1)\,f(x+1)$.

$\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x+1)=f(0)$ car f est continue en 0.

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to-1}\big((x+1)\,f(x)\big)=\lim_{x\to-1}\big(1-(x+1)\,f(x+1)\big)=1-0\times f(0)=1.$ Ce qui donne :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to-1}{\sim}\frac{1}{x+1}.}$$

$\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=+\infty$!

$$\boxed{\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty.}$$

Partie II : Dérivabilité de f

---

1. Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Notons que g_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur J. g_k est donc en particulier de classe $\mathcal{C}^2$ sur J.

Soient x et y deux éléments de J. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 1 à g_k donne :

$|g_k(y) - g_k(x) - (y-x)\, g_k'(x)| \leqslant \dfrac{|y-x|^2}{2!} \underset{t\in[x,y] \text{ ou } [y,x]}{\mathrm{Max}} |g_k''(t)|$.

$\forall t \in J,\ g_k'(t) = -\dfrac{(-1)^k}{(k+1+t)^2}$ et $g_k''(t) = 2\, \dfrac{(-1)^k}{(k+1+t)^3}$. $\forall t\in J,\ |g_k''(t)| = \dfrac{2}{(k+1+t)^3}$.

$\forall t\in J,\ k+1+t \geqslant k > 0$. Alors $\forall t \in J,\ (k+1+t)^3 \geqslant k^3 > 0$. Ainsi $\forall t\in J,\ |g_k''(t)| = \dfrac{2}{(k+1+t)^3} \leqslant \dfrac{2}{k^3}$.

Cela permet d'affirmer que : $\underset{t\in[x,y] \text{ ou } [y,x]}{\mathrm{Max}} |g_k''(t)| \leqslant \dfrac{2}{k^3}$.

Donc $|g_k(y) - g_k(x) - (y-x)\, g_k'(x)| \leqslant \dfrac{|y-x|^2}{2} \underset{t\in[x,y] \text{ ou } [y,x]}{\mathrm{Max}} |g_k''(t)| \leqslant \dfrac{|y-x|^2}{2}\, \dfrac{2}{k^3} = \dfrac{|y-x|^2}{k^3}$.

Alors $|g_k(y) - g_k(x) - (y-x)\, g_k'(x)| \leqslant \dfrac{|y-x|^2}{k^3} = \dfrac{|x-y|^2}{k^3}$.

$$\boxed{\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall (x,y)\in J^2,\ |g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x)| \leqslant \frac{|x-y|^2}{k^3}.}$$

Remarque Retrouvons rapidement ce résultat à la main. Soit k un élément de J et soient x et y deux éléments de J. Posons $\varphi_k(x,y) = g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x)$.

$$\varphi_k(x,y) = \frac{(-1)^k}{k+1+x} - \frac{(-1)^k}{k+1+y} - (x-y)\left(-\frac{(-1)^k}{(k+1+x)^2}\right).$$

$$\varphi_k(x,y) = \frac{(-1)^k}{(k+1+x)^2\,(k+1+y)}\Big((k+1+x)\,(k+1+y) - (k+1+x)^2 + (x-y)\,(k+1+y)\Big).$$

Posons : $\psi_k(x,y) = (k+1+x)\,(k+1+y) - (k+1+x)^2 + (x-y)\,(k+1+y)$.

$\psi_k(x,y) = (k+1)^2 + (k+1)x + (k+1)y + xy - (k+1)^2 - 2(k+1)x - x^2 + (k+1)x - (k+1)y + xy - y^2$.

$\psi_k(x,y) = -x^2 + 2xy - y^2 = -(x-y)^2$. *Alors :* $\varphi_k(x,y) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2\,(k+1+y)}\,(x-y)^2$.

Donc $|\varphi_k(x,y)| = \left|\dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2\,(k+1+y)}\,(x-y)^2\right| = \dfrac{|x-y|^2}{(k+1+x)^2\,(k+1+y)}$.

$(k+1+x)^2\,(k+1+y) \geqslant k^3 > 0$ *car* $x+1>0$ *et* $y+1>0$. *Donc* $\dfrac{1}{(k+1+x)^2\,(k+1+y)} \leqslant \dfrac{1}{k^3}$.

Alors $|\varphi_k(x,y)| \leqslant \dfrac{|x-y|^2}{k^3}$.

2. a. La série de terme général $\dfrac{1}{k^3}$ est une série de Riemann convergente car $3>1$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \dfrac{1}{k^3} \text{ est convergente.}}$$

Soit x un élément de J.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant |g_k'(x)| = \left| -\dfrac{(-1^k)}{(k+1+x)^2} \right| = \dfrac{1}{(k+1+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ (car $k+1+x \geqslant k > 0$, air maintenant connu...).

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ est convergente, les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent la convergence de la série de terme général $|g_k'(x)|$.

La série de terme général $g_k'(x)$ est absolument convergente donc elle est convergente.

$$\boxed{\text{La série de terme général } g_k'(x) \text{ est convergente pour tout élément } x \text{ de } J.}$$

2. b. Soient x et y deux éléments de J. Rappelons que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ et $f(y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(y)$.

Rappelons également que la série de terme général $g_k'(x)$ est convergente et posons $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons $L_n(x,y) = \sum\limits_{k=0}^{n} g_k(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} g_k(y) - (x-y) \sum\limits_{k=0}^{n} g_k'(x)$.

Observons que $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n(x,y) = f(x) - f(y) - (x-y)\, S(x)$.

$|L_n(x,y)| = \left| \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Big(g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x) \Big) \right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Big| g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x) \Big|$.

$|L_n(x,y)| \leqslant |g_0(x) - g_0(y) - (x-y)\, g_0'(x)| + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big| g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x) \Big|$.

Or : $|g_0(x) - g_0(y) - (x-y)\, g_0'(x)| = \left| \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+y} - (x-y)\, \dfrac{-1}{(1+x)^2} \right|$.

$|g_0(x) - g_0(y) - (x-y)\, g_0'(x)| = \left| \dfrac{(1+x)(1+y) - (1+x)^2 + (x-y)(1+y)}{(x+1)^2\,(y+1)} \right|$.

$|g_0(x) - g_0(y) - (x-y)\, g_0'(x)| = \left| \dfrac{1+x+y+xy-1-2x-x^2+x-y+xy-y^2}{(x+1)^2\,(y+1)} \right| = \left| \dfrac{-x^2+2xy-y^2}{(x+1)^2\,(y+1)} \right|$.

$|g_0(x) - g_0(y) - (x-y)\, g_0'(x)| = \left| \dfrac{-(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)} \right| = \dfrac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)}$. Dans ces conditions :

$|L_n(x,y)| \leqslant \dfrac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big| g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x) \Big| \leqslant \dfrac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{|x-y|^2}{k^3}$.

Ce qui donne $\left|\sum_{k=0}^{n} g_k(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(y) - (x-y)\sum_{k=0}^{n} g_k'(x)\right| \leqslant \dfrac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{|x-y|^2}{k^3}\cdot$

En faisant tendre n vers $+\infty$, ce qui est licite car toutes les séries convergent on obtient :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(y) - (x-y)\sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)\right| \leqslant \frac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x-y|^2}{k^3}\cdot$$

Ce qui s'écrit : $|f(x) - f(y) - (x-y)\,S(x)| \leqslant \dfrac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{|x-y|^2}{k^3}\cdot$

Ou encore : $|f(x) - f(y) - (x-y)\,S(x)| \leqslant |x-y|^2 \left(\dfrac{1}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right)$.

Supposons $y \neq x$ et divisons par $|x-y|$.

On obtient : $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - S(x)\right| \leqslant |x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right)$.

Finalement $\forall (x,y) \in J^2,\ y \neq x \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - S(x)\right| \leqslant |x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right)$.

Reprenons x dans J.

$\forall y \in J - \{x\},\ 0 \leqslant \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - S(x)\right| \leqslant |x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right)$.

Comme $\lim_{y\to x}\left(|x-y|\left(\dfrac{1}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right)\right) = 0 \times \left(\dfrac{1}{(x+1)^3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right) = 0$, il vient par encadrement :

$\lim_{y\to x} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = S(x)$ ou $\lim_{y\to x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = S(x)$.

Ainsi f est dérivable en x et $f'(x) = S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\dfrac{(-1)^k}{(k+1+x)^2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}\cdot$

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } J \text{ et pour tout élément } x \text{ de } J,\ f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}\cdot}$$

2. c. $f'(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$ (d'après la question 3 du préliminaire).

$$\boxed{f'(0) = -\frac{\pi^2}{12}\cdot}$$

3. A défaut de la courbe résumons les informations sur f.

- f est définie, continue et dérivable sur J.
- f est décroissante sur J.
- $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• $f(0) = \ln 2 \approx 0.69$, $f(1) = 1 - \ln 2 \approx 0.31$, $f'(0) = -\dfrac{\pi^2}{12} \approx -0.82$.

• On a encore : $f(2) \approx 0.19$, $f(3) \approx 0.14$, $f(4) \approx 0.11$, $f(5) \approx 0.09$, $f(6) \approx 0.08$, $f(7) \approx 0.07$, $f(8) \approx 0.06$, $f(9) \approx 0.06$, $f(10) \approx 0.05$ (en utilisant $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$).