

## Partie I : Somme de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1

1. Il résulte du cours que :

La fonction  $h$  définie par  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $h(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \in [0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 valent 1.

2. a. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ .  $X_1, X_2, \dots, X_n$  possèdent une espérance et une variance qui valent 1.

Donc  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  possède une espérance et une variance.

La linéarité de l'espérance donne alors  $E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k)$  donc  $E(S_n) = \sum_{k=1}^n 1 = n$ .

L'indépendance des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  permet d'écrire que  $V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = \sum_{k=1}^n 1 = n$ .

Pour tout élément  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $E(S_n) = n$  et  $V(S_n) = n$ .

b. Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ .  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont indépendantes et suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1 donc la loi gamma de paramètres 1 et 1 (ou la loi gamma de paramètre 1).

Le cours permet alors de dire que  $\sum_{k=1}^n X_k$  suit la loi gamma de paramètres 1 et  $n$  (ou la loi gamma de paramètre  $n$ ).

Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $S_n \hookrightarrow \Gamma(1, n)$  ou  $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$ .

*Remarque* Ceci permet de retrouver l'espérance et la variance de  $S_n$ .

Dans ces conditions :

pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , la fonction  $h_n$  définie par  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $h_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{\Gamma(n)} & \text{si } t \in ]0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est une densité de  $S_n$ .

*Remarques* 1.  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $h_n(t) = \frac{t^{n-1} e^{-t}}{(n-1)!}$ .

2. Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , la fonction  $\hat{h}_n$  définie par  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{h}_n(t) = \begin{cases} \frac{t^{n-1} e^{-t}}{\Gamma(n)} & \text{si } t \in [0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  est encore une densité de  $S_n$ .

3. Notons  $F_U$  et  $F_Y$  les fonctions de répartition de  $U$  et de  $Y$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 0[ \\ x & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[ \end{cases}.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(-\ln(1-U) \leq x) = P(\ln(1-U) \geq -x) = P(1-U \geq e^{-x}) = P(U \leq 1 - e^{-x}).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = F_U(1 - e^{-x}).$$

Si  $x$  est un élément de  $]-\infty, 0[$ ,  $1 - e^{-x} < 0$  et ainsi  $F_Y(x) = F_U(1 - e^{-x}) = 0$ .

Si  $x$  est un élément de  $[0, +\infty[$ ,  $0 \leq 1 - e^{-x} < 1$  et donc  $F_Y(x) = F_U(1 - e^{-x}) = 1 - e^{-x}$ .

Finalement  $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Alors :

$$Y = -\ln(1-U) \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}$$

4. La fonction random permet de simuler  $U$  donc la fonction  $-\ln(1-\text{random})$  permet de simuler  $-\ln(1-U)$  donc la loi exponentielle de paramètre 1.

On simule alors  $S_n$  en ajoutant les résultats de  $n$  simulations (indépendantes) de la loi exponentielle de paramètre 1.

Nous allons plutôt écrire une fonction qu'un programme.

```

1 function Simule_S_n(n:integer):real;
2
3 var k:integer;s:real;
4
5 begin
6 s:=0;
7 for k:=1 to n do
8 s:=s-ln(1-random);
9 Simule_S_n:=s;
10 end;
```

5. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Ici aussi nous écrivons une fonction. Proposons deux versions.

La première simule  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  tant que la simulation donne une valeur inférieure ou égale à  $t$ .

La seconde simule  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  jusqu'à ce que la simulation donne une valeur strictement supérieure à  $t$ . On renvoie alors la valeur  $n - 1$  si  $n$  a été initialisé à 0 ou  $n$  si  $n$  a été initialisé à  $-1$ .

```

1 function Simule_N_t_V1(t:real):integer;
2
3 var n:integer;s:real;
4
5 begin
6 n:=0;s:=-ln(1-random);
7 while (s<=t) do begin
8     n:=n+1;
9     s:=s-ln(1-random);
10 end;
11 Simule_N_t_V1:=n;
12 end;
```

```

1 function Simule_N_t_V2(t:real):integer;
2
3 var n:integer;s:real;
4
5 begin
6 n:=-1;s:=0;
7 repeat
8 n:=n+1;s:=s-ln(1-random);
9 until(s>t);
10 Simule_N_t_V2:=n;
11 end;

```

*Exercice* Soit  $t$  un un réel strictement positif.

Q1. Montrer que presque sûrement il existe au moins un élément  $i$  de  $\mathbb{N}^*$  tel que  $\{S_i > t\}$  se réalise.

Q2. Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , les événements  $\{N_t = n\}$  et  $\{S_n \leq t\} \cap \{S_{n+1} > t\}$  sont égaux.

Q3. Montrer que  $N_t$  suit la loi de Poisson de paramètre  $t$ .

## Partie II : Polynômes de Laguerre

*Remarque* Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$ .  $x \rightarrow x^n$  et  $x \rightarrow e^{-x}$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors par produit  $f_n$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Ceci justifie la définition de  $f_n^{(n)}$  et donc de  $L_n$ .

6.  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $L_0(x) = e^x f_0^{(0)}(x) = e^x f_0(x) = e^x e^{-x} = 1$ . Donc  $L_0 = 1$ .

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, L_0(x) = 1 \text{ ou } L_0 = 1.}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = x e^{-x}$ . Donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $L_1(x) = e^x f_1'(x) = e^x (e^{-x} + x(-e^{-x})) = 1 - x$ . Donc  $L_1 = 1 - X$ .

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, L_1(x) = 1 - x \text{ ou } L_1 = 1 - X.}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f_2(x) = \frac{1}{2} x^2 e^{-x}$ . La formule de Leibniz donne  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f_2^{(2)}(x) = \frac{1}{2} (2 e^{-x} + 2(2x)(-e^{-x}) + x^2 e^{-x})$ .

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f_2^{(2)}(x) = \frac{1}{2} (2 - 4x + x^2) e^{-x}$ . Alors  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $L_2(x) = e^x f_2^{(2)}(x) = e^x \left( \frac{1}{2} (2 - 4x + x^2) e^{-x} \right) = 1 - 2x + \frac{1}{2} x^2$ .

Ou  $L_2 = 1 - 2X + \frac{1}{2} X^2$ .

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, L_2(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2} x^2 \text{ ou } L_2 = 1 - 2X + \frac{1}{2} X^2.}$$

7. Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Posons  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $u_n(x) = x^n$  et  $v(x) = e^{-x}$ .  $u_n$  et  $v$  sont  $n$  fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f_n = \frac{1}{n!} u_n v$ .

La formule de Leibniz donne alors :  $f_n^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_n^{(k)} v^{(n-k)} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_n^{(n-k)} v^{(k)}$ .

Deux récurrences simples montrent que :

$$1. \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, u_n^{(k)}(x) = n(n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

$$2. \forall k \in \mathbb{N}, v^{(k)} = (-1)^k v \text{ ou } \forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, v^{(k)}(x) = (-1)^k e^x.$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \left[ \binom{n}{k} u_n^{(n-k)}(x) v^{(k)}(x) \right] = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \left[ \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-(n-k))!} x^{n-(n-k)} (-1)^k e^{-x} \right].$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \left[ \binom{n}{k} \frac{n!}{k!} x^k (-1)^k e^{-x} \right] = e^{-x} \sum_{k=0}^n \left[ \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \right].$$

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) = e^x f_n^{(n)}(x) = e^x \left( e^{-x} \sum_{k=0}^n \left[ \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \right] \right) = \sum_{k=0}^n \left[ \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \right] = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k \text{ ou } L_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} X^k.$$

**8.** Notons que  $\frac{(-1)^n}{n!} \binom{n}{n} = \frac{(-1)^n}{n!} \neq 0!!$  Alors plus de doute!

pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $L_n$  est une fonction polynômiale (ou un polynôme) de degré  $n$  dont le coefficient du terme de plus haut degré est  $\frac{(-1)^n}{n!}$ .

**9.** Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^{-x}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} (n+1) x^n e^{-x} + \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} (-e^{-x}) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x} - \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^{-x} = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

**10.** Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, L_{n+1}(x) = e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x) \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, L'_{n+1}(x) = e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x) + e^x f_{n+1}^{(n+2)}(x) = e^x \left( f_{n+1}^{(n+1)}(x) + f_{n+1}^{(n+2)}(x) \right).$$

Or  $f'_{n+1} = f_n - f_{n+1}$ . En dérivant  $n+1$  fois on obtient :  $f_{n+1}^{(n+2)} = f_{n+1}^{(n+1)} - f_{n+1}^{(n+1)}$  ou  $f_{n+1}^{(n+1)} + f_{n+1}^{(n+2)} = f_{n+1}^{(n+1)}$ .

$$\text{Alors } \forall x \in \mathbb{R}, L'_{n+1}(x) = e^x f_n^{(n+1)}(x)$$

Or  $\forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(n)}(x) = e^{-x} L_n(x)$ . En dérivant on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n^{(n+1)}(x) = -e^{-x} L_n(x) + e^{-x} L'_n(x) = e^{-x} (L'_n(x) - L_n(x)).$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, L'_{n+1}(x) = e^x f_n^{(n+1)}(x) = e^x e^{-x} (L'_n(x) - L_n(x)) = L'_n(x) - L_n(x).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x) \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}, L'_{n+1} = L'_n - L_n.$$

$$\mathbf{11.} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \frac{x^n e^{-x}}{n!} = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

**12.** Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, (n+1) L_{n+1}(x) = (n+1) e^x f_{n+1}^{(n+1)}(x) = e^x \left( (n+1) f_{n+1} \right)^{(n+1)}(x)$ .

Rappelons que  $\forall x \in \mathbb{R}, u_1(x) = x$ . Alors  $(n+1) f_{n+1} = u_1 f_n$  d'après **Q11**.

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, (n+1) L_{n+1}(x) = e^x \left( (n+1) f_{n+1} \right)^{(n+1)}(x) = e^x (u_1 f_n)^{(n+1)}(x).$$

La formule de Leibniz donne  $(u_1 f_n)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u_1^{(k)} f_n^{(n+1-k)}$ .

Or  $u_1^{(0)} = u_1$ ,  $u_1^{(1)} = 1$  et  $\forall k \in \llbracket 2, +\infty \rrbracket$ ,  $u_1^{(k)} = 0$ .

Alors  $(u_1 f_n)^{(n+1)} = \binom{n+1}{0} u_1 f_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{1} 1 \times f_n^{(n)} = u_1 f_n^{(n+1)} + (n+1) f_n^{(n)}$ .

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(n+1) L_{n+1}(x) = e^x (u_1 f_n)^{(n+1)}(x) = e^x (x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x))$ .

Donc  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(n+1) L_{n+1}(x) = x e^x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) e^x f_n^{(n)}(x) = x e^x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) L_n(x)$ .

Remarquons alors que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n^{(n)}(x) = e^{-x} L_n(x)$ .

Donc en dérivant il vient  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f_n^{(n+1)}(x) = -e^{-x} L_n(x) + e^{-x} L_n'(x)$  ou  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x f_n^{(n+1)}(x) = -L_n(x) + L_n'(x)$  (résultat que nous avons déjà obtenu dans **Q10**...).

Alors  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(n+1) L_{n+1}(x) = x e^x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) L_n(x) = x (-L_n(x) + L_n'(x)) + (n+1) L_n(x)$ .

Finalement  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $(n+1) L_{n+1}(x) = x L_n'(x) + (n+1-x) L_n(x)$ .

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R}, (n+1) L_{n+1}(x) = x L_n'(x) + (n+1-x) L_n(x).}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}, (n+1) L_{n+1} = X L_n' + (n+1-X) L_n.}$$

**13.** Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .  $(n+1) L_{n+1} = X L_n' + (n+1-X) L_n$ . En dérivant on obtient :

$(n+1) L_{n+1}' = L_n' + X L_n'' - L_n + (n+1-X) L_n' = X L_n'' - L_n + (n+2-X) L_n'$ . Or  $L_{n+1}' = L_n' - L_n$ .

Ainsi  $(n+1)(L_n' - L_n) = X L_n'' - L_n + (n+2-X) L_n'$ . Ce qui donne :

$$0_{\mathbb{R}[X]} = -(n+1)(L_n' - L_n) + X L_n'' - L_n + (n+2-X) L_n' = X L_n'' - (X-1) L_n' + n L_n.$$

$$X L_n'' - (X-1) L_n' + n L_n = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, X L_n'' - (X-1) L_n' + n L_n = 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x L_n''(x) - (x-1) L_n'(x) + n L_n(x) = 0.}$$

### Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

**14.** • Soit  $k$  un élément de  $\mathbb{N}$ .

$k+1$  est strictement positif donc  $k+1$  appartient au domaine de définition de la fonction  $\Gamma$ .

Ainsi  $\int_0^{+\infty} x^{(k+1)-1} e^{-x} dx$  converge donc l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$  est convergente.

Pour tout élément  $k$  de  $\mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$  est convergente.

• Soit  $A$  un élément de  $E$ . Il existe un élément  $r$  de  $\mathbb{N}$  et un élément  $(a_0, a_1, \dots, a_r)$  de  $\mathbb{R}^{r+1}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, A(x) = \sum_{k=0}^r a_k x^k.$$

Pour tout élément  $k$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$  converge donc  $\int_0^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^r a_k x^k e^{-x} \right) dx$  converge comme combinaison linéaire de  $r + 1$  intégrales convergentes. Ainsi l'intégrale  $\int_0^{+\infty} A(x) e^{-x} dx$  est convergente.

Pour tout élément  $A$  de  $E$ , l'intégrale  $\int_0^{+\infty} A(x) e^{-x} dx$  est convergente.

*Remarque* On pouvait obtenir l'absolue convergence, donc la convergence, de  $\int_0^{+\infty} A(x) e^{-x} dx$  en montrant que  $|A(x) e^{-x}| \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  par croissance comparée.

**15.** • Soit  $(P, Q)$  un couple d'éléments de  $E$ .

$PQ$  appartient à  $E$  donc  $\int_0^{+\infty} (PQ)(x) e^{-x} dx$  converge donc  $\int_0^{+\infty} P(x) Q(x) e^{-x} dx$  converge! Ainsi  $\langle P, Q \rangle$  existe.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$ .

• Soit  $\lambda$  un réel et soient  $P, Q, R$  trois éléments de  $E$ .

$$\langle \lambda P + Q, R \rangle = \int_0^{+\infty} (\lambda P + Q)(x) R(x) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} (\lambda P(x) R(x) + Q(x) R(x)) e^{-x} dx.$$

$$\langle \lambda P + Q, R \rangle = \int_0^{+\infty} (\lambda P(x) R(x) e^{-x} + Q(x) R(x) e^{-x}) dx = \lambda \int_0^{+\infty} P(x) R(x) e^{-x} dx + \int_0^{+\infty} Q(x) R(x) e^{-x} dx$$

car toutes les intégrales convergent. Alors  $\langle \lambda P + Q, R \rangle = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$ .

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q, R) \in E^3, \langle \lambda P + Q, R \rangle = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est linéaire à gauche.

• Soit  $(P, Q)$  un couple d'éléments de  $E$ .  $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x) Q(x) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} Q(x) P(x) e^{-x} dx = \langle Q, P \rangle$ .

$\forall (P, Q) \in E^2, \langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est symétrique.

• Soit  $P$  un élément de  $E$ .  $\forall x \in \mathbb{R}, (P(x))^2 e^{-x} \geq 0$  et  $0 \leq +\infty$ ! donc  $\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 e^{-x} dx \geq 0$ .

$\forall P \in E, \langle P, P \rangle \geq 0$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est positive.

• Soit  $P$  un élément de  $E$  tel que  $\langle P, P \rangle = 0$ .

$$\blacktriangledown \int_0^{+\infty} (P(x))^2 e^{-x} dx = 0.$$

$$\blacktriangledown x \rightarrow (P(x))^2 e^{-x} \text{ est positive sur } [0, +\infty[.$$

$$\blacktriangledown x \rightarrow (P(x))^2 e^{-x} \text{ est continue sur } [0, +\infty[.$$

$$\blacktriangledown 0 \neq +\infty!$$

Alors  $x \rightarrow (P(x))^2 e^{-x}$  est nulle sur  $[0, +\infty[$ . Comme  $x \rightarrow e^{-x}$  ne s'annule pas sur  $[0, +\infty[ : \forall x \in [0, +\infty[, (P(x))^2 = 0$ .

Ainsi  $\forall x \in [0, +\infty[, P(x) = 0$ . La fonction polynômiale  $P$  admet alors une infinité de zéro c'est donc la fonction polynômiale nulle.  $P = 0_E$ .

$\forall P \in E, \langle P, P \rangle = 0 \Rightarrow P = 0_E$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est définie.

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $E$ .

**16.** • Soit  $P$  un élément de  $E$ .  $x \rightarrow x$ ,  $P''$ ,  $x \rightarrow x - 1$  et  $P'$  sont des applications polynômiales de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Par produit  $x \rightarrow x P''(x)$  et  $x \rightarrow (x - 1) P'(x)$  sont des applications polynômiales de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Par combinaison linéaire  $x \rightarrow x P''(x) - (x - 1) P'(x)$  est une application polynômiale de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  donc un élément de  $E$ . Ainsi  $T(P)$  appartient à  $E$ .

$\forall P \in E$ ,  $T(P) \in E$ .  $T$  est une application de  $E$  dans  $E$ .

• Soit  $\lambda$  un réel et soient  $P, Q$  deux éléments de  $E$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(\lambda P + Q)(x) = x(\lambda P + Q)''(x) - (x - 1)(\lambda P + Q)'(x) = x(\lambda P''(x) + Q''(x)) - (x - 1)(\lambda P'(x) + Q'(x)).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(\lambda P + Q)(x) = \lambda(x P''(x) + (x - 1) P'(x)) + (x Q''(x) + (x - 1) Q'(x)) = \lambda T(P)(x) + T(Q)(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(\lambda P + Q)(x) = (\lambda T(P) + T(Q))(x). \quad T(\lambda P + Q) = \lambda T(P) + T(Q).$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (P, Q) \in E^2, T(\lambda P + Q) = \lambda T(P) + T(Q)$ .  $T$  est linéaire. Ce qui achève de montrer que :

$T$  est un endomorphisme du  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ .

**17.** Posons  $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = x P'(x) e^{-x}$ .

$\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  comme produit de trois fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = P'(x) e^{-x} + x P''(x) e^{-x} + x P'(x) (-e^{-x}) = (x P''(x) - (x - 1) P'(x)) e^{-x} = T(P)(x) e^{-x}.$$

$x \rightarrow T(P)(x) e^{-x}$  est la dérivée de  $x \rightarrow x P'(x) e^{-x}$ .

Pour tout  $P$  dans  $E$ , l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} : x \rightarrow T(P)(x) e^{-x}$  est la dérivée de l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} : x \rightarrow x P'(x) e^{-x}$ .

**18.** Soient  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $E$ .

Rappelons que nous avons posé  $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = x P'(x) e^{-x}$ .  $\varphi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) = T(P)(x) e^{-x}$ .

$$\int_0^A T(P)(x) Q(x) e^{-x} dx = \int_0^A \varphi'(x) Q(x) dx. \quad \varphi \text{ et } Q \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ donc nous pouvons intégrer par parties.}$$

$$\int_0^A T(P)(x) Q(x) e^{-x} dx = \int_0^A \varphi'(x) Q(x) dx = [\varphi(x) Q(x)]_0^A - \int_0^A \varphi(x) Q'(x) dx.$$

$$\int_0^A T(P)(x) Q(x) e^{-x} dx = \varphi(A) Q(A) - \varphi(0) Q(0) - \int_0^A x P'(x) e^{-x} Q'(x) dx. \quad \text{Notons que } \varphi(0) = 0. \text{ Alors :}$$

$$\int_0^A T(P)(x) Q(x) e^{-x} dx = A P'(A) e^{-A} Q(A) - \int_0^A x P'(x) e^{-x} Q'(x) dx.$$

$$\int_0^A T(P)(x) Q(x) e^{-x} dx = A P'(A) Q(A) e^{-A} - \int_0^A x P'(x) Q'(x) e^{-x} dx \quad (1).$$

$x \rightarrow x P'(x) Q'(x)$  appartient à  $E$  comme produit de trois éléments de  $E$ .

$$\text{Donc } \int_0^{+\infty} x P'(x) Q'(x) e^{-x} dx \text{ converge et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x P'(x) Q'(x) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x P'(x) Q'(x) e^{-x} dx \quad (2).$$

Montrons maintenant que  $\lim_{A \rightarrow +\infty} (A P'(A) Q(A) e^{-A}) = 0$ .

$x \rightarrow x P'(x) Q(x)$  est un élément de  $E$  comme produit de trois éléments de  $E$ .

Si  $x \rightarrow x P'(x) Q(x)$  est la fonction nulle de  $E$  alors  $\lim_{A \rightarrow +\infty} (A P'(A) Q(A) e^{-A}) = 0!$

Supposons maintenant que  $x \rightarrow x P'(x) Q(x)$  n'est pas la fonction nulle de  $E$ .

Soit  $r$  le degré de la fonction polynôme  $x \rightarrow x P'(x) Q(x)$  et  $a_r$  le coefficient de son terme de plus haut degré.

$$(A P'(A) Q(A) e^{-A}) \underset{A \rightarrow +\infty}{\sim} a_r A^r e^{-A} = a_r \frac{A^r}{e^A} \text{ et } \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( a_r \frac{A^r}{e^A} \right) = 0 \text{ par croissance comparée.}$$

$$\text{Alors } \lim_{A \rightarrow +\infty} (A P'(A) Q(A) e^{-A}) = 0 \quad (3).$$

En faisant tendre  $A$  vers  $+\infty$  dans (1), et en tenant compte de (2) et (3) on obtient :

$$\int_0^{+\infty} T(P)(x) Q(x) e^{-x} dx = - \int_0^{+\infty} x P'(x) Q'(x) e^{-x} dx$$

$$\boxed{\forall (P, Q) \in E \times E, \langle T(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} x P'(x) Q'(x) e^{-x} dx.}$$

$$\mathbf{19.} \text{ Soit } P \text{ et } Q \text{ deux éléments de } E. \langle T(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} x P'(x) Q'(x) e^{-x} dx.$$

L'intégrale ne change pas si l'on permute  $P$  et  $Q$  donc  $\langle T(P), Q \rangle = \langle T(Q), P \rangle$ .

Par symétrie du produit scalaire :  $\langle T(P), Q \rangle = \langle P, T(Q) \rangle$ .

$$\boxed{\forall (P, Q) \in E \times E, \langle T(P), Q \rangle = \langle P, T(Q) \rangle.}$$

*Remarque*  $T$  est un endomorphisme symétrique de  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , non ?! Mais il est vrai que le programme se limite aux endomorphismes symétriques d'espaces vectoriels euclidiens...

**20.** Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}$ .  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $T(L_n)(x) = x L_n''(x) - (x-1) L_n'(x) = -n L_n(x)$  d'après **Q13**. Donc  $T(L_n) = -n L_n$ .

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, T(L_n) = -n L_n.}$$

*Remarque* Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $L_n \neq 0_E$ . Donc pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $-n$  est une valeur propre de  $T$  et  $L_n$  est un vecteur propre associé.

*Exercice* Montrer que le spectre de  $T$  est  $\{-n, n \in \mathbb{N}\}$ .

**21.** Soient  $i$  et  $j$  deux éléments distincts de  $\llbracket 0, N \rrbracket$ .  $\langle T(L_i), L_j \rangle = \langle L_i, T(L_j) \rangle$  d'après **Q19**.

Donc  $\langle -i L_i, L_j \rangle = \langle L_i, -j L_j \rangle$ . Alors  $-i \langle L_i, L_j \rangle = -j \langle L_i, L_j \rangle$  et ainsi  $(j-i) \langle L_i, L_j \rangle = 0$ .

Comme  $j-i$  n'est pas nul :  $\langle L_i, L_j \rangle$  est nul.

$\forall (i, j) \in \llbracket 0, N \rrbracket^2$ ,  $i \neq j \Rightarrow \langle L_i, L_j \rangle = 0$ .

$$\boxed{(L_0, L_1, \dots, L_N) \text{ est une famille orthogonale de } E.}$$

*Remarque* Ce qui n'est pas un scoop car  $L_0, L_1, \dots, L_N$  sont des vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.

**22.** Soit  $P$  un élément de  $E_N$ .  $P$  est une fonction polynomiale de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $N$ .

$P''$  (resp.  $P'$ ) est une fonction polynomiale de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $N-2$  (resp.  $N-1$ ).

Alors  $x \rightarrow x P''(x)$  (resp.  $x \rightarrow (x-1) P'(x)$ ) est une fonction polynomiale de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de degré inférieur ou égal à  $N-1$  (resp.  $N$ ).



Alors les deux fonctions  $x \rightarrow x P''(x)$  et  $x \rightarrow (x - 1) P'(x)$  appartiennent à  $E_N$ . Leur différence également.

Ainsi  $T(P)$  appartient à  $E$ .

$$\boxed{\forall P \in E_N, T(P) \in E_N.}$$

**23.** D'après **Q8**, pour tout  $i$  dans  $\llbracket 0, N \rrbracket$ ,  $L_i$  est une fonction polynomiale de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de degré  $i$ .

Donc pour tout  $i$  dans  $\llbracket 0, N \rrbracket$ ,  $L_i$  est un élément de  $E_N$ .

$(L_0, L_1, \dots, L_N)$  est une famille orthogonale d'éléments **non nuls** de  $E_N$ . C'est donc une famille libre de cardinal  $N + 1$  de  $E_N$  qui est de dimension  $N + 1$ . Alors c'est une base de  $E_N$ .

$$\boxed{(L_0, L_1, \dots, L_N) \text{ est une base de } E_N.}$$

**24.**  $\forall i \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ,  $T(L_i) = -i L_i$ . Donc

$$\boxed{\text{la matrice de } T_N \text{ dans la base } (L_0, L_1, \dots, L_N) \text{ est la matrice diagonale } \text{Diag}(0, -1, -2, \dots, -N) \text{ de } \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}).}$$

$$M_{(L_0, L_1, \dots, L_N)}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -N \end{pmatrix}.$$

**25.** Restons poli ! Oui  $T_N$  est diagonalisable car  $(L_0, L_1, \dots, L_N)$  est une base de  $E_N$  constituée de vecteurs propres de  $T_N$  !!!

$$\boxed{T_N \text{ est diagonalisable.}}$$

0 est valeur propre de  $T_N$  donc  $T_N$  n'est pas injectif et encore moins bijectif !

$$\boxed{T_N \text{ n'est pas bijectif.}}$$

### Partie IV : Nature d'une série de maximums

**26.** Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$ .  $g_n$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $g'_n(x) = \frac{1}{n!} (n x^{n-1} e^{-x} + x^n (-e^{-x}))$ .

$$\forall x \in [0, +\infty[, g'_n(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1} e^{-x} (n - x).$$

$g_n$  est continue sur  $[0, +\infty[$ ,  $\forall x \in ]0, n[$ ,  $g'_n(x) > 0$  et  $\forall x \in ]n, +\infty[$ ,  $g'_n(x) < 0$ .

Ceci suffit pour dire que  $g_n$  est strictement croissante sur  $[0, n]$  et strictement décroissante sur  $[n, +\infty[$ .

Donc  $\forall x \in [0, n[$ ,  $g_n(x) < g_n(n)$  et  $\forall x \in ]n, +\infty[$ ,  $g_n(n) > g_n(x)$  et ainsi  $\forall x \in [0, n[ \cup ]n, +\infty[$ ,  $g_n(x) < g_n(n)$ .

Dans ces conditions,  $g_n$  admet un maximum sur  $[0, +\infty[$  atteint en le seul point  $n$ .

$g_n$  admet un maximum  $M_n$  sur  $[0, +\infty[$  atteint en le seul point  $n$ .  $M_n = g_n(n) = \frac{n^n e^{-n}}{n!}$ .

**27.** Soit  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

$$a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n = \ln(\sqrt{n+1} M_{n+1}) - \ln(\sqrt{n} M_n) = \ln \left( \frac{\sqrt{n+1} M_{n+1}}{\sqrt{n} M_n} \right) = \ln \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{M_{n+1}}{M_n} \right).$$

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = M_{n+1} \frac{1}{M_n} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n e^{-n}} = \frac{(n+1)^n e^{-(n+1)}}{n^n} \frac{(n+1)n!}{(n+1)!} = \left( \frac{n+1}{n} \right)^n e^{-1}. \text{ Alors :}$$

$$a_n = \ln \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{M_{n+1}}{M_n} \right) = \ln \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n e^{-1} \right) = \ln \left( \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1} \right).$$

$$a_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{n+1}{n} - 1 = n \left[ \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right].$$

$$1 + \frac{1}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \text{ et } \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \text{ Par produit :}$$

$$\left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

$$\left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right). \text{ Alors :}$$

$$a_n = n \left[ \left( 1 + \frac{1}{2n} \right) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n} \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

**28.** Il résulte de **Q27** que  $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$ . De plus la série de terme général  $\frac{1}{12n^2}$  est convergente et à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que :

la série de terme général  $a_n$  converge.

**29.** Posons  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ .

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \ln \mu_n - \ln \mu_1 = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln \mu_{k+1} - \ln \mu_k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k. \quad \forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \ln \mu_n = \ln \mu_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \mu_n = \ln \mu_1 + S$  et ainsi la suite  $(\ln \mu_n)_{n \geq 1}$  est convergente. Notons  $\ell$  sa limite.

Par continuité de la fonction exponentielle en  $\ell$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\ln \mu_n} = e^\ell$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = e^\ell$ . Ainsi :

la suite  $(\mu_n)_{n \geq 1}$  converge et sa limite est strictement positive.

**30.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n = e^\ell$  et  $e^\ell \neq 0$  donc  $\mu_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\ell$ . Ce qui donne  $\sqrt{n} M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^\ell$ . Ainsi  $M_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^\ell}{\sqrt{n}} = \frac{e^\ell}{n^{\frac{1}{2}}}$ .

De plus la série de terme général  $\frac{e^\ell}{n^{\frac{1}{2}}}$  est divergente, car  $\frac{1}{2} \leq 1$ , et à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que :

la série de terme général  $M_n$  diverge.

## Partie V : Étude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

**31.** Posons  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $p_1(x, y) = x$ ,  $p_2(x, y) = y$  et  $p_3(x, y) = x + y$ .  $F = f \circ p_1 + f \circ p_2 - f \circ p_3$ .

1.  $p_1, p_2, p_3$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  car ce sont des fonctions polynômes.
2.  $\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2$ ,  $p_1(x, y) \in ]0, +\infty[$ ,  $p_2(x, y) \in ]0, +\infty[$  et  $p_3(x, y) \in ]0, +\infty[$ .
3.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$ .

Alors par composition  $f \circ p_1$ ,  $f \circ p_2$  et  $f \circ p_3$  sont de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[^2$ .

Donc  $F$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[^2$  comme combinaison linéaire de trois fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[^2$ .

$F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[^2$ .

Soit  $(x, y) \in ]0, +\infty[^2$ .  $\frac{\partial(f \circ p_1)}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial p_1}{\partial x}(x, y) f'(p_1(x, y)) = 1 \times f'(x) = f'(x)$ .

$\frac{\partial(f \circ p_2)}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial p_2}{\partial x}(x, y) f'(p_2(x, y)) = 0 \times f'(y) = 0$ .

$\frac{\partial(f \circ p_3)}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial p_3}{\partial x}(x, y) f'(p_3(x, y)) = 1 \times f'(x + y) = f'(x + y)$ .

Alors  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x) + 0 - f'(x + y) = f'(x) - f'(x + y)$ . De même  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f'(y) - f'(x + y)$ .

$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x) - f'(x + y)$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f'(y) - f'(x + y)$ .

$\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $f(t) = t e^{-t}$  donc  $\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(t) = e^{-t} + t(-e^{-t}) = (1 - t)e^{-t}$ . Alors :

$\forall (x, y) \in ]0, +\infty[^2$ ,  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = (1 - x)e^{-x} - (1 - x - y)e^{-x-y}$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = (1 - y)e^{-y} - (1 - x - y)e^{-x-y}$ .

*Remarque* On obtient sans difficulté, pour tout élément  $(x, y)$  de  $]0, +\infty[^2$  :

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f''(x) - f''(x + y)$ ,  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = f''(y) - f''(x + y)$  et  $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = -f''(x + y)$ .

**32.** Rappelons que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[$ .

$\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $f(t) = t e^{-t}$ ,  $\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(t) = (1 - t)e^{-t}$  et  $\forall t \in ]0, +\infty[$ ,  $f''(t) = -e^{-t} + (1 - t)(-e^{-t}) = (t - 2)e^{-t}$ .

$f'$  est continue sur  $]2, +\infty[$  et  $f''$  est strictement positive sur  $]2, +\infty[$ . Cela suffit pour dire que  $f'$  est continue et strictement croissante sur  $]2, +\infty[$ .

Comme  $f'(2) = -e^{-2}$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = 0$  (par croissance comparée),  $f'$  définit une bijection de  $]2, +\infty[$  sur  $[-e^{-2}, 0[$ .

$f'$  est continue sur  $]0, 2[$  et  $f''$  est strictement négative sur  $]0, 2[$ .  $f'$  est continue et strictement décroissante sur  $]0, 2[$ .

Comme  $\lim_{t \rightarrow 2^-} f'(t) = -e^{-2}$  et  $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = 1$ ,  $f'$  définit une bijection de  $]0, 2[$  sur  $] -e^{-2}, 1[$ .

Alors si  $\lambda$  est un réel, l'équation  $f'(t) = \lambda$  admet au plus une solution dans  $]0, 2[$  et au plus une solution dans  $[2, +\infty[$  donc au plus deux solutions dans  $]0, +\infty[$ .

Soit  $a$  dans  $]0, +\infty[$ . L'équation  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f(x) = f(a)$  admet  $a$  comme solution et admet au plus deux solutions.

Elle admet donc au plus une solution distincte de  $a$ .

Pour tout élément  $a$  de  $]0, +\infty[$ , l'équation  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f'(x) = f'(a)$  admet au plus une solution distincte de  $a$ .

*Exercice*  $\lambda$  est un réel. Trouver le nombre de solutions de l'équation  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f'(x) = \lambda$ .

En déduire, pour tout élément  $a$  de  $]0, +\infty[$ , le nombre de solutions de l'équation  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f'(x) = f'(a)$ .

**33.** Soit  $(x, y)$  un élément de  $]0, +\infty[^2$ .

• Supposons que  $(x, y)$  est un point critique de  $F$ . Alors  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$ .

Donc  $f'(x) - f'(x+y) = f'(y) - f'(x+y) = 0$ .  $f'(x+y) = f'(x)$  et  $f'(y) = f'(x+y) = f'(x)$ .

Donc  $y$  et  $x+y$  sont deux solutions distinctes de l'équation  $t \in ]0, +\infty[$  et  $f'(t) = f'(x)$ . Alors d'après **Q32** l'une d'entre elle est  $x$ .

Ainsi  $x+y = x$  ou  $x = y$ . Notons que  $x+y = x$  donne  $y = 0$  ce qui n'est pas donc  $x = y$ .

Alors  $f'(2x) = f'(x+y) = f'(x)$ . Finalement  $y = x$  et  $f'(2x) = f'(x)$ .

Réciproquement supposons que  $y = x$  et  $f'(2x) = f'(x)$ .

$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x) - f'(x+y) = f'(x) - f'(2x) = 0$  et  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f'(y) - f'(x+y) = f'(x) - f'(2x) = 0$ .

$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 0$ . Ainsi  $(x, y)$  est un point critique de  $F$ .

Pour tout élément  $(x, y)$  de  $]0, +\infty[^2$ ,  $(x, y)$  est un point critique de  $F$  si et seulement si  $x = y$  et  $f'(x) = f'(2x)$ .

**34.** Soit  $x$  un réel strictement positif.

$f'(x) = f'(2x) \iff e^{-x}(1-x) = e^{-2x}(1-2x) \iff e^x(1-x) = 1-2x \iff e^x(1-x) - 1 + 2x = 0$ .

Posons  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\ell(x) = e^x(1-x) - 1 + 2x$ .  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = f'(2x) \iff \ell(x) = 0$ .

Montrons alors que  $\ell$  s'annule une fois et une seule sur  $]0, +\infty[$ .

$\ell$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\ell'(x) = e^x(1-x) + e^x(-1) + 2 = 2 - xe^x$ .

$\ell'$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\ell''(x) = -e^x - xe^x = -(x+1)e^x$ .  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\ell''(x) < 0$ .

Alors  $\ell'$  est continue et strictement décroissante sur  $]0, +\infty[$ .

De plus  $\lim_{x \rightarrow 0} \ell'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2 - xe^x) = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ell'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - xe^x) = -\infty$ .

Alors  $\ell'$  définit une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $] -\infty, 2[$ .  $0$  appartient à  $] -\infty, 2[$  donc il existe un unique élément  $\beta$  dans  $]0, +\infty[$  tel que  $\ell'(\beta) = 0$ .

La stricte décroissance de  $\ell'$  sur  $]0, +\infty[$  permet de dire que  $\forall x \in ]0, \beta[$ ,  $\ell'(x) > 0$  et  $\forall x \in ]\beta, +\infty[$ ,  $\ell'(x) < 0$ .

$\ell'(1) = 2 - e$  donc  $\ell'(1) < 0$ . Alors  $1 \in ]\beta, +\infty[$  et ainsi  $\beta < 1$ .

- $\ell$  est strictement croissante sur  $]0, \beta[$  et strictement décroissante sur  $[\beta, +\infty[$ .

- $\ell$  est continue sur  $]0, \beta[$  et sur  $[\beta, +\infty[$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ell(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \beta^-} \ell(x) = \ell(\beta)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ell(x) = -\infty$ .

Alors  $\ell$  définit une bijection de  $]0, \beta[$  sur  $]0, \ell(\beta)[$  et de  $[\beta, +\infty[$  sur  $] -\infty, \ell(\beta)[$ . Notons que  $\ell(\beta) > 0$ . Alors :

1.  $\forall x \in ]0, \beta[$ ,  $\ell(x) > 0$ . L'équation  $x \in ]0, \beta[$  et  $\ell(x) = 0$  n'a pas de solution.
2.  $0 \in ] -\infty, \ell(\beta)[$  donc L'équation  $x \in [\beta, +\infty[$  et  $\ell(x) = 0$  a une solution et une seule que nous noterons  $\alpha$ .

Finalement l'équation  $x \in ]0, +\infty[$  et  $\ell(x) = 0$  admet une solution et une seule  $\alpha$ .

Donc l'équation  $x \in ]0, +\infty[$  et  $f'(x) = f'(2x)$  admet une solution et une seule  $\alpha$ .

Ainsi, d'après **Q23**  $F$  admet un point critique et un seul  $(\alpha, \alpha)$ .

$\ell$  est strictement décroissante sur  $[\beta, +\infty[$ . Rappelons aussi que  $\beta < 1$ .

Alors comme  $\ell(1) = 1$ ,  $\ell(\alpha) = 0$  et  $\ell(2) = 3 - e^2 < 0 : 1 < \alpha < 2$ .

$F$  admet un point critique et un seul que nous noterons  $(\alpha, \alpha)$ . De plus  $1 < \alpha < 2$ .

**35.**  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $f''(x) = (x - 2)e^{-x}$ .

$f''(\alpha) = (\alpha - 2)e^{-\alpha} < 0$  car  $\alpha < 2$  et  $f''(2\alpha) = (2\alpha - 2)e^{-2\alpha} = 2(\alpha - 1)e^{-2\alpha} > 0$  car  $\alpha > 1$ .

$f''(\alpha) < 0$  et  $f''(2\alpha) > 0$ .

**36.** •  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $]0, +\infty[^2$ . Ainsi si  $F$  admet un extremum local en un point de  $]0, +\infty[^2$ , ce point est un point critique de  $F$ .

Or  $(\alpha, \alpha)$  est l'unique point critique de  $F$  sur  $]0, +\infty[^2$ , donc  $F$  admet au plus un extremum local sur  $]0, +\infty[^2$  et si  $F$  admet un extremum local sur  $]0, +\infty[^2$  il est atteint en  $(\alpha, \alpha)$ .

- Regardons alors si  $F$  admet un extremum local en  $(\alpha, \alpha)$

Nous avons déjà dit que  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, +\infty[^2$  et que pour tout élément  $(x, y)$  de  $]0, +\infty[^2$  :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f''(x) - f''(x + y), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = f''(y) - f''(x + y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = -f''(x + y).$$

$$\text{Posons } r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\alpha, \alpha), \quad s = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(\alpha, \alpha) \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\alpha, \alpha).$$

$$r = f''(\alpha) - f''(2\alpha), \quad s = -f''(2\alpha), \quad t = f''(\alpha) - f''(2\alpha).$$

$$rt - s^2 = \left(f''(\alpha) - f''(2\alpha)\right)^2 - \left(-f''(2\alpha)\right)^2 = \left(f''(\alpha)\right)^2 - 2f''(\alpha)f''(2\alpha) + \left(f''(2\alpha)\right)^2 - \left(f''(2\alpha)\right)^2.$$

$$rt - s^2 = f''(\alpha) \left(f''(\alpha) - 2f''(2\alpha)\right).$$

Rappelons que  $f''(\alpha) < 0$  et  $f''(2\alpha) > 0$ . Alors  $f''(\alpha) < 0$  et  $f''(\alpha) - 2f''(2\alpha) < 0$  donc  $rt - s^2 > 0$ .

Ainsi, d'après le cours,  $F$  admet en  $(\alpha, \alpha)$  un extremum local (strict).

$r = f''(\alpha) < 0$  donc il s'agit d'un maximum local.

Alors les deux points précédents permettent de dire que :

$F$  admet un extremum local et un seul. Cet extremum local est un maximum.