EM LYON 2013

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

PROBLÈME 1

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale

1. Soit x un réel appartenant à $]0,+\infty[$.

• $t \to \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

• $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x+t} \leqslant \dfrac{1}{x}$ et $e^{-t} \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x+t} \leqslant \dfrac{1}{x}\, e^{-t}$.

• Le cours indique que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge car $\Gamma : z \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ a pour domaine de définition $]0,+\infty[$ donc est définie en 1. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\, e^{-t}\right)\mathrm{d}t$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ appartenant à }]0,+\infty[, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Soit x un réel appartenant à $]0,+\infty[$.

• $\forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{e^{-t}}{x+t} \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ car $1 \leqslant +\infty$!

• $\forall t \in [0,1],\ e^{-t} \geqslant e^{-1}$ (car $t \to e^{-t}$ est décroissante sur $[0,1]$) et $\dfrac{1}{x+t} \geqslant 0$.

Donc $\forall t \in [0,1],\ \dfrac{e^{-t}}{x+t} \geqslant \dfrac{e^{-1}}{x+t}$. Comme $0 \leqslant 1$: $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t.}$$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t = e^{-1}\left[\ln|x+t|\right]_0^1 = e^{-1}\big(\ln|x+1| - \ln|x|\big) = e^{-1}\big(\ln(x+1) - \ln x\big)$.

Par conséquent $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant e^{-1}\left(\ln(x+1) - \ln x\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(-\ln(x)\right) = +\infty$ et $e^{-1} > 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{-1}\left(\ln(x+1) - \ln x\right)\right) = +\infty$.

Les deux points précédents permettent alors de dire que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0.}$$

3. Soit x un réel appartenant à $]0,+\infty[$.

Comme nous l'avons vu dans la première question $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 < \dfrac{e^{-t}}{x+t} \leqslant \dfrac{1}{x}\, e^{-t}$.

De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\Gamma(1)$ donc $(1-1)\,!$ ou encore 1.

Alors, comme $0 < +\infty$, $0 < \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\cdot$ Donc $0 < f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 < f(x) \leqslant \frac{1}{x}\cdot}$$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 < f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Il vient alors par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

4. Comme nous l'avons déjà dit $\Gamma : z \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ a pour domaine de définition $]0,+\infty[$ donc est définie en 2. Par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t\, e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Soit x un réel appartenant à $]0,+\infty[$.

$f(x) - \dfrac{1}{x} = f(x) - \dfrac{1}{x} \times 1 = f(x) - \dfrac{1}{x}\,\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(e^{-t}\left[\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}t.$

$f(x) - \dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{-t}\,\frac{x-(x+t)}{(x+t)\,x}\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{-t\,e^{-t}}{x\,(x+t)}\,\mathrm{d}t.$ Donc $\dfrac{1}{x} - f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-t}}{x\,(x+t)}\,\mathrm{d}t.$

$\forall t \in [0,+\infty[,\ x+t \geqslant x$ et $x > 0$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ x\,(x+t) \geqslant x^2 > 0$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x\,(x+t)} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $t\,e^{-t} \geqslant 0$.

Ainsi $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{t\,e^{-t}}{x\,(x+t)} \leqslant \dfrac{1}{x^2}\, t\,e^{-t}$, $0 \leqslant +\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

En intégrant on obtient alors : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-t}}{x\,(x+t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

Donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Alors $\left|f(x) - \dfrac{1}{x}\right| = \left|\dfrac{1}{x} - f(x)\right| = \dfrac{1}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \left|f(x) - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

► *Remarque* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(2) = (2-1)\,! = 1$. *Donc* $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ \left|f(x) - \dfrac{1}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}\cdot}$ ◄

$\forall x \in]0,+\infty[,\ 0 \leqslant |x\,f(x) - 1| = |x| \left|f(x) - \dfrac{1}{x}\right| \leqslant \dfrac{|x|}{x^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{|x|} \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t\right) = 0$, il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \big(x\,f(x)\big) = 1$ ou $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = 1$.

Alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\cdot}$$

Partie II : Une autre expression intégrale de f

► *Remarque Il convient quand même de noter que les arguments utilisés dans cette partie sont totalement inappropriés.*

Le changement de variable $u = x + t$ donne en une ligne le résultat de la question 11. Qui permet, toujours en une ligne, de montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x)$.

Mais pourquoi faire simple lorsque l'on peut faire compliqué ?! ◄

A- Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme intégrale

5. Dans cette question x est un réel strictement positif et h un réel non nul strictement supérieur à $-\dfrac{x}{2}\cdot$

a. $t \to \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$\forall t \in [0,+\infty[, x + t \geqslant x > 0$ donc $\forall t \in [0,+\infty[, (x+t) \geqslant x^2 > 0$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[, 0 \leqslant \dfrac{1}{(x+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $e^{-t} \geqslant 0$.

Par conséquent $\forall t \in [0,+\infty[, 0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}\,e^{-t}$.

Comme nous l'avons déjà vu $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Il en est alors de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2}\,e^{-t}\right)\mathrm{d}t$.

Les deux points précédents et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

b. Soit t un réel de l'intervalle $[0,+\infty[$.

$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\frac{x+t-(x+h+t)}{(x+h+t)\,(x+t)}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|.$

$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| = \left|\frac{1}{h}\,\frac{(-h)}{(x+h+t)\,(x+t)}+\frac{1}{(x+t)^2}\right|.$

$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| = \left|\frac{1}{(x+t)^2}-\frac{1}{(x+h+t)\,(x+t)}\right| = \left|\frac{x+h+t-(x+t)}{(x+h+t)\,(x+t)^2}\right|.$

$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| = \frac{|h|}{\left|(x+h+t)\,(x+t)^2\right|}.$

$x+h+t \geqslant x+h \geqslant x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}>0$ car $h>-\frac{x}{2}$ et $(x+t)^2 \geqslant x^2>0$ (comme nous l'avons déjà vu).

Donc $(x+h+t)\,(x+t)^2 \geqslant \frac{x}{2}\,x^2>0$. Alors $\left|(x+h+t)\,(x+t)^2\right| = (x+h+t)\,(x+t)^2 \geqslant \frac{x^3}{2}>0$.

Par conséquent $\frac{1}{\left|(x+h+t)\,(x+t)^2\right|} \leqslant \frac{2}{x^3}$.

Comme $|h|\geqslant 0$: $\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| = \frac{|h|}{\left|(x+h+t)\,(x+t)^2\right|} \leqslant \frac{2\,|h|}{x^3}$.

$$\boxed{\forall t\in[0,+\infty[,\quad \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{2\,|h|}{x^3}.}$$

c. Posons $\Delta(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et montrons que $|\Delta(h)| \leqslant \frac{2|h|}{x^3}$.

► *Remarque Notons que $\Delta(h)$ a un sens car $x>0$, $x+h>0$ (puisque $h>-\frac{x}{2}$ et $x>0$) et $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.* ◄

$\Delta(h)=\frac{1}{h}\left(\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+h+t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\right)+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$

$\Delta(h)=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$\forall t\in[0,+\infty[,\ ,\left|\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right| = \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|e^{-t}.$

$\forall t\in[0,+\infty[,\ ,0\leqslant\left|\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right| \leqslant \frac{2\,|h|}{x^3}\,e^{-t}.$

Or $\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 donc $\int_0^{+\infty}\frac{2\,|h|}{x^3}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge également et vaut $\frac{2\,|h|}{x^3}$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives permettent alors de dire que $\int_0^{+\infty}\left|\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right|\mathrm{d}t$ converge et est majorée par $\int_0^{+\infty}\frac{2\,|h|}{x^3}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right)\mathrm{d}t$ est absolument convergente (donc convergente).

On peut alors majorer $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\left(\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right)\mathrm{d}t\right|$ par

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right|\mathrm{d}t.$

Donc $\displaystyle\big|\Delta(h)\big|\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{2\,|h|}{x^3}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{2\,|h|}{x^3}.$

Finalement :

$$\boxed{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2\,|h|}{x^3}.}$$

6. Soit x un réel strictement positif.

$\displaystyle\forall h\in\left]-\frac{x}{2},0\right[\cup]0,+\infty[,\ 0\leqslant\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2\,|h|}{x^3}.$

$\displaystyle\forall h\in\left]-\frac{x}{2},0\right[\cup]0,+\infty[,\ 0\leqslant\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\left(-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right)\right|\leqslant\frac{2\,|h|}{x^3}$ et $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{2\,|h|}{x^3}=0.$

Alors par encadrement il vient : $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$

Ainsi f est dérivable en x et $\displaystyle f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.}$$

► *Remarque* *Il est aisé de montrer que f' est strictement négative sur $]0,+\infty[$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Ce que l'on peut aussi obtenir en une ligne en utilisant la définition de la stricte décroissance.* ◄

7. Soit x un réel strictement positif. Soit $(\varepsilon,A)\in]0,1]\times[1,+\infty[$.

Posons $\forall t\in[0,+\infty[,\ u_x(t)=-\dfrac{1}{x+t}$ et $v(t)=e^{-t}$. u_x et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

De plus $\forall t\in[0,+\infty[,\ u_x'(t)=\dfrac{1}{(x+t)^2}$ et $v'(t)=-e^{-t}$.

Ceci autorise l'intégration par parties suivante.

$$\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{x+t}\times e^{-t}\right]_\varepsilon^A-\int_\varepsilon^A\left(-\frac{1}{x+t}\right)\big(-e^{-t}\big)\,\mathrm{d}t=-\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ \forall(\varepsilon,A)\in]0,1]\times[1,+\infty[,\ \int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.}$$

► *Remarque* *Le ε n'était pas franchement utile ici...*

On pouvait directement obtenir $\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall A \in [0,+\infty[\ \displaystyle\int_0^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{1}{x} - \int_0^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ ◀

8. Soit x un réel strictement positif.

- $\forall(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[,\ \displaystyle\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \quad (\bigstar).$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-f'(x)$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $f(x)$.
- $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} = \frac{1}{x}\cdot$
- $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-A}}{x+A} = \lim_{A\to+\infty}\left(e^{-A}\,\frac{1}{x+A}\right) = 0\times 0 = 0.$

En faisant tendre successivement ε vers 0 par valeurs supérieures et A vers $+\infty$ dans $(\bigstar)$ on obtient :

$-f'(x) = \dfrac{1}{x} - f(x)$. Donc $f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x)$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).}$$

9. $x \to -\dfrac{1}{x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc $x \to -\dfrac{1}{x} + f(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Ainsi f' est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Alors f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = -\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + f'(x) = \dfrac{1}{x^2} + f'(x).$

f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc est continue sur $]0,+\infty[$. Comme $x \to \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, par somme f'' est continue sur $]0,+\infty[$. Finalement :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).}$$

B- Intervention d'une fonction auxiliaire g

10. $x \to e^{-x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc, par produit, g est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = -e^{-x}\,f(x) + e^{-x}\,f'(x) = e^{-x}\big(f'(x) - f(x)\big) = e^{-x}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{e^{-x}}{x}\cdot$

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}\cdot}$$

11. Soit x un réel appartenant à $]0,+\infty[$. $u \to \dfrac{e^{-u}}{u}$ est continue sur $[x,+\infty[$.

$\forall A \in [x,+\infty[,\ \displaystyle\int_x^A \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^A \big(-g'(u)\big)\,\mathrm{d}u = \big[-g(u)\big]_x^A = g(x) - g(A).$

Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} g(A) = \lim_{A\to+\infty}\big(e^{-A}\,f(A)\big) = 0\times 0 = 0.$

Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_x^A \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \lim_{A\to+\infty}\big(g(x)-g(A)\big) = g(x) - 0 = g(x)$.

Par conséquent $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $g(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de }]0,+\infty[,\ \int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge et } g(x) = \int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.}$$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = e^{-x} f(x)$ donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = e^x g(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = e^x \int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\ .}$$

12. Nous avons vu dans la question **4** que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\cdot$

Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = g(x) = e^{-x} f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}\,\frac{1}{x} = \frac{e^{-x}}{x}\cdot$

$$\boxed{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}\cdot}$$

13. D'après la question précédente $n^2\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\,\frac{e^{-n}}{n} = n\,e^{-n} = \frac{1}{e}\,n\,\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$.

- $n^2\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e}\,n\,\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{e}\,n\,\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1} \geqslant 0$.
- La série de terme général $n\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$ converge car $\left|\dfrac{1}{e}\right| < 1$ (série géométrique dérivée) donc la série de

terme général $\dfrac{1}{e}\,n\,\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$ converge également.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $n^2\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}\left(n^2\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\right) \text{ converge.}}$$

Partie III : Étude d'une densité

---

14. • Nous avons vu dans la question **3.** que $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) > 0$. Donc $f(1) > 0$.

Alors pour tout élément t de $[0,+\infty[,\ f(1)\,(1+t) > 0$ et $e^{-t} > 0$.

Donc pour tout élément t de $[0,+\infty[$, $\dfrac{e^{-t}}{f(1)\,(1+t)}$ est un réel strictement positif.

Ainsi h est définie et strictement positive sur $[0,+\infty[$. De plus h est nulle sur $]-\infty,0[$.

Alors h est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R},\ h(t)\geqslant 0$.

- $t\to e^{-t}$ et $t\to\dfrac{1}{1+t}$ sont continues sur $[0,+\infty[$, donc $t\to\dfrac{1}{f(1)}\,\dfrac{e^{-t}}{1+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Alors h est continue sur $[0,+\infty[$.

Comme h est nulle sur $]-\infty,0[$, h est continue sur $]-\infty,0[$.

Par conséquent h est au moins continue sur $\mathbb{R}-\{0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

- $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $f(1)$ Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(1)}\,\frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{f(1)}\,f(1)$ donc 1.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Comme h est nulle sur $]-\infty,0[$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{h \text{ est une densité de probabilité.}}$$

15. $t\to t\,h(t)$ est nulle sur $]-\infty,0[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}t\,h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

$\forall t\in[0,+\infty[,\ t\,h(t)=\dfrac{1}{f(1)}\,\dfrac{t\,e^{-t}}{1+t}=\dfrac{1}{f(1)}\,\dfrac{(1+t-1)\,e^{-t}}{1+t}=\dfrac{1}{f(1)}\,e^{-t}-\dfrac{1}{f(1)}\,\dfrac{e^{-t}}{1+t}=\dfrac{1}{f(1)}\,e^{-t}-h(t)$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\Gamma(1)$ donc 1 et $\displaystyle\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}t\,h(t)\,\mathrm{d}t$ converge comme combinaison linéaire de deux intégrales convergentes.

De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty}t\,h(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{f(1)}\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{f(1)}\times 1-1=\frac{1}{f(1)}-1$.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}t\,h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{f(1)}-1$. Par conséquent :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance qui vaut } \frac{1}{f(1)}-1.}$$

PROBLÈME 2

Dans ce qui suit $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Rappelons alors que si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout j dans $[\![1, n]\!]$, $C_j(M) = ME_j$.

Dans les parties I, II, III, IV $< .,. >$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$...

Partie I : Un exemple

1. $\forall j \in [\![1, 4]\!],\ C_j(A_0) = A_0E_j = U_0\,{}^tV_0E_j = {}^tV_0E_j\,U_0$ (car ${}^tV_0E_j$ est assimilable à un réel).

$\forall j \in [\![1, 4]\!],\ C_j(A_0) = A_0E_j =< V_0, E_j > U_0$.

$< V_0, E_1 >= 1$, $< V_0, E_2 >= -1$, $< V_0, E_3 >= 2$ et $< V_0, E_4 >= -1$.

Ainsi $C_1(A_0) = A_0E_1 = U_0$, $C_2(A_0) = A_0E_2 = -U_0$, $C_3(A_0) = A_0E_3 = 2\,U_0$ et $C_4(A_0) = A_0E_4 = -U_0$.

Alors $\text{Vect}\big(C_1(A_0), C_2(A_0), C_3(A_0), C_4(A_0)\big) = \text{Vect}(U_0, -U_0, 2\,U_0, -U_0) = \text{Vect}(U_0)$.

Donc $\text{rg}\,A_0 = \dim\text{Vect}\big(C_1(A_0), C_2(A_0), C_3(A_0), C_4(A_0)\big) = \dim\text{Vect}(U_0) = 1$ (car U_0 n'est pas nul).

Par conséquent $\text{rg}\,A_0 < 4$. Alors la matrice A_0 n'est pas inversible et 0 est valeur propre de A_0.

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A_0.}$$

Remarque $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & -3 \\ 4 & -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

$\dim \text{SEP}\ (A_0, 0) = 4 - \text{rg}\,A_0 = 3$. De plus $A(E_1 + E_2) = AE_1 + AE_2 = U_0 - U_0 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$, $A(E_1 + E_4) = AE_1 + AE_4 = U_0 - U_0 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ et $A(2\,E_1 - E_3) = 2\,AE_1 - AE_3 = 2\,U_0 - 2\,U_0 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\mathcal{B}_1 = (E_1 + E_2, E_1 + E_4, 2\,E_1 - E_3)$ est une famille de trois éléments de SEP $(A_0, 0)$. Montrons que $\mathcal{B}_1$ est une base de SEP $(A_0, 0)$.

Comme SEP $(A_0, 0)$ est de dimension 3 il suffit de montrer que cette famille est libre.

Soient α, β et γ trois réels tels que $\alpha\,(E_1 + E_2) + \beta\,(E_1 + E_4) + \gamma\,(2\,E_1 - E_3) = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$.

$(\alpha+\beta+2\,\gamma)\,E_1+\alpha\,E_2-\gamma\,E_3+\beta\,E_4 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ et (E_1, E_2, E_3, E_4) est libre donc $\alpha+\beta+2\gamma = \alpha = -\gamma = \beta = 0$.

$\alpha = \beta = \gamma = 0$. Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}_1$ est famille libre.

$\mathcal{B}_1$ est une famille libre de SEP $(A_0, 0)$, dont le cardinal coïncide avec la dimension de SEP $(A_0, 0)$. C'est donc une base de SEP $(A_0, 0)$.

$\boxed{\mathcal{B}_1 = (E_1 + E_2, E_1 + E_4, 2\,E_1 - E_3) \text{ ou } \mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base du sous-espace propre de } A_0 \text{ associé à la valeur propre } 0.}$

2. a. $A_0 U_0 = U_0\,{}^tV_0 U_0 = {}^tV_0 U_0\, U_0 =< V_0, U_0 > U_0 = (1 - 2 + 6 - 4)\, U_0 = U_0$

$$\boxed{A_0 U_0 = U_0.}$$

b. $A_0 U_0 = U_0$ et $U_0 \neq 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc 1 est une valeur propre de A_0 et U_0 un vecteur propre associé. Notons que $\dim \text{SEP } (A_0, 1) \geqslant 1$!

Alors $4 \geqslant \displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp}\, A_0} \dim \text{SEP } (A_0, \lambda) \geqslant \dim \text{SEP } (A_0, 0) + \dim \text{SEP } (A_0, 1) = 3 + \dim \text{SEP } (A_0, \lambda) \geqslant 3 + 1 = 4.$

Donc $4 = \displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp}\, A_0} \dim \text{SEP } (A_0, \lambda) = \dim \text{SEP } (A_0, 0) + \dim \text{SEP } (A_0, 1) = 3 + \dim \text{SEP } (A_0, \lambda).$

Ceci montre que :

1. 0 et 1 sont les seules valeurs propres de A_0.
2. $\dim \text{SEP } (A_0, 1) = 1$. Ainsi $\mathcal{B}_2 = (U_0)$ est une base de SEP $(A_0, 1)$.
3. A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

$$\boxed{A_0 \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).}$$

c. $\mathcal{B}_1 = (E_1 + E_2, E_1 + E_4, 2\,E_1 - E_3)$ est une base de SEP $(A_0, 0)$, $\mathcal{B}_2 = (U_0)$ est une base de SEP $(A_0, 1)$ et $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = \text{SEP } (A_0, 0) \oplus \text{SEP } (A_0, 1)$.

Alors $\mathcal{B} =$ "$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$" $= (E_1 + E_2, E_1 + E_4, 2\,E_1 - E_3, U_0)$ est une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_0 respectivement associés aux valeurs propres 0, 0, 0 et 1.

Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

1. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
2. P est inversible car c'est une matrice de passage.
3. $P^{-1} A_0 P$ est la matrice diagonale $D = \text{Diag}\,(0, 0, 0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $D = P A_0 P^{-1}$.

$D = \text{Diag}\,(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

Exercice *Montrer que* $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -8 & 5 \\ 3 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Partie II : Trace d'une matrice carrée

3. Soit λ un réel. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\lambda\, A + B = (\lambda\, a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ donc $\text{Tr}(\lambda\, A + B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \big(\lambda\, a_{i,i} + b_{i,i}\big) = \lambda \sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda\ \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2,\ \text{Tr}(\lambda\, A + B) = \lambda\ \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Tr est une application linéaire de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathbb{R}. \text{ Tr est une forme linéaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

4. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Posons $C = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = AB$ et $D = (d_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = BA$.

$$\text{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k}\, b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i}\, a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} = \text{Tr}(D).$$

$$\boxed{\forall (A,B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2,\ \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).}$$

5. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons ${}^tA = (a'_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et ${}^tAA = (h_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a'_{i,j} = a_{j,i}$ et $h_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a'_{i,k}\, a_{k,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{k,i}\, a_{k,j}$.

$$\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} h_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}\, a_{k,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2.$$

$$\boxed{\text{Si } A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \text{ est une matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \text{Tr}\big({}^tAA\big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2\ .}$$

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. a. U est V sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors U est une matrice ayant n lignes et une colonne à coefficients réels, et ${}^tV$ est une matrice ayant une ligne et n colonnes à coefficients réels.

Alors le produit U^tV a un sens et est une matrice ayant n lignes et n colonnes à coefficients réels. Ainsi :

$$\boxed{U^tV \text{ appartient à } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Posons $U^tV = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Soit (i,j) un couple d'éléments de $[\![1,n]\!]$.

$\alpha_{i,j}$ est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de U qui est la matrice (u_i) de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tV$ qui est la matrice (v_j) de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc $\alpha_{i,j} = u_i\, v_j$.

$$\boxed{U^tV = (u_i\, v_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}.}$$

b. $\operatorname{Tr}\left(U^tV\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (u_i\, v_i)$.

$$\boxed{\operatorname{Tr}\left({}^tU^tV\right) = \sum_{i=1}^{n} (u_i\, v_i).}$$

c. $\forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j(U^tV) = U^tVE_j = ({}^tVE_j)\,U =< V, E_j >\ U = v_j\, U$.

Alors $\operatorname{Vect}\big(C_1(U^tV), C_2(U^tV)\dots, C_n(U^tV)\big) = \operatorname{Vect}(v_1\,U, v_2\,U, \dots, v_n\,U) \subset \operatorname{Vect}(U)$.

V n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc il existe un élément j_0 de $[\![1,n]\!]$ tel que $v_{j_0} \neq 0$.

Alors $C_{j_0}(U^tV) = v_{j_0}\, U$ donne $U = \dfrac{1}{v_{j_0}}\, C_{j_0}(U^tV)$ donc $U \in \operatorname{Vect}\big(C_1(U^tV), C_2(U^tV)\dots, C_n(U^tV)\big)$.

Ainsi $\operatorname{Vect}(U) \subset \operatorname{Vect}\big(C_1(U^tV), C_2(U^tV)\dots, C_n(U^tV)\big)$.

Finalement $\operatorname{Vect}\big(C_1(U^tV), C_2(U^tV)\dots, C_n(U^tV)\big) = \operatorname{Vect}(U)$.

Alors $\operatorname{rg}\left(U^tV\right) = \dim \operatorname{Vect}\big(C_1(U^tV), C_2(U^tV)\dots, C_n(U^tV)\big) = \dim \operatorname{Vect}(U) = 1$ car $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$$\boxed{\text{Le rang de } U^tV \text{ est } 1.}$$

7. a. $\operatorname{rg} A = 1$ donc $\dim \operatorname{Vect}\big(C_1(U^tV), C_2(U^tV)\dots, C_n(U^tV)\big) = 1$.

Nécessairement il existe un élément j_0 de $[\![1,n]\!]$ tel que $C_{j_0}(A) \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Ainsi $(C_{j_0}(A))$ est une base de la droite vectorielle $\operatorname{Vect}\big(C_1(U^tV), C_2(U^tV)\dots, C_n(U^tV)\big)$.

Alors pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$, il existe un réel α_j tel que $C_j(A) = \alpha_j\, C_{j_0}(A)$.

Il existe un élément j_0 de $[\![1,n]\!]$ tel que, pour tout élément j de $[\![1,n]\!]$, il existe un réel α_j vérifiant : $C_j(A) = \alpha_j\, C_{j_0}(A)$.

b. Posons $U = C_{j_0}(A)$ et considérons la matrice V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ égale à $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ou à $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Si $U = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ ou si $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 : \forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j(A) = \alpha_j\, C_{j_0}(A) = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$; alors $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\mathrm{rg}\, A = 0$! !

Par conséquent $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ donc $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $V \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j(U^tV) = U^tVE_j =< V, E_j > U = \alpha_j\, U = \alpha_j\, C_{j_0}(A) = C_j(A)$.

$\forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j(U^tV) = C_j(A)$ donc $U^tV = A$.

$$\boxed{\text{Il existe deux matrices colonnes non nulles } U \text{ et } V \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telles que } A = U^tV.}$$

8. Les résultats des deux questions précédentes montrent que :

$\boxed{\text{une matrice } A \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices non nulles } U \text{ et } V \text{ de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ telles que } A = U^tV.}$

Partie IV : Une application en probabilités

---

9. $U_X = \big(P(X = i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $U_Y = \big(P(Y = i)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Alors d'après **Q6 a**, $U_X{}^tU_Y = \big(P(X = i)\, P(Y = j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Or X et Y sont indépendantes donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ P(X = i)\, P(Y = j) = P(\{X = i\} \cap \{Y = j\}) = m_{i,j}$. Donc :

$$\boxed{U_X{}^tU_Y = M.}$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = i) = 1$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(Y = j) = 1$ donc il existe deux éléments i_1 et j_1 de $[\![1,n]\!]$ tels que $P(X = i_1) \neq 0$ et $P(Y = j_1) \neq 0$.

Alors U_X et U_Y sont des matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $M = U_X{}^tU_Y$. **Q6** montre que :

$$\boxed{M \text{ est de rang 1.}}$$

10. a. Posons $C_1(M) + C_2(M) + \cdots + C_n(M) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = (\gamma_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \gamma_i = m_{i,1} + m_{i,2} + \cdots + m_{i,n} = \sum_{j=1}^{n} P\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big) = P(X=i)$ car $\big(\{Y=j\}\big)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements. Alors

$$\boxed{C_1(M) + C_2(M) + \cdots + C_n(M) = U_X.}$$

b. M est une matrice de rang 1 donc Vect $\big(C_1(M), C_2(M), \ldots, C_n(M)\big)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension 1 qui contient $C_1(M) + C_2(M) + \cdots + C_n(M)$ donc U_X.

Comme nous l'avons vu plus haut U_X n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc (U_X) est une base de Vect $\big(C_1(M), C_2(M), \ldots, C_n(M)\big)$. Alors :

$$\boxed{\text{pour tout élément } j \text{ de } [\![1,n]\!], \text{ il existe un réel } \beta_j \text{ tel que } C_j(M) = \beta_j\, U_X.}$$

c. $\forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j(M) = \beta_j\, U_X$. Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ P\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big) = m_{i,j} = \beta_j\, P(X=i)$.

Or $\big(\{X=i\}\big)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements donc :

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ P(Y=j) = \sum_{i=1}^{n} P\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(\beta_j\, P(X=i)\big) = \beta_j \sum_{i=1}^{n} P(X=i) = \beta_j \times 1 = \beta_j.$$

$$\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ P(Y=j) = \beta_j.}$$

d. Nous avons vu plus haut que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ P\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big) = m_{i,j} = \beta_j\, P(X=i)$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ P\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big) = P(Y=j)\, P(X=i) = P(X=i)\, P(Y=j)$. Ainsi :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

Finalement :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes si et seulement si la matrice } \Big(P\big(\{X=i\}\cap\{Y=j\}\big)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de rang 1.}}$$

Partie V : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisable

---

11. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\operatorname{rg} A = 1 < n$ (car $n \geqslant 2$). Donc A n'est pas inversible et ainsi :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } A.}$$

$\dim \mathrm{SEP}\ (A, 0) = n - \operatorname{rg}(A - 0.I_n) = n - \operatorname{rg} A = n - 1.$

$$\boxed{\text{Le sous-espace propre de } A \text{ associé à la valeur propre 0 est de dimension } n-1.}$$

12. Posons $U = (u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $V = (v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.

Comme nous l'avons déja vu : $A = U\,{}^tV = (u_i\, v_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Donc $a = \mathrm{Tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (u_i\, v_i)$.

De plus ${}^tUV = (u_1\, u_2\, \ldots\, u_n) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Mieux ${}^tUV = (c)$ avec $c = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (u_i\, v_i)$.

Alors ${}^tUV = (a)$.

$$\boxed{{}^tUV = (a) \text{ avec } a = \mathrm{Tr}(A).}$$

$A^2 = \big(U\,{}^tV\big)\big(U\,{}^tV\big) = U\big({}^tVU\big){}^tV = \big({}^tVU\big)\,U\,{}^tV$ car ${}^tVU$ est une matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ assimilable à un réel.

Donc $A^2 = (a)\,A = a\,A$.

$$\boxed{A^2 = a\,A.}$$

13. Supposons que a est nul. Alors $A^2 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. X^2 est alors un polynôme annulateur de A dont la seule racine est 0. Ainsi $\mathrm{Sp}\,A \subset \{0\}$. Comme 0 est valeur propre de A, $\mathrm{Sp}\,A = \{0\}$.

Mais le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0 est de dimension $n-1$ donc A n'est pas diagonalisable puisque $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}\,A} \dim \mathrm{SEP}\ (A,\lambda) \neq n$.

$$\boxed{\text{Si } a = 0,\ A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

14. $AU = \big(U\,{}^tV\big)U = U\big({}^tVU\big) = \big({}^tVU\big)\,U = a\,U$.

$$\boxed{AU = a\,U.}$$

$U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $AU = a\,U$ donc a est valeur propre de A. Ainsi $\{0,a\} \subset \mathrm{Sp}\,A$.

$A^2 = a\,A$ donc $X^2 - a\,X$ est un polynôme annulateur de A dont les racines sont 0 et a. Par conséquent $\mathrm{Sp}\,A \subset \{0,a\}$.

Finalement $\mathrm{Sp}\,A = \{0,a\}$ et $a \neq 0$.

Rappelons que la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est inférieure ou égale à n et que la dimension de SEP (A,a) est supérieure ou égale à 1.

Alors $n \geqslant \dim \mathrm{SEP}\ (A,0) + \dim \mathrm{SEP}\ (A,a) = n - 1 + \dim \mathrm{SEP}\ (A,a) \geqslant n - 1 + 1 = n$.

Donc $n = \dim \mathrm{SEP}\ (A,0) + \dim \mathrm{SEP}\ (A,a)$. A est diagonalisable.

$$\boxed{\text{Si } a \text{ n'est pas nul, } A \text{ est diagonalisable.}}$$

15. Les deux questions précédentes permettent de dire que :

$$\boxed{\text{une matrice de rang 1 de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est diagonalisable si et seulement si sa trace n'est pas nulle.}}$$

Exercice *A est une matrice de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geqslant 2$).*

Q1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si elle admet une valeur propre non nulle.

Q2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^2 n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie VI : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

---

16. • $< .,. >$ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit λ un réel et soit (M, N, P) un triplet d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$< M, \lambda N + P >= \operatorname{Tr}\left({}^tM(\lambda N + P)\right) = \operatorname{Tr}\left(\lambda\, {}^tMN + {}^tMP\right) = \lambda \operatorname{Tr}({}^tMN) + \operatorname{Tr}({}^tMP)$ car Tr est linéaire.

Donc $< M, \lambda N + P >= \lambda < M, N > + < M, P >$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (M, N, P) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^3 < M, \lambda N + P >= \lambda < M, N > + < M, P >$.

• Soit (M, N) un couple d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

${}^tMN$ et sa transposée ont les mêmes éléments diagonaux donc ont même trace.

Alors $< M, N >= \operatorname{Tr}({}^tMN) = \operatorname{Tr}\left({}^t({}^tMN)\right) = \operatorname{Tr}({}^tN\,{}^t({}^tM)) = \operatorname{Tr}({}^tNM) =< N, M >$.

$\forall (M, N) \in \left(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\right)^2,\ < M, N >=< N, M >$.

• Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

D'après **Q5**, $< M, M >= \operatorname{Tr}({}^tMM) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{j,i}^2$ donc $< M, M > \geqslant 0$.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ < M, M > \geqslant 0$.

• Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $< M, M >= 0$. Posons $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Alors $< M, M >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{j,i}^2 = 0$ et $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{j,i}^2 \geqslant 0$. Donc $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{j,i}^2 = 0$.

Ainsi $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ m_{j,i} = 0$ et M est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ < M, M >= 0 \Rightarrow M = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{< .,. > \text{ est un produit scalaire sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

17. Comme nous l'avons vu dans **Q8 a**, S est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

De plus ${}^tS = {}^t\big(V\,{}^tV\big) = {}^t\big({}^tV\big)\,{}^tV = V\,{}^tV = S$ donc S est symétrique.

$S^2 = \big(V\,{}^tV\big)\big(V\,{}^tV\big) = V\big({}^tVV\big)\,{}^tV$. Or ${}^tVV = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j^2 = 1$, donc $S^2 = V\,{}^tV = S$.

$$\boxed{S \text{ est une matrice symétrique de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } S^2 = S.}$$

18. a. • Pour tout élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, SM est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi Φ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soit λ un réel et soit (M,N) un couple d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\Phi(\lambda\, M + N) = S(\lambda\, M + N) = \lambda\, SM + SN = \lambda\,\Phi(M) + \Phi(N)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (M,N) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2,\ \Phi(\lambda\, M + N) = \lambda\,\Phi(M) + \Phi(N)$. Φ est linéaire.

Ainsi Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit (M,N) un couple d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$< \Phi(M), N >= \mathrm{Tr}\,\big({}^t\Phi(M)N\big) = \mathrm{Tr}\,\big({}^t(SM)N\big) = \mathrm{Tr}\,\big({}^tM\,{}^tSN\big)$.

Or S est symétrique donc $< \Phi(M), N >= \mathrm{Tr}\,\big({}^tMSN\big) =< M, SN >=< M, \Phi(N) >$.

$\forall (M,N) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big),\ < \Phi(M), N >=< M, \Phi(N) >$. Φ est symétrique.

$$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

b. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \Phi^2(M) = \Phi\big(\Phi(M)\big) = \Phi(SM) = S(SM) = S^2M = SM = \Phi(M)$. Ainsi :

$$\boxed{\Phi^2 = \Phi.}$$

Remarque Notons que Φ *est une projection de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Mieux c'est la projection sur* $\mathrm{Ker}(\Phi - e)$ *ou sur* $\mathrm{Im}\,\Phi$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}\,\Phi$.

$X^2 - X$ est un polynôme annulateur de Φ dont les racines sont 0 et 1, donc :

$$\boxed{\text{les valeurs propres de } \Phi \text{ sont contenues dans } \{0,1\}.}$$

• $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j^2 = 1$ donc V n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors $S = V\,{}^tV$ est une matrice de rang 1 d'après **Q8**. Ainsi S n'est pas la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\Phi(S) = SS = S^2 = S$.

Alors 1 est valeur propre de Φ et S est un vecteur propre associé.

• Soit D la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendrée par V. $\dim D^\perp = n - \dim D = n - 1 > 0$.

Donc $D^\perp$ contient une matrice U différente de $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Posons $M_0 = U\,{}^tU$. Toujours d'aprè **Q6**, M_0 est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 donc M_0 est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\Phi(M_0) = SM_0 = V\,{}^tVU\,{}^tU$. Or ${}^tVU =< V, U >= 0$ donc $\Phi(M_0) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $M_0 \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors 0 est valeur propre de Φ et M_0 est un vecteur propre associé.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \Phi \text{ sont 0 et 1.}}$

16. Φ est une projection de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Ker}(\Phi - e)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Φ est symétrique donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Or $\operatorname{Ker}\Phi = \text{SEP }(\Phi, 0)$ et $\operatorname{Ker}(\Phi - e) = \text{SEP }(\Phi, 1)$. Ainsi $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Ker}(\Phi - e)$ sont orthogonaux.

$\boxed{\text{Les sous-espaces vectoriels } \operatorname{Ker}\Phi \text{ et } \operatorname{Ker}(\Phi - e) \text{ sont supplémentaires et orthogonaux.}}$