LYON 2013 S

PARTIE I

PROBLEME 1

Q1 Soit $x \in]0,+\infty[$. Posons $\forall t \in [0,+\infty[$, $\varphi_x(t) = \frac{e^{-t}}{x+t}$.

- φ_x est continue sur $[0,+\infty[$
- $\forall t \in [0,+\infty[$, $0 \leq \varphi_x(t) = \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{1}{x} e^{-t}$
- $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge car $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\,dt$ est définie sur $]0,+\infty[$ donc pour $z=1$. Alors $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-t}\,dt$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,dt$ converge.

Pour tout élément x de $]0,+\infty[$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ converge.

Q2 Soit $x \in]0,+\infty[$. $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

Or $\forall t \in [1,+\infty[$, $\frac{e^{-t}}{x+t} \geq 0$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt \geq 0$ (car $1 \leq +\infty$!).

Alors $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$.

$\forall t \in [0,1]$, $e^{-t} \geq e^{-1}$ et $\frac{1}{x+t} \geq 0$. $\forall t \in [0,1]$, $\frac{e^{-t}}{x+t} \geq \frac{e^{-1}}{x+t}$.

Alors $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt$ car $0 \leq 1$. Donc $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-1}}{x+t}\,dt$.

$\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) \geq e^{-1} \int_0^1 \frac{dt}{x+t} = e^{-1}\left[\ln|x+t|\right]_0^1 = e^{-1}\left[\ln|x+1| - \ln|x|\right] = e^{-1}\left[\ln(x+1) - \ln x\right]$

De plus $\lim_{x \to 0^+} \left(e^{-1}\left[\ln(x+1) - \ln x\right]\right) = +\infty$ car $e^{-1} > 0$, $\lim_{x \to 0^+} \ln(x+1) = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Alors $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Q3 Soit $x \in]0,+\infty[$.

Comme nous l'avons vu dans Q1 : $\forall t \in [0,+\infty[$, $\frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{1}{x} e^{-t}$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et vaut $\Gamma(1)$ donc 1.

Alors $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{x} \times 1 = \frac{1}{x}$; $f(x) \leq \frac{1}{x}$.

De plus $\forall t \in [0,+\infty[$, $\frac{e^{-t}}{x+t} > 0$ donc $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt > 0$.

Ainsi $\forall x \in]0,+\infty[$, $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$.

Comme $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, il vient par encadrement $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Q4 Hum, "mater" ?! C'est du cours !! $\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ existe et vaut 1 !!

$\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge et vaut 1.

Remarque : Pour mater il suffit de dire que $t e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$...

Soit $x \in]0,+\infty[$. $f(x) - \frac{1}{x} = f(x) - \frac{1}{x} \times 1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left[\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x}\right] dt$.

$f(x) - \frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-t} \times \frac{x-(x+t)}{(x+t)x} dt = \int_0^{+\infty} \frac{(-t e^{-t})}{x(x+t)} dt$; $\frac{1}{x} - f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t}}{x(x+t)} dt$.

$\forall t \in [0,+\infty[$, $x+t \geq x$ et $x > 0$ donc $\forall t \in [0,+\infty[$, $x(x+t) \geq x^2 > 0$.

Alors $\forall t \in [0,+\infty[$, $0 < \frac{1}{x(x+t)} \leq \frac{1}{x^2}$ et $t e^{-t} \geq 0$.

Ainsi $\forall t \in [0,+\infty[$, $0 \leq \frac{t e^{-t}}{x(x+t)} \leq \frac{1}{x^2} t e^{-t}$ et $\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$ converge.

Alors $0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t}}{x(x+t)} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$; $0 \leq \frac{1}{x} - f(x) \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$

Alors $\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{x} - f(x) \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt$.

$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \left|f(x)-\frac{1}{x}\right|\leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt\ \left(=\frac{1}{x^2}\right). \qquad (\Gamma(2)=1)$$

$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\ |xf(x)-1|\underset{x>0}{=}x\left|f(x)-\frac{1}{x}\right|\underset{x>0}{\leq} x\times\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}te^{-t}\,dt=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}te^{-t}\,dt.$$

$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\ 0\leq|xf(x)-1|\leq\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}te^{-t}\,dt \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}te^{-t}\,dt\right)=0.$$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty}(xf(x))=1$. Alors $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x}$.

PARTIE II : Une autre expression intégrale de f.

A. Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

Q5 Dans cette question $(x,h)\in\,]0,+\infty[\times\mathbb{R}^*$ et $h>-\frac{x}{2}$.

a) $\psi_x : t\mapsto \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

$$\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leq\psi_x(t)=\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\leq\frac{e^{-t}}{x^2}=\frac{1}{x^2}e^{-t}.$$

De plus $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt$ converge donc $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{-t}\,dt$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_0^{+\infty}\psi_x(t)\,dt$ converge. Ainsi $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$ converge.

b) Soit $t\in[0,+\infty[$

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|=\frac{1}{|h|}\left|\frac{(x+t)^2-(x+t)(x+h+t)+h(x+h+t)}{(x+t)^2(x+h+t)}\right|$$

$$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|=\frac{1}{|h|}\frac{|(x+t)^2-(x+t)^2-(x+t)h+h(x+t)+h^2|}{(x+t)^2(x+h+t)}=\frac{1}{|h|}\frac{h^2}{(x+t)^2(x+h+t)}.$$

$\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| = \frac{|h|}{(x+t)^2(x+h+t)}$. Rappelons que $x>0$, $h>-\frac{x}{2}$ et $t\geqslant 0$.

Or $x+t\geqslant x>0$ et $(x+h+t)\geqslant \frac{x}{2}>0$ donc $(x+t)^2\geqslant x^2>0$ et $(x+h+t)\geqslant x>0$.

Donc $(x+t)^2(x+h+t)\geqslant \frac{x^3}{2}$. Alors $\frac{1}{(x+t)^2(x+h+t)}\leqslant\frac{2}{x^3}$ et $|h|>0$.

Ainsi $\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|\leqslant\frac{2|h|}{x^3}$.

$$\underline{\underline{\forall t\in[0,+\infty[,\ \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|\leqslant 2\frac{|h|}{x^3}.}}$$

c) Posons $\Delta(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$ et montrons que $|\Delta(h)|\leqslant\frac{2|h|}{x^3}$.

<u>Remarque</u> : $\Delta(h)$ a un sens car $x>0$, $x+h>0$ ($h>-\frac{x}{2}$) et $\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$ converge.

$$\Delta(h)=\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+h+t}dt-\frac{1}{h}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}dt+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}dt$$

$$\Delta(h)=\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}dt$$

de plus $\forall t\in[0,+\infty[$, $0\leqslant\left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right|e^{-t}\leqslant\frac{2|h|}{x^3}e^{-t}$.

donc $\forall t\in[0,+\infty[$, $0\leqslant\left|\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right|\leqslant\frac{2|h|}{x^3}e^{-t}$.

de plus $\int_0^{+\infty}e^{-t}dt$ converge et vaut $\Gamma(1)$ donc 1. Alors $\int_0^{+\infty}\frac{2|h|}{x^3}e^{-t}dt$ converge et vaut $\frac{2|h|}{x^3}$. Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que : $\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}dt$ est absolument convergente. Cela permet alors d'écrire que :

$$|\Delta(h)|\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right|dt\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{2|h|}{x^3}e^{-t}dt=\frac{2|h|}{x^3}.$$

donc $|\Delta(h)| \leq \frac{2|h|}{x^3}$.

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt \right| \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

(Q6) Soit $x \in]0,+\infty[$.

$\forall h \in]-\frac{x}{2},\frac{x}{2}[-\{0\}$, $0 \leq \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \left(-\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt\right)\right| \leq \frac{2|h|}{x^3}$ et $\lim_{h\to 0} \frac{2|h|}{x^3} = 0$.

voisinage pointé de 0

Alors par encadrement $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$

Ainsi f est dérivable en x et $f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$ et ceci pour tout x dans $]0,+\infty[$.

Remarque. - Clairement $\forall x \in]0,+\infty[$, $f'(x) < 0$. f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Ceci peut aussi s'obtenir en deux lignes en utilisant la définition.

(Q7) Soit $x \in]0,+\infty[$. Soit $(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$.

Posons $\forall t \in [0,+\infty[$, $u_x(t) = -\frac{1}{(x+t)}$ et $v(t) = e^{-t}$.

u_x et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $\forall t \in [0,+\infty[$, $u_x'(t) = \frac{1}{(x+t)^2}$ et $v'(t) = -e^{-t}$.

ceci autorise l'intégration par parties suivantes.

$$\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt = \left[-\frac{1}{x+t} \times e^{-t}\right]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A \left(-\frac{1}{x+t}\right)(-e^{-t})\,dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.$$

$\forall x \in]0,+\infty[$, $\forall (\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[$, $\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$

(Q8) Soit $x \in]0,+\infty[$ $\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{e^{-A}}{x+A}\right) = 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} = \frac{1}{x}$, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,dt$ converge vaut $-f'(x)$

et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ converge et vaut $f(x)$. Alors en faisant tendre ε vers 0^+ puis A vers $+\infty$ dans l'égalité de Q7 il vient $-f'(x) = \frac{1}{x} - f(x)$

Finalement $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x)$.

Q9 Comme $x \mapsto -\frac{1}{x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$, f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x)$.

f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc f' est continue sur $]0,+\infty[$. Comme $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, par somme f'' est continue sur $]0,+\infty[$.

Ainsi 1) f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

2) $\forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x)$.

B Intervention d'une fonction auxiliaire.

Q10 $x \mapsto e^{-x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc par différence g est dérivable sur $]0,+\infty[$. De plus $\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = e^{-x}\left(-\frac{1}{x}\right)$

g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}$.

Q11 Soit $x \in]0,+\infty[$. $u \mapsto \frac{e^{-u}}{u}$ est continue sur $[x,+\infty[$. Soit $A \in [x,+\infty[$.

$$\int_x^A \frac{e^{-u}}{u}\,du = -\int_x^A g'(u)\,du = -(g(A) - g(x)) = g(x) - g(A).$$

De plus $\lim_{A \to +\infty} g(A) = \lim_{A \to +\infty} \left(e^{-A} f(A)\right) = 0 \times 0 = 0$.

Alors $\lim_{A \to +\infty} \int_x^A \frac{e^{-u}}{u}\,du = g(x)$.

Ainsi $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$ converge pour tout x dans $]0,+\infty[$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$. Comme $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = e^x g(x)$:

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

Remarque.. Cela s'obtient en une ligne avec le changement de variable $u = x + t$!!!
On peut également retrouver en une ligne avec cela la dérivabilité de f et f' !!

(Q12) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du = g(x) = e^{-x} f(x) \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} e^{-x} \times \frac{1}{x}$ d'après I Q6

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{x\mapsto+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$

(Q13) d'après Q12 $\displaystyle n^2\int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} n^2 \frac{e^{-n}}{n} = n e^{-n} = n \times \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{e} \times n \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$.

- $\displaystyle n^2\int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du \underset{n\mapsto+\infty}{\sim} \frac{1}{e}\, n\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$;
- $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{e}\, n \left(\frac{1}{e}\right)^{n-1} \geqslant 0$;
- La série de terme général $n\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$ converge car $\left|\frac{1}{e}\right| < 1$ (série géométrique dérivée) donc la série de terme général $\frac{1}{e}\, n\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$ converge également.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $\displaystyle n^2\int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$.

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$ converge.

Partie III Etude d'une densité

(Q14)
- Q3 a montré que $\forall x \in]0,+\infty[$, $f(x) > 0$. Ainsi $f(1) > 0$.
  Alors pour tout $t \in [0,+\infty[$, $f(1)(1+t) > 0$ et $e^{-t} > 0$.
  Donc h est définie et positive sur $[0,+\infty[$. Comme h est nulle sur $]-\infty,0[$:
  h est positive sur $\mathbb{R}$.
- $t \mapsto e^{-t}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sont continues sur $[0,+\infty[$ donc $t \mapsto \frac{1}{f(1)} \frac{e^{-t}}{1+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Alors h est continue sur $[0,+\infty[$.
  De plus h est nulle sur $]-\infty,0[$ donc h est continue sur $]-\infty,0[$. Alors h est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc h est continue sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points

- $\int_{-\infty}^{0} h(t)\,dt$ existe et vaut 0. $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$ existe et vaut $f(1)$. Donc $\int_{0}^{+\infty} h(t)\,dt$ existe et vaut $\frac{1}{f(1)} \times f(1)$ donc 1. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt$ existe et vaut 1.

Ceci achève de montrer que h est une densité de probabilité.

(Q15) $\int_{-\infty}^{0} t h(t)\,dt$ existe et vaut 0.

$\forall t \in [0,+\infty[$, $t h(t) = \frac{1}{f(1)} e^{-t}\left[\frac{t}{1+t}\right] = \frac{1}{f(1)} \cdot e^{-t}\left[1 - \frac{1}{1+t}\right] = \frac{1}{f(1)} e^{-t} - \frac{1}{f(1)} \frac{e^{-t}}{1+t}$.

$\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\,dt$ converge et vaut $\Gamma(1)$. $\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t}\,dt$ converge et vaut $f(1)$. $\Gamma(1) = 1$.

Alors $\int_{0}^{+\infty} t h(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{f(1)} \times 1 - \frac{1}{f(1)} \times f(1)$ donc $\frac{1}{f(1)} - 1$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t h(t)\,dt$ converge et vaut $\frac{1}{f(1)} - 1$.

X admet une espérance qui vaut $\frac{1}{f(1)} - 1$.