PROBLÈME 2

Dans toute cette correction $(E_1, E_2, \dots, E_n)$ est la base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Rappelons que si M est une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(M) = ME_j$

Partie I : Un exemple

Q1 $\forall j \in [\![1,4]\!]$, $A_0 E_j = U_0 \underbrace{{}^tV_0 E_j}_{\in M_1(\mathbb{R})} = ({}^tV_0 E_j) U_0 = \langle V_0, E_j\rangle U_0$. $\underline{\underline{\forall j \in [\![1,4]\!],\ C_j(A_0) = \langle V_0, E_j\rangle U_0}}$

Alors $C_1(A_0) = \langle V_0, E_1\rangle U_0 = U_0$, $C_2(A_0) = \langle V_0, E_2\rangle U_0 = -U_0$, $C_3(A_0) = \langle V_0, E_3\rangle U_0 = 2U_0$ et

$C_4(A_0) = \langle V_0, E_4\rangle U_0 = -U_0$. $\underline{C_1(A_0) = U_0,\ C_2(A_0) = -U_0,\ C_3(A_0) = 2U_0 \text{ et } C_4(A_0) = -U_0}$.

Alors $\operatorname{rg} A_0 = \dim \operatorname{Vect}(C_1(A_0), C_2(A_0), C_3(A_0), C_4(A_0)) = \dim \operatorname{Vect}(U_0, -U_0, 2U_0, -U_0)$.

$\operatorname{rg} A_0 = \dim \operatorname{Vect}(U_0) = 1$ car $U_0 \neq 0_{M_{4,1}(\mathbb{R})}$. $\operatorname{rg} A_0 < 4$ donc A_0 n'est pas inversible.

Ainsi $\underline{\underline{0 \text{ est valeur propre de } A_0}}$. De plus $\underline{\underline{\dim SEP(A_0,0) = 4 - \operatorname{rg} A_0 = 4 - 1 = 3}}$.

$A_0(E_1+E_2) = A_0E_1 + A_0E_2 = C_1(A_0) + C_2(A_0) = U_0 - U_0 = 0_{M_{4,1}(\mathbb{R})}$; $E_1 + E_2 \in SEP(A_0, 0)$.

$A_0(E_1+E_4) = A_0E_1 + A_0E_4 = C_1(A_0) + C_4(A_0) = U_0 - U_0 = 0_{M_{4,1}(\mathbb{R})}$; $E_1 + E_4 \in SEP(A_0, 0)$.

$A_0(2E_1 - E_3) = 2A_0E_1 - A_0E_3 = 2C_1(A_0) - C_3(A_0) = 2U_0 - 2U_0 = 0_{M_{4,1}(\mathbb{R})}$; $2E_1 - E_3 \in SEP(A_0, 0)$.

$\mathcal{B}_1 = (E_1+E_2, E_1+E_4, 2E_1-E_3)$ est une famille de trois éléments de $SEP(A_0,0)$ qui est de dimension 3. Pour montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de $SEP(A_0,0)$ il suffit alors de montrer que cette famille est libre. Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha(E_1+E_2) + \beta(E_1+E_4) + \gamma(2E_1-E_3) = 0_{M_{4,1}(\mathbb{R})}$

$(\alpha+\beta+2\gamma)E_1 + \alpha E_2 - \gamma E_3 + \beta E_4 = 0_{M_{4,1}(\mathbb{R})}$ et (E_1, E_2, E_4) est une famille libre.

Ainsi $\alpha + \beta + 2\gamma = \alpha = -\gamma = \beta = 0$; $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Ainsi $\mathcal{B}_1$ est une famille libre de $SEP(A_0,0)$ dont le cardinal coïncide avec la dimension de $SEP(A_0,0)$. $\mathcal{B}_1$ est donc une base de $SEP(A_0,0)$.

$\underline{\underline{\mathcal{B}_1 = (E_1+E_2, E_1+E_4, 2E_1-E_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } SEP(A_0,0)}}$.

Q2 a) $A_0U_0 = U_0{}^tV_0U_0 = \langle V_0, U_0\rangle U_0 = (1-2+6-4)U_0 = U_0$. $\underline{\underline{A_0U_0 = U_0}}$.

b) $A_0U_0 = U_0$ et $U_0 \neq 0_{M_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc 1 est valeur propre de A_0 et U_0 est un vecteur propre associé. Notons que $\dim SEP(A_0, 1) \geqslant 1$.

Alors $4 \geqslant \sum_{\lambda \in Sp A_0} \dim SEP(A_0, \lambda) \geqslant \dim SEP(A_0, 0) + \dim SEP(A_0, 1) \geqslant 3+1 = 4$

Alors $4 = \sum_{\lambda \in Sp A_0} \dim SEP(A_0,\lambda) = \dim SEP(A_0, 0) + \dim SEP(A_0, 1) = 3 + \dim SEP(A_0, 1)$.

Ce qui montre que :

1) 0 et 1 sont les seules valeurs propres de A_0

2) $\dim SEP(A_0, 1) = 1$. Ainsi $\mathcal{B}_2 = (U_0)$ est une base de $SEP(A_0, 1)$

3) $\underline{\underline{A_0 \text{ est diagonalisable dans } M_4(\mathbb{R})}}$.

c) $\mathcal{B}_1 = (E_1+E_2, E_1+E_4, 2E_1 - E_3)$ est une base de $SEP(A_0, 0)$, $\mathcal{B}_2 = (U_0)$ est une base de $SEP(A_0, 1)$ et $M_{4,1}(\mathbb{R}) = SEP(A_0, 0) \oplus SEP(A_0, 1)$.

Alors $\mathcal{B} =$ " $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ " est une base de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_0 respectivement associés aux valeurs propres 0, 0, 0, 1. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $M_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

1) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

2) P est inversible comme matrice de passage.

3) $P^{-1}A_0P$ est la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(0,0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Alors $\underline{\underline{\text{si}}}$ $\underline{\underline{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}}}$: $\underline{\underline{D \text{ est une matrice diagonale de } M_4(\mathbb{R}) \text{ et } P}}$ $\underline{\underline{\text{est une matrice inversible de } M_4(\mathbb{R}) \text{ telles que } A_0 = PDP^{-1}}}$. $\underline{\underline{\text{Exercice}}}$. Notons que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 & 2 \\ -4 & 4 & -8 & 5 \\ 3 & -3 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

PARTIE II : Trace d'une matrice carrée

(Q3) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soient $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$.

$\lambda A+B=(\lambda a_{i,j}+b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$; $Tr(\lambda A+B)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{i,i}+b_{i,i})=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}+\sum_{i=1}^{n}b_{i,i}=\lambda Tr(A)+Tr(B)$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(A,B)\in M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})$, $Tr(\lambda A+B)=\lambda Tr(A)+Tr(B)$.

Ainsi Tr est une application linéaire de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Tr est une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

(Q4) Soient $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et $B=(b_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$.

Posons $C=(c_{i,j})_{1\le i,j\le n}=AB$ et $D=(d_{i,j})_{1\le i,j\le n}=BA$.

$$Tr(C)=\sum_{i=1}^{n}c_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{k,i}a_{i,k}=\sum_{k=1}^{n}d_{k,k}=Tr(D).$$

Alors $Tr(AB)=Tr(BA)$.

$\forall(A,B)\in M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})$, $Tr(AB)=Tr(BA)$.

(Q5) Soit $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ un élément de $M_n(\mathbb{R})$. Posons ${}^tA=(a'_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ et

$H={}^tAA=(h_{i,j})_{1\le i,j\le n}$. $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a'_{i,j}=a_{j,i}$ et $h_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a'_{i,k}a_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}a_{k,j}$

$$Tr({}^tAA)=\sum_{i=1}^{n}h_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}a_{k,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{k,i}^2\underset{k\leftarrow j\,!}{=}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{j,i}^2.$$

$\forall A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in M_n(\mathbb{R})$, $Tr({}^tAA)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{j,i}^2$.

PARTIE III : Une caractérisation des matrices de rang 1

(Q6) a) U est une matrice ayant n lignes et 1 colonne, à coefficients réels.

${}^tV$ est une matrice ayant 1 ligne et n colonnes, à coefficients réels.

Alors le produit $U{}^tV$ a un sens et est une matrice à n lignes et n colonnes, à coefficients réels. Ainsi $U{}^tV\in M_n(\mathbb{R})$.

Posons $U{}^tV = (\gamma_{i,j})_{1\le i,j\le n}$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$\gamma_{i,j}$ est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de U qui est (u_i) et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tV$ qui est (v_j). Ainsi $\gamma_{i,j} = u_i v_j$. $\underline{\underline{U{}^tV = (u_i v_j)_{1\le i,j\le n}}}$.

b) $\underline{\underline{\mathrm{Tr}(U{}^tV) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i}}$.

c) $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(U{}^tV) = \begin{pmatrix} u_1 v_j \\ u_2 v_j \\ \vdots \\ u_n v_j \end{pmatrix} = v_j \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = v_j U$. $\underline{\forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j(U{}^tV) = v_j U}$.

Alors $\mathrm{Vect}(C_1(U{}^tV), C_2(U{}^tV), \dots, C_n(U{}^tV)) = \mathrm{Vect}(v_1 U, v_2 U, \dots, v_n U) \subset \mathrm{Vect}(U)$.

$V \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ donc $\exists j_0 \in [\![1,n]\!]$, $v_{j_0} \neq 0$.

Alors $U = \frac{1}{v_{j_0}} C_{j_0}(U{}^tV) \in \mathrm{Vect}(C_1(U{}^tV), C_2(U{}^tV), \dots, C_n(U{}^tV))$.

donc $\mathrm{Vect}(U) \subset \mathrm{Vect}(C_1(U{}^tV), C_2(U{}^tV), \dots, C_n(U{}^tV))$.

Finalement $\mathrm{Vect}(C_1(U{}^tV), C_2(U{}^tV), \dots, C_n(U{}^tV)) = \mathrm{Vect}(U)$.

Alors $\mathrm{rg}(U{}^tV) = \dim \mathrm{Vect}(C_1(U{}^tV), C_2(U{}^tV), \dots, C_n(U{}^tV)) = \dim \mathrm{Vect}(U) \overset{U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}}{=} 1$.

<u>le rang de $U{}^tV$ est 1.</u>

Q7 a) $\mathrm{rg}\, A = 1$ donc $\dim \mathrm{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = 1$.

Nécessairement $\exists j_0 \in [\![1,n]\!]$, $C_{j_0}(A) \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Alors $(C_{j_0}(A))$ est une base de la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A))$.

Par conséquent $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\exists \alpha_j \in \mathbb{R}$, $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.

<u>Il existe j_0 dans $[\![1,n]\!]$ tel que pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, il existe un réel α_j vérifiant :</u>

<u>$C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$.</u>

Posons $U = C_{j_0}(A)$ et $V = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$. $\underline{U \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ et } V \in M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Si $U = O_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ ou si $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 0$: $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(A) = d_j\, C_{j_0}(A) = O_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$;

alors $A = O_{M_n(\mathbb{R})}$ et $\mathrm{rg}\, A = 0$!!

Ainsi $U \neq O_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $(d_1, d_2, \dots, d_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$. $\underline{U \neq O_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \text{ et } V \neq O_{M_{n,1}(\mathbb{R})}}$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(U\,{}^tV) = U\,{}^tV E_j = \langle V, E_j \rangle U = d_j U = d_j C_{j_0}(A) = C_j(A)$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(U\,{}^tV) = C_j(A)$. Ainsi $U\,{}^tV = A$.

<u>Il existe deux matrices colonnes non ~~nulles~~ U et V de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$.</u>

Q8 Les questions 6 et 7 permettent de dire que <u>si $A \in M_n(\mathbb{R})$, A est de rang 1 si et seulement si il existe deux matrices colonnes non nulles U et V de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = U\,{}^tV$.</u>

PARTIE IV : Une application en probabilités

Q9 $\underline{U_X\,{}^tU_Y = \left(P(X=i)\,P(Y=j)\right)_{1 \leq i,j \leq n}}$.

Or X et Y sont indépendantes donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $P(X=i)\,P(Y=j) = P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = m_{ij}$.

Donc $\underline{M = U_X\,{}^tU_Y}$.

$\sum_{i=1}^{n} P(X=i) = \sum_{j=1}^{n} P(Y=j) = 1$. Alors $\exists (i_1, j_1) \in [\![1,n]\!]^2$, $P(X=i_1) \neq 0$ et $P(Y=j_1) \neq 0$.

Alors $\underline{U_X \neq O_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \text{ et } U_Y \neq O_{M_{n,1}(\mathbb{R})}}$.

Alors d'après Q6, <u>la matrice M est de rang 1.</u>

Q10 a) Posons $C_1(M) + C_2(M) + \cdots + C_n(M) = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\gamma_i = m_{i,1} + m_{i,2} + \cdots + m_{i,n} = \sum_{j=1}^{n} P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = P(X=i)$ car $(\{Y=j\})_{1 \leq j \leq n}$ est un système complet d'événements.

Alors $\underline{C_1(M) + C_2(M) + \cdots + C_n(M) = U_X}$.

rg $M = 1$ donc $\mathrm{Vect}(C_1(M), C_2(M), \dots, C_n(M))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension 1.

le sous-espace contient $C_1(M) + C_2(M) + \dots + C_n(M)$ donc il contient U_X.

Comme nous l'avons vu plus haut $U_X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc (U_X) est une base de $\mathrm{Vect}(C_1(M), C_2(M), \dots, C_n(M))$. Alors :

pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, il existe un réel β_j tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.

c) $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(M) = \beta_j U_X$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]$, $P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = m_{i,j} = \beta_j P(X=i)$. $(*)$

$(\{X=i\})_{i \in [\![1,n]\!]}$ est un système complet d'événements donc :

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $P(Y=j) = \sum_{i=1}^{n} P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \sum_{i=1}^{n} \beta_j P(X=i) = \beta_j \underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(X=i)}_{=1} = \beta_j$

$\forall j \in [\![1,n]\!]$, $P(Y=j) = \beta_j$.

d) $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $P(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) \overset{(*)}{=} \beta_j P(X=i) = P(Y=j) P(X=i) = P(X=i) P(Y=j)$.

Alors X et Y sont indépendantes.

PARTIE V : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

Q11 $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. rg $A = 1$ et $n \geq 2$. Alors rg $A < n$. A n'est pas inversible.

Alors 0 est valeur propre de A.

$\dim SEP(A,0) = n - \mathrm{rg}(A - 0.I_n) = n - \mathrm{rg}\,A = n-1$.

le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0 est de dimension $n-1$.

Q12 Posons $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $V = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$.

${}^tUV \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et ${}^tUV = (\alpha)$ avec $\alpha = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$.

$V{}^tU = (u_i v_j)_{1 \leq i,j \leq n}$. $a = \mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \alpha$. $\alpha = a$. ${}^tUV = (a)$.

Ainsi ${}^tUV = (a)$ où $a = \mathrm{Tr}(A)$.

$A^2 = AA = U\underbrace{{}^tVU}_{\in M_1(\mathbb{R}) \dots \text{ou } \mathbb{R}}{}^tV = ({}^tVU)U{}^tV = aA$. $\underline{\underline{A^2 = aA}}$.

(Q13) Supposons que $a = 0$. Alors $A^2 = O_{M_n(\mathbb{R})}$. X^2 est un polynôme annulateur de A dont la seule racine est 0. Ainsi $SpA \subset \{0\}$; or $0 \in SpA$ d'après Q11 donc $\underline{SpA = \{0\}}$.

Nous avons vu que $\dim SEP(A,0) = n-1$. Alors $\underline{\dim SEP(A,0) < n}$.

Dans ces conditions A n'est pas diagonalisable.

$\underline{\underline{\text{Si } a=0, A \text{ n'est pas diagonalisable}}}$.

(Q14) On suppose ici que $a \neq 0$. $AU = U{}^tVU = ({}^tVU)U = aU$. $\underline{\underline{AU = aU}}$.

$U \neq O_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $AU = aU$ alors a est une valeur propre de A.

Donc $\{0,a\} \subset SpA$. Mais $A^2 = aA$ donc $X^2 - aX$ est un polynôme annulateur de A dont les racines sont 0 et a. Alors $SpA \subset \{0,a\}$.

Finalement $\underline{SpA = \{0,a\}}$. et $a \neq 0$.

$$n \underset{\text{car}}{\geq} \dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,a) = n-1+\dim SEP(A,a) \underset{SEP(A,a) \neq \{O_{M_{n,1}(\mathbb{R})}\}\,!}{\geq} n-1+1 = n.$$

Alors $\underline{\dim SEP(A,0) + \dim SEP(A,a) = n}$.

Donc $\underline{\underline{\text{A est diagonalisable}}}$.

(Q15) Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang 1.

$\underline{\underline{\text{A est diagonalisable si et seulement si } Tr(A) \neq 0}}$.

PARTIE IV Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

(Q16) • $\underline{\langle \cdot,\cdot \rangle \text{ est une application de } M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathbb{R}}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(A,B,C) \in (M_n(\mathbb{R}))^3$.

$\langle A, \lambda B+C\rangle = Tr({}^tA(\lambda B+C)) = tr(\lambda {}^tAB + {}^tAC) \underset{\text{Tr est linéaire}}{=} \lambda Tr({}^tAB) + Tr({}^tAC) = \lambda\langle A,B\rangle + \langle A,C\rangle$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (A,B,C) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^3,\ \langle A, \lambda B + C\rangle = \lambda\langle A,B\rangle + \langle A,C\rangle$.

- Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$. ${}^tAB$ et ${}^t({}^tAB)$ ont les mêmes éléments diagonaux donc ont même trace. Alors $\langle A,B\rangle = Tr({}^tAB) = Tr({}^t({}^tAB)) = Tr({}^tB\,{}^t({}^tA)) = Tr({}^tBA) = \langle B,A\rangle$.

  $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \langle A,B\rangle = \langle B,A\rangle$.

- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\langle A,A\rangle = Tr({}^tAA) \overset{Q5}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 \geqslant 0$.

  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle A,A\rangle \geqslant 0$

- Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que $\langle A,A\rangle = 0$.

  Alors $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{j,i}^2 = 0$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i}^2 \geqslant 0$.

  Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i}^2 = 0$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = 0$. $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

  $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \langle A,A\rangle = 0 \Rightarrow A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

  Les cinq points précédents montrent que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Q17 ${}^tS = {}^t(V\,{}^tV) = {}^t({}^tV)\,{}^tV = V\,{}^tV = S$. S est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$S^2 = (V\,{}^tV)(V\,{}^tV) = V({}^tVV)\,{}^tV$. ${}^tVV = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = 1$.

Alors $S^2 = V\,{}^tV = S$. $S^2 = S$.

Q18 a) • $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \phi(M) = SM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. ϕ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  $\phi(\lambda M + N) = S(\lambda M + N) = \lambda SM + SN = \lambda\phi(M) + \phi(N)$.

  $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2,\ \phi(\lambda M + N) = \lambda\phi(M) + \phi(N)$. ϕ est linéaire.

Ainsi ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• Soit $(M,N)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$\langle \varphi(M),N\rangle = Tr({}^t\varphi(M)N) = Tr({}^t(SM)N) = Tr({}^tM\,{}^tSN) \overset{S \text{ est symétrique}}{=} Tr({}^tMSN) = Tr({}^tM\,\varphi(N)) = \langle M,\varphi(N)\rangle$

$\forall (M,N)\in(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\langle \varphi(M),N\rangle = \langle M,\varphi(N)\rangle$. φ est symétrique.

φ est un endomorphisme symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) $\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi^2(M)=\varphi(\varphi(M))=\varphi(SM)=S(SM)=S^2M \overset{S^2=S}{=} SM=\varphi(M)$.

Ainsi $\varphi^2=\varphi$.

X^2-X est un polynôme annulateur de φ dont les racines sont 0 et 1.

Ainsi $Sp\,\varphi\subset\{0,1\}$.

$\varphi(S)=S^2=S$. Notons que $S\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ car $rg\,S=1$ puisque $V\neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Ainsi $1\in Sp\,\varphi$.

V est un élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc $\dim Vect(V)=1<n$. Alors

donc $(Vect(V))^\perp\neq 0$. Ainsi il existe un élément non nul U de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ orthogonal à V.

Posons $T=U\,{}^tU$. T est une matrice de rang 1 donc $T\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\varphi(T)=ST=V\,{}^tV\,U\,{}^tU=\underbrace{\langle V,U\rangle}_{=0}V\,{}^tU=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Alors 0 est valeur propre de φ.

Finalement $Sp\,\varphi=\{0,1\}$.

c) $\varphi\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $\varphi\circ\varphi=\varphi$. Alors φ est la projection sur $Ker(\varphi-e)$ parallèlement à $Ker(\varphi)$. Alors $Ker(\varphi)$ et $Ker(\varphi-e)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(M,N)\in Ker(\varphi)\times Ker(\varphi-e)$. $\varphi(M)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\varphi(N)=N$

$\langle M,N\rangle=\langle M,\varphi(N)\rangle \underset{\varphi \text{ est symétrique}}{=} \langle\varphi(M),N\rangle=\langle 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})},N\rangle=0$.

$\forall (M,N)\in Ker\,\varphi\times Ker(\varphi-e)$, $\langle M,N\rangle=0$. $Ker\,\varphi$ et $Ker(\varphi-e)$ sont orthogonaux.

$Ker(\varphi)$ et $Ker(\varphi-e)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Remarque : φ est une projection orthogonale.