EM LYON 2013

jean-francois.cossutta@wanadoo.fr

PROBLÈME 1

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale

1. Soit x un réel appartenant à $]0,+\infty[$.

• $t \to \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

• $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{1}{x+t} \leqslant \dfrac{1}{x}$ et $e^{-t} \geqslant 0$ donc $\forall t \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{x+t} \leqslant \dfrac{1}{x}\, e^{-t}$.

• Le cours indique que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge car $\Gamma : z \to \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ a pour domaine de définition $]0,+\infty[$ donc est définie en 1. Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x}\,e^{-t}\right)\mathrm{d}t$ converge également.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ appartenant à }]0,+\infty[\text{, l'intégrale } \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. Soit x un réel appartenant à $]0,+\infty[$.

• $\forall t \in [1,+\infty[,\ \dfrac{e^{-t}}{x+t} \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ car $1 \leqslant +\infty$!

• $\forall t \in [0,1],\ e^{-t} \geqslant e^{-1}$ (car $t \to e^{-t}$ est décroissante sur $[0,1]$) et $\dfrac{1}{x+t} \geqslant 0$.

Donc $\forall t \in [0,1],\ \dfrac{e^{-t}}{x+t} \geqslant \dfrac{e^{-1}}{x+t}$. Comme $0 \leqslant 1$: $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1\frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1\frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant \int_0^1\frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t.}$$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1\frac{e^{-1}}{x+t}\,\mathrm{d}t = e^{-1}\left[\ln|x+t|\right]_0^1 = e^{-1}\big(\ln|x+1| - \ln|x|\big) = e^{-1}\big(\ln(x+1) - \ln x\big)$.

Par conséquent $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) \geqslant e^{-1}\big(\ln(x+1)-\ln x\big)$.

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x+1)=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\big(-\ln(x)\big)=+\infty$ et $e^{-1}>0$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+}\big(e^{-1}\big(\ln(x+1)-\ln x\big)\big)=+\infty$.

Les deux points précédents permettent alors de dire que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=0.}$$

3. Soit x un réel appartenant à $]0,+\infty[$.

Comme nous l'avons vu dans la première question $\forall t\in[0,+\infty[,\ 0<\dfrac{e^{-t}}{x+t}\leqslant \dfrac{1}{x}\,e^{-t}$.

De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\Gamma(1)$ donc $(1-1)\,!$ ou encore 1.

Alors, comme $0<+\infty$, $0<\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\cdot$ Donc $0<f(x)\leqslant\dfrac{1}{x}\cdot$

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ 0<f(x)\leqslant\frac{1}{x}\cdot}$$

$\forall x\in]0,+\infty[,\ 0<f(x)\leqslant\dfrac{1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Il vient alors par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.}$$

4. Comme nous l'avons déjà dit $\Gamma : z\to\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{z-1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ a pour domaine de définition $]0,+\infty[$ donc est définie en 2. Par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Soit x un réel appartenant à $]0,+\infty[$.

$f(x)-\dfrac{1}{x}=f(x)-\dfrac{1}{x}\times 1=f(x)-\dfrac{1}{x}\,\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\left(e^{-t}\left[\frac{1}{x+t}-\frac{1}{x}\right]\right)\mathrm{d}t.$

$f(x)-\dfrac{1}{x}=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(e^{-t}\,\frac{x-(x+t)}{(x+t)\,x}\right)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{-t\,e^{-t}}{x\,(x+t)}\,\mathrm{d}t.$ Donc $\dfrac{1}{x}-f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\,e^{-t}}{x\,(x+t)}\,\mathrm{d}t.$

$\forall t\in[0,+\infty[,\ x+t\geqslant x$ et $x>0$ donc $\forall t\in[0,+\infty[,\ x\,(x+t)\geqslant x^2>0$.

Alors $\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant\dfrac{1}{x\,(x+t)}\leqslant\dfrac{1}{x^2}$ et $t\,e^{-t}\geqslant 0$.

Ainsi $\forall t\in[0,+\infty[,\ 0\leqslant\dfrac{t\,e^{-t}}{x\,(x+t)}\leqslant\dfrac{1}{x^2}\,t\,e^{-t}$, $0\leqslant+\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

En intégrant on obtient alors : $0\leqslant\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t\,e^{-t}}{x\,(x+t)}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty}t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

Donc $0 \leqslant \dfrac{1}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Alors $\left| f(x) - \dfrac{1}{x} \right| = \left| \dfrac{1}{x} - f(x) \right| = \dfrac{1}{x} - f(x) \leqslant \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \left| f(x) - \frac{1}{x} \right| \leqslant \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.}$$

► *Remarque* $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Gamma(2) = (2-1)\,! = 1$. *Donc* $\boxed{\forall x \in]0, +\infty[, \quad \left| f(x) - \dfrac{1}{x} \right| \leqslant \dfrac{1}{x^2}\cdot}$ ◄

$\forall x \in]0, +\infty[,\ 0 \leqslant |x\,f(x) - 1| = |x| \left| f(x) - \dfrac{1}{x} \right| \leqslant \dfrac{|x|}{x^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{|x|} \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

Comme $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} t\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \right) = 0$, il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \big(x\,f(x)\big) = 1$ ou $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = 1$.

Alors :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}\cdot}$$

Partie II : Une autre expression intégrale de f

► *Remarque Il convient quand même de noter que les arguments utilisés dans cette partie sont totalement inappropriés.*

Le changement de variable $u = x + t$ donne en une ligne le résultat de la question 11. Qui permet, toujours en une ligne, de montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x)$.

Mais pourquoi faire simple lorsque l'on peut faire compliqué ?! ◄

A- Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme intégrale

5. Dans cette question x est un réel strictement positif et h un réel non nul strictement supérieur à $-\dfrac{x}{2}\cdot$

a. $t \to \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

$\forall t \in [0, +\infty[, x + t \geqslant x > 0$ donc $\forall t \in [0, +\infty[, (x+t) \geqslant x^2 > 0$.

Alors $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leqslant \dfrac{1}{(x+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$ et $e^{-t} \geqslant 0$.

Par conséquent $\forall t \in [0, +\infty[, 0 \leqslant \dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}\,e^{-t}$.

Comme nous l'avons déjà vu $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. Il en est alors de même de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2}\,e^{-t} \right) \mathrm{d}t$.

Les deux points précédents et les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

b. Soit t un réel de l'intervalle $[0,+\infty[$.

$\left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t}-\dfrac{1}{x+t}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right| = \left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{x+t-(x+h+t)}{(x+h+t)\,(x+t)}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right|.$

$\left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t}-\dfrac{1}{x+t}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right| = \left|\dfrac{1}{h}\,\dfrac{(-h)}{(x+h+t)\,(x+t)}+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right|.$

$\left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t}-\dfrac{1}{x+t}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right| = \left|\dfrac{1}{(x+t)^2}-\dfrac{1}{(x+h+t)\,(x+t)}\right| = \left|\dfrac{x+h+t-(x+t)}{(x+h+t)\,(x+t)^2}\right|.$

$\left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t}-\dfrac{1}{x+t}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right| = \dfrac{|h|}{\left|(x+h+t)\,(x+t)^2\right|}.$

$x+h+t \geqslant x+h \geqslant x-\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{2}>0$ car $h>-\dfrac{x}{2}$ et $(x+t)^2 \geqslant x^2>0$ (comme nous l'avons déjà vu).

Donc $(x+h+t)\,(x+t)^2 \geqslant \dfrac{x}{2}\,x^2>0$. Alors $\left|(x+h+t)\,(x+t)^2\right| = (x+h+t)\,(x+t)^2 \geqslant \dfrac{x^3}{2}>0$.

Par conséquent $\dfrac{1}{\left|(x+h+t)\,(x+t)^2\right|} \leqslant \dfrac{2}{x^3}$.

Comme $|h|\geqslant 0$: $\left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t}-\dfrac{1}{x+t}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right| = \dfrac{|h|}{\left|(x+h+t)\,(x+t)^2\right|} \leqslant \dfrac{2\,|h|}{x^3}$.

$$\boxed{\forall t\in[0,+\infty[,\quad \left|\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right| \leqslant \frac{2\,|h|}{x^3}.}$$

c. Posons $\Delta(h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ et montrons que $|\Delta(h)|\leqslant \dfrac{2|h|}{x^3}$.

► *Remarque Notons que $\Delta(h)$ a un sens car $x>0$, $x+h>0$ (puisque $h>-\dfrac{x}{2}$ et $x>0$) et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.* ◄

$\Delta(h)=\dfrac{1}{h}\left(\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{x+h+t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t\right)+\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$

$\Delta(h)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\left[\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t}-\dfrac{1}{x+t}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\,\mathrm{d}t.$

$\forall t\in[0,+\infty[,\ ,\left|\left[\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t}-\dfrac{1}{x+t}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right| = \left|\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t}-\dfrac{1}{x+t}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right|e^{-t}.$

$\forall t\in[0,+\infty[,\ ,0\leqslant\left|\left[\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t}-\dfrac{1}{x+t}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right| \leqslant \dfrac{2\,|h|}{x^3}\,e^{-t}.$

Or $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{2\,|h|}{x^3}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge également et vaut $\dfrac{2\,|h|}{x^3}$.

Les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives permettent alors de dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\left[\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{x+h+t}-\dfrac{1}{x+t}\right)+\dfrac{1}{(x+t)^2}\right]e^{-t}\right|\mathrm{d}t$ converge et est majorée par $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{2\,|h|}{x^3}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]\,e^{-t}\right)\mathrm{d}t$ est absolument convergente (donc convergente).

On peut alors majorer $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\left(\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]\,e^{-t}\right)\mathrm{d}t\right|$ par

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]\,e^{-t}\right|\mathrm{d}t.$

Donc $\displaystyle\big|\Delta(h)\big|\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h+t}-\frac{1}{x+t}\right)+\frac{1}{(x+t)^2}\right]\,e^{-t}\right|\mathrm{d}t\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{2\,|h|}{x^3}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{2\,|h|}{x^3}.$

Finalement :

$$\boxed{\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2\,|h|}{x^3}.}$$

6. Soit x un réel strictement positif.

$\displaystyle\forall h\in\left]-\frac{x}{2},0\right[\cup]0,+\infty[,\ 0\leqslant\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{2\,|h|}{x^3}.$

$\displaystyle\forall h\in\left]-\frac{x}{2},0\right[\cup]0,+\infty[,\ 0\leqslant\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\left(-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t\right)\right|\leqslant\frac{2\,|h|}{x^3}$ et $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{2\,|h|}{x^3}=0.$

Alors par encadrement il vient : $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$

Ainsi f est dérivable en x et $\displaystyle f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x\in]0,+\infty[,\ f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.}$$

► *Remarque* *Il est aisé de montrer que f' est strictement négative sur $]0,+\infty[$. Ainsi f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Ce que l'on peut aussi obtenir en une ligne en utilisant la définition de la stricte décroissance.* ◄

7. Soit x un réel strictement positif. Soit $(\varepsilon,A)\in]0,1]\times[1,+\infty[$.

Posons $\forall t\in[0,+\infty[,u_x(t)=-\dfrac{1}{x+t}$ et $v(t)=e^{-t}$. u_x et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

De plus $\forall t\in[0,+\infty[,\ u_x'(t)=\dfrac{1}{(x+t)^2}$ et $v'(t)=-e^{-t}$.

Ceci autorise l'intégration par parties suivante.

$\displaystyle\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{x+t}\times e^{-t}\right]_\varepsilon^A-\int_\varepsilon^A\left(-\frac{1}{x+t}\right)\big(-e^{-t}\big)\,\mathrm{d}t=-\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ \forall(\varepsilon,A)\in]0,1]\times[1,+\infty[,\ \int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{e^{-A}}{x+A}+\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon}-\int_\varepsilon^A\frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.}$$

► *Remarque* *Le ε n'était pas franchement utile ici...*

On pouvait directement obtenir $\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall A \in [0,+\infty[\ \displaystyle\int_0^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{1}{x} - \int_0^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ ◄

8. Soit x un réel strictement positif.

- $\forall(\varepsilon, A) \in]0,1] \times [1,+\infty[,\ \displaystyle\int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_\varepsilon^A \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t \quad (\bigstar).$
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-f'(x)$.
- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $f(x)$.
- $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} = \frac{1}{x}\cdot$
- $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{e^{-A}}{x+A} = \lim_{A\to+\infty}\left(e^{-A}\,\frac{1}{x+A}\right) = 0\times 0 = 0.$

En faisant tendre successivement ε vers 0 par valeurs supérieures et A vers $+\infty$ dans $(\bigstar)$ on obtient :

$-f'(x) = \dfrac{1}{x} - f(x)$. Donc $f'(x) = -\dfrac{1}{x} + f(x)$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x).}$$

9. $x \to -\dfrac{1}{x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty|$ donc $x \to -\dfrac{1}{x} + f(x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Ainsi f' est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Alors f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = -\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) + f'(x) = \dfrac{1}{x^2} + f'(x).$

f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc est continue sur $]0,+\infty[$. Comme $x \to \dfrac{1}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, par somme f'' est continue sur $]0,+\infty[$. Finalement :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = \frac{1}{x^2} + f'(x).}$$

B- Intervention d'une fonction auxiliaire g

10. $x \to e^{-x}$ et f sont dérivables sur $]0,+\infty[$ donc, par produit, g est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = -e^{-x}\,f(x) + e^{-x}\,f'(x) = e^{-x}\big(f'(x) - f(x)\big) = e^{-x}\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{e^{-x}}{x}\cdot$

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x \in]0,+\infty[,\ g'(x) = -\frac{e^{-x}}{x}\cdot}$$

11. Soit x un réel appartenant à $]0,+\infty[$. $u \to \dfrac{e^{-u}}{u}$ est continue sur $[x,+\infty[$.

$\forall A \in [x,+\infty[,\ \displaystyle\int_x^A \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \int_x^A \big(-g'(u)\big)\,\mathrm{d}u = \big[-g(u)\big]_x^A = g(x) - g(A).$

Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} g(A) = \lim_{A\to+\infty}\big(e^{-A}\,f(A)\big) = 0\times 0 = 0.$

Donc $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_x^A \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = \lim_{A\to+\infty}\big(g(x)-g(A)\big) = g(x) - 0 = g(x)$.

Par conséquent $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $g(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } x \text{ de }]0,+\infty[,\ \int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \text{ converge et } g(x) = \int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.}$$

$\forall x \in]0,+\infty[,\ g(x) = e^{-x}\,f(x)$ donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = e^x\,g(x) = e^x \displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$.

$$\boxed{\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = e^x \int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\ .}$$

12. Nous avons vu dans la question **4** que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\cdot$

Donc $\displaystyle\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = g(x) = e^{-x}\,f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}\,\frac{1}{x} = \frac{e^{-x}}{x}\cdot$

$$\boxed{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}\cdot}$$

13. D'après la question précédente $n^2\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\,\frac{e^{-n}}{n} = n\,e^{-n} = \frac{1}{e}\,n\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$.

- $n^2\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{e}\,n\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{e}\,n\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1} \geqslant 0$.

- La série de terme général $n\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$ converge car $\left|\dfrac{1}{e}\right| < 1$ (série géométrique dérivée) donc la série de terme général $\dfrac{1}{e}\,n\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$ converge également.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que la série de terme général $n^2\displaystyle\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$ converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}\left(n^2\int_n^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u\right) \text{ converge.}}$$

Partie III : Étude d'une densité

---

14. • Nous avons vu dans la question **3.** que $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) > 0$. Donc $f(1) > 0$.

Alors pour tout élément t de $[0,+\infty[,\ f(1)\,(1+t) > 0$ et $e^{-t} > 0$.

Donc pour tout élément t de $[0,+\infty[$, $\dfrac{e^{-t}}{f(1)\,(1+t)}$ est un réel strictement positif.

Ainsi h est définie et strictement positive sur $[0,+\infty[$. De plus h est nulle sur $]-\infty,0[$.

Alors h est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall t\in\mathbb{R},\ h(t)\geqslant 0$.

• $t\to e^{-t}$ et $t\to\dfrac{1}{1+t}$ sont continues sur $[0,+\infty[$, donc $t\to\dfrac{1}{f(1)}\,\dfrac{e^{-t}}{1+t}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

Alors h est continue sur $[0,+\infty[$.

Comme h est nulle sur $]-\infty,0[$, h est continue sur $]-\infty,0[$.

Par conséquent h est au moins continue sur $\mathbb{R}-\{0\}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

• $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $f(1)$ Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(1)}\,\frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{f(1)}\,f(1)$ donc 1.

Par conséquent $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Comme h est nulle sur $]-\infty,0[$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{h \text{ est une densité de probabilité.}}$$

15. $t\to t\,h(t)$ est nulle sur $]-\infty,0[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} t\,h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.

$\forall t\in[0,+\infty[,\ t\,h(t)=\dfrac{1}{f(1)}\,\dfrac{t\,e^{-t}}{1+t}=\dfrac{1}{f(1)}\,\dfrac{(1+t-1)\,e^{-t}}{1+t}=\dfrac{1}{f(1)}\,e^{-t}-\dfrac{1}{f(1)}\,\dfrac{e^{-t}}{1+t}=\dfrac{1}{f(1)}\,e^{-t}-h(t)$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\Gamma(1)$ donc 1 et $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,h(t)\,\mathrm{d}t$ converge comme combinaison linéaire de deux intégrales convergentes.

De plus $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,h(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{f(1)}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{f(1)}\times 1-1=\frac{1}{f(1)}-1$.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,h(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\dfrac{1}{f(1)}-1$. Par conséquent :

$$\boxed{X \text{ possède une espérance qui vaut } \dfrac{1}{f(1)}-1.}$$