# EML LYON 2014

## PROBLÈME 1

### PARTIE I : Propriétés générales de T.

**(Q1)** Soit $f$ un élément de $E$. Soit $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ ( $f$ est continue sur $\mathbb{R}$...).

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\left[F(x+1) - F(x-1)\right].$

$F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x-1$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par composition $x \mapsto F(x+1)$ et $x \mapsto F(x-1)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Par combinaison linéaire $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

De plus $\forall x \in \mathbb{R},\ (T(f))'(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+1) - f(x-1)\right].$

**(Q2)** • $\forall f \in E,\ T(f) \in E_1$ d'après Q1. Or $E_1$ est contenu dans $E$.

Ainsi $\forall f \in E, T(f) \in E$. $T$ est une application de $E$ dans $E$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(f,g) \in E \times E$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda f+g)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}(\lambda f+g)(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}(\lambda f(t)+g(t))\,dt = \lambda\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt + \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} g(t)\,dt = \lambda T(f)(x) + T(g)(x).$

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda f+g)(x) = (\lambda T(f) + T(g))(x).$

$T(\lambda f+g) = \lambda T(f) + T(g).$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (f,g) \in E \times E,\ T(\lambda f+g) = \lambda T(f) + T(g)$. $T$ est linéaire.

Ainsi $T$ est un endomorphisme de $E$.

**(Q3)** $\forall f \in E, T(f) \in E_1$ donc $\operatorname{Im} T \subset E_1$.

Or $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ et non dérivable en 0. Ainsi $x \mapsto |x|$ appartient à $E$ mais n'appartient pas $E_1$. $x \mapsto |x|$ appartient à $E$ mais n'appartient à $\operatorname{Im} T$.

Ainsi $T$ n'est pas surjectif.

**(Q4)** Soit $f \in E$. $t \mapsto -t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ce qui doit sans doute autoriser le changement de variable $u = -t$ dans ce qui suit.

$\forall x\in\mathbb{R},\ T(f)(-x)=\frac{1}{2}\int_{-x-1}^{-x+1} f(t)\,dt \underset{u=-t}{=} \frac{1}{2}\int_{x+1}^{x-1} f(-u)(-du) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(-u)\,du.$

Si $f$ est paire sur $\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}, T(f)(-x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(u)\,du = T(f)(x).$

Si $f$ est impaire sur $\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}, T(f)(-x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}(-f(u))\,du = -\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(u)\,du = -T(f)(x).$

<u>Si $f$ appartient à $E$ et si $f$ est paire sur $\mathbb{R}$, $T(f)$ est paire sur $\mathbb{R}$.</u>

<u>Si $f$ appartient à $E$ et si $f$ est impaire sur $\mathbb{R}$, $T(f)$ est impaire sur $\mathbb{R}$.</u>

**Q5** Soit $f\in E$. Supposons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

$\forall x\in\mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^{x+1} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{x-1} f(t)\,dt.$

$\lim_{y\to+\infty}\int_0^y f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt,\ \lim_{x\to+\infty}(x+1) = \lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty.$

Alors par composition et combinaison linéaire : $\lim_{x\to+\infty} T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0.$

$\forall x\in\mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{0} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{x+1}^{0} f(t)\,dt.$

$\lim_{y\to-\infty}\int_y^0 f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt,\ \lim_{y\to-\infty}(x-1) = \lim_{y\to-\infty}(x+1) = -\infty.$

Alors par composition et combinaison linéaire : $\lim_{x\to+\infty} T(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = 0$

<u>Si $f\in E$ et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge alors $\lim_{x\to+\infty} T(f)(x) = \lim_{x\to-\infty} T(f)(x) = 0.$</u>

**Q6** $s$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc $s$ appartient à $E$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ T(s)(x) = \int_{x-1}^{x+1} s(t)\,dt = \int_{x-1}^{x+1}\sin(\pi t)\,dt = \left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi t)\right]_{x-1}^{x+1} = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x+\pi)+\frac{1}{\pi}\cos(\pi x-\pi)$

$\forall x\in\mathbb{R},\ T(s)(x) = \frac{1}{\pi}\cos(\pi x) - \frac{1}{\pi}\cos(\pi x) = 0.$ Donc $T(s)=0_E$ et $s\neq 0_E$.

Alors le noyau de $T$ n'est pas réduit à $0_E$. <u>$T$ n'est pas injectif.</u>

PARTIE II : Premier exemple.

**Q7** Soit $a\in\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}$, $T(f_a)(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f_a(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} e^{at}\,dt$.

$T(f_0)(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} 1\,dt=\frac{1}{2}(x+1-x+1)=1=f_0(x)$ et ceci pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$. $T(f_0)=f_0$.

Supposons $a\neq 0$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $T(f_a)(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}e^{at}\right]_{x-1}^{x+1}=\frac{1}{2}\frac{1}{a}\left(e^{a(x+1)}-e^{a(x-1)}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{a}(e^a-e^{-a})\,e^{ax}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $T(f_a)(x)=\frac{e^a-e^{-a}}{2a}f_a(x)$. $T(f_a)=\frac{e^a-e^{-a}}{2a}f_a$.

$\forall a\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R}$, $T(f_a)(x)=\begin{cases}\frac{e^a-e^{-a}}{2a}f_a(x) & \text{si } a\neq 0\\ f_a(x) & \text{si } a=0\end{cases}$. $\forall a\in\mathbb{R}$, $T(f_a)=\begin{cases}\frac{e^a-e^{-a}}{2a}f_a & \text{si } a\neq 0\\ f_0 & \text{si } a=0\end{cases}$.

**Q8** $\forall a\in\mathbb{R}-\{0\}$, $T(f_a)=\frac{e^a-e^{-a}}{2a}f_a=\varphi(a)f_a$.

$T(f_0)=f_0=\varphi(0)f_0$.

Ainsi $\forall a\in\mathbb{R}$, $T(f_a)=\varphi(a)f_a$.

**Q9** $a\mapsto e^a-e^{-a}$ est dérivable et $a\mapsto 2a$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

Ainsi $a\mapsto\frac{e^a-e^{-a}}{2a}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$\forall a\in\mathbb{R}-\{0\}$, $\frac{\varphi(a)-\varphi(0)}{a}=\frac{1}{a}\left[\frac{e^a-e^{-a}}{2a}-1\right]=\frac{1}{2a^2}\left[e^a-e^{-a}-2a\right]$.

$e^a\underset{a\mapsto 0}{=}1+a+\frac{1}{2}a^2+o(a^2)$ et $e^{-a}\underset{a\mapsto 0}{=}1-a+\frac{1}{2}a^2+o(a^2)$.

$e^a-e^{-a}-2a\underset{a\mapsto 0}{=}1+a+\frac{1}{2}a^2-1+a-\frac{1}{2}a^2-2a+o(a^2)$

$e^a-e^{-a}-2a\underset{a\mapsto 0}{=}o(a^2)$; Alors $\lim_{a\mapsto 0}\left(\frac{1}{2a}\left[e^a-e^{-a}-2a\right]\right)=0$.

Donc $\lim_{a\mapsto 0}\frac{\varphi(a)-\varphi(0)}{a}=0$. $\varphi$ est dérivable en 0 et $\varphi'(0)=0$.

$\forall a\in\mathbb{R}-\{0\}$, $\varphi(a)=\frac{e^a-e^{-a}}{2a}$. Donc $\forall a\in\mathbb{R}-\{0\}$, $\varphi'(a)=\frac{1}{2a^2}\left[(e^a+e^{-a})a-(e^a-e^{-a})\right]$

$\forall a \in \mathbb{R}-\{0\},\ \varphi'(a)=\frac{1}{2a^2}\left[(a-1)e^{a}+(a+1)e^{-a}\right]$

$\varphi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall a\in\mathbb{R},\ \varphi'(a)=\begin{cases}\frac{1}{2a^2}\left[(a-1)e^{a}+(a+1)e^{-a}\right] & \text{si } a\neq 0\\ 0 & \text{si } a=0.\end{cases}$

Posons $\forall a\in\mathbb{R},\ \psi(a)=e^{a}(a-1)+e^{-a}(a+1)$.

$\psi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall a\in\mathbb{R},\ \psi'(a)=e^{a}(a-1)+e^{a}-e^{-a}(a+1)+e^{-a}=a(e^{a}-e^{-a})$.

$\forall a\in\,]-\infty,0[,\ a<0$ et $e^{a}-e^{-a}<0$ et $\forall a\in\,]0,+\infty[,\ a>0$ et $e^{a}-e^{-a}>0$.

Ainsi $\forall a\in\,]-\infty,0[,\ \psi'(a)>0$ et $\forall a\in\,]0,+\infty[,\ \psi'(a)>0$.

Alors $\psi'(\ )=0$ et $\forall a\in\mathbb{R}-\{0\},\ \psi'(a)>0$. $\psi$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Or $\psi(0)=1(0-1)+1(0+1)=0$.

Alors $\forall a\in\,]0,+\infty[,\ e^{a}(a-1)+e^{-a}(a+1)>0$

$\forall a\in\,]-\infty,0[\ \ e^{a}(a-1)+e^{-a}(a+1)<0$

$e^{0}(0-1)+e^{-0}(0-1)=0$.

Rappelons que que $\forall a\in\mathbb{R},\ \varphi'(a)=\begin{cases}\frac{1}{2a^2}\left(e^{a}(a-1)+e^{-a}(a+1)\right) & \text{si } a\neq 0\\ 0 & \text{si } a=0\end{cases}$

Alors $\forall a\in\,]-\infty,0[,\ \varphi'(a)<0$ ; $\varphi'(0)=0$ ; $\forall a\in\,]0,+\infty[,\ \varphi'(a)>0$

ceci permet de dire que $\varphi$ est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty,0]$.

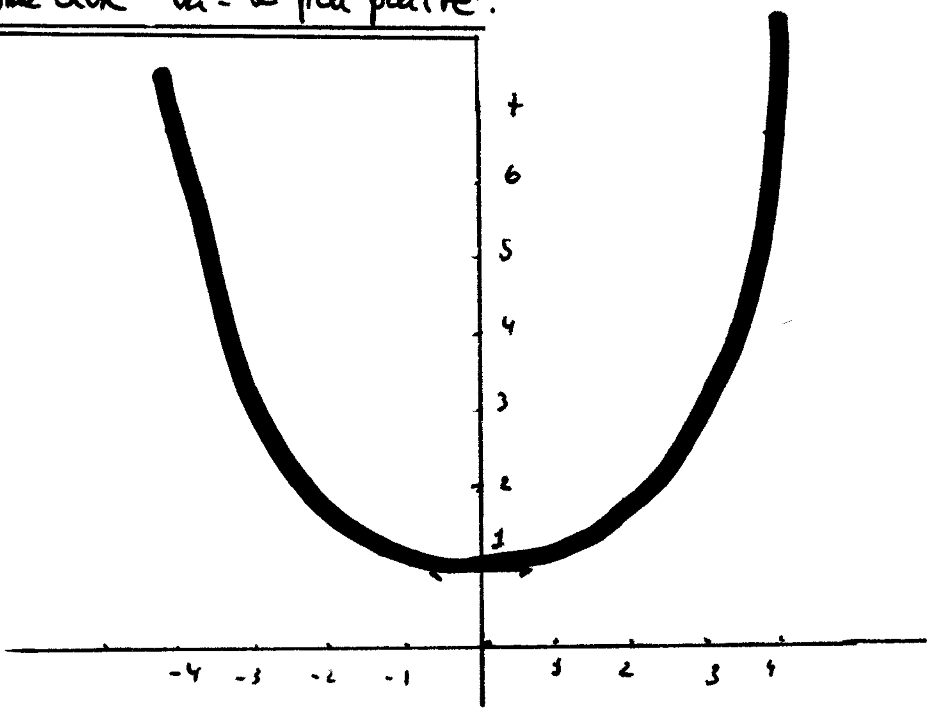
notons que $\varphi$ est paire sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{a\to+\infty}\varphi(a)=\lim\limits_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{e^{a}}{a}-\frac{1}{2}\frac{1}{ae^{a}}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{e^{a}}{a}=+\infty$ et $\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{ae^{a}}=0$

$\lim\limits_{a\to+\infty}\varphi(a)=+\infty$ et comme $\varphi$ est paire sur $\mathbb{R}$ : $\lim\limits_{a\to-\infty}\varphi(a)=+\infty$

$$\lim_{a \mapsto +\infty} \frac{\varphi(a)}{a} = \lim_{a \mapsto +\infty} \left( \frac{1}{2} \frac{e^a}{a^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{a^2 e^a} \right) = +\infty$$

Alors la courbe représentative admet une branche parabolique dans la direction de $(y'y)$ en $+\infty$. Même chose en $-\infty$ par parité.




Q10

Notons que $\varphi$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus $\varphi(0) = 1$ et $\lim_{a \mapsto +\infty} \varphi(a) = +\infty$. Ainsi $\varphi$ définit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

Soit $\lambda \in [1, +\infty[$. $\exists !\, a \in [0, +\infty[$, $\varphi(a) = \lambda$.

Alors $f_a \neq 0_E$ et $T(f_a) = \varphi(a) f_a = \lambda f_a$.

Donc pour tout $\lambda \in [1, +\infty[$, il existe $f \in E - \{0_E\}$, tel que $T(f) = \lambda f$.

Ainsi tout élément $\lambda$ de $[1, +\infty[$ est valeur propre de $T$.

PARTIE III : Deuxième exemple

Q1 $t \mapsto |t| + 1$ est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. $t \mapsto \frac{1}{|t|+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Alors $h : t \mapsto \frac{1}{|t|+1}$ est un élément de $E$.

Notons que $h$ est paire sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in [0, 1]$

$$T(h)(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}h(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ x-1\le 0 \text{ et } x+1>0}}{=} \frac{1}{2}\int_{x-1}^{0}\frac{1}{-t+1}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{x+1}\frac{1}{t+1}\,dt=\frac{1}{2}\Big[-\ln|-t+1|\Big]_{x-1}^{0}+\frac{1}{2}\Big[\ln|t+1|\Big]_0^{x+1}$$

$$T(h)(x)=\frac{1}{2}\ln|-x+1+1|+\frac{1}{2}\ln|x+1+1|=\frac{1}{2}\ln(2-x)+\frac{1}{2}\ln(x+2)=\frac{1}{2}\ln(4-x^2).$$

Soit $x\in\,]1,+\infty[$.

$$T(h)(x)=\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}h(t)\,dt \overset{\substack{x-1>0 \text{ et } x+1>0\\ \downarrow}}{=} \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1}\frac{1}{t+1}\,dt=\frac{1}{2}\Big[\ln|t+1|\Big]_{x-1}^{x+1}\overset{x+1+1>0 \text{ et } x>0}{=}\frac{1}{2}\ln(x+1+1)-\frac{1}{2}\ln(x)$$

$$T(h)(x)=\frac{1}{2}\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln x=\frac{1}{2}\ln(|x|+2)-\frac{1}{2}\ln|x|$$

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ T(h)(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(4-x^2) \text{ si } x\in[0,1]\\ \frac{1}{2}\ln(|x|+2)-\frac{1}{2}\ln|x| \text{ si } x\in\,]1,+\infty[.\end{cases}$$

Soit $x\in\,]-\infty,0[$. $T(h)(x)=T(h)(-x)$ et $-x\in\,]0,+\infty[$.

Alors si $x\in[-1,0[$, $T(h)(x)=T(h)(-x)\overset{-x\in]0,1]}{=}\frac{1}{2}\ln(4-(-x)^2)=\frac{1}{2}\ln(4-x^2)$.

Si $x\in\,]-\infty,-1[$, $T(h)(x)=T(h)(-x)\overset{-x\in]1,+\infty[}{=}\frac{1}{2}\ln(|-x|+2)-\frac{1}{2}\ln|-x|=\frac{1}{2}\ln(|x|+2)-\frac{1}{2}\ln|x|$.

Finalement $\underline{\underline{\forall x\in\mathbb{R},\ T(h)(x)=}}$ $\underline{\underline{\begin{cases}\frac{1}{2}\ln(4-x^2) & \text{si } x\in[-1,1]\\ \frac{1}{2}\ln(|x|+2)-\frac{1}{2}\ln|x| & \text{sinon}\end{cases}}}$

Rappelons que $T(h)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ (T(h))'(x)\underset{\substack{\uparrow\\ \ln(|x|+2)=\ln}}{=}\begin{cases}\frac{1}{2}\,\frac{-2x}{4-x^2} \text{ si } x\in[-1,1]\\ \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{x} \text{ si } x\in\,]1,+\infty[\\ \frac{1}{2}\,\frac{-1}{-x+2}-\frac{1}{2}\,\frac{-1}{(-x)} \text{ si } x\in\,]-\infty,-1[\end{cases}$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (T(h))'(x)=\begin{cases}\frac{x}{x^2-4} \text{ si } x\in[-1,1]\\ -\frac{1}{x(x+2)} \text{ si } x\in\,]1,+\infty[\\ \frac{1}{x(x-2)} \text{ si } x\in\,]-\infty,-1[\end{cases}$$

. Remarquons encore que :

$\forall x\in\mathbb{R}$, $(T(f))'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2-4} & \text{si } x\in[-1,1] \\ -\dfrac{1}{|x|(|x|+2)} & \text{si } x \in ]1,+\infty[ \\ \dfrac{1}{|x|(|x|+2)} & \text{si } x\in]-\infty,-1[ \end{cases}$.

**Remarque.-** Notons que $(T(f))'$ est impaire sur $\mathbb{R}$. Normal car c'est la dérivée de $T(f)$ qui est paire sur $\mathbb{R}$ car $f$ est paire sur $\mathbb{R}$.

**Exercice.-** Retrouver ce résultat en utilisant le résultat de § 1.

$\forall x\in[0,1]$, $(T(f))'(x) = \dfrac{x}{x^2-4} \leq 0$ et $\forall x\in]1,+\infty[$, $(T(f))'(x) = -\dfrac{1}{(x)(x+2)} < 0$.

$\forall x\in[-1,0]$, $(T(f))'(x) = \dfrac{x}{x^2-4} \geq 0$ et $\forall x\in]-\infty,-1[$, $(T(f))'(x) = \dfrac{1}{x(x-2)} > 0$.

$(T(f))'$ est positive sur $]-\infty,0]$ et négative sur $[0,+\infty[$.

$T(\ )$ est croissante sur $]-\infty,0]$ et décroissante sur $[0,+\infty[$.

$T(f)(0) = \frac{1}{2}\ln(4-0^2) = \ln 2$ et $(T(f))'(0)=0$. $T(f)(0) \simeq 0{,}69$.

$T(f)(1) = \frac{1}{2}\ln(4-1^2) = \frac{1}{2}\ln 3$ et $(T(f))'(1) = -\frac{1}{3}$. $T(f)(1) \simeq 0{,}55$

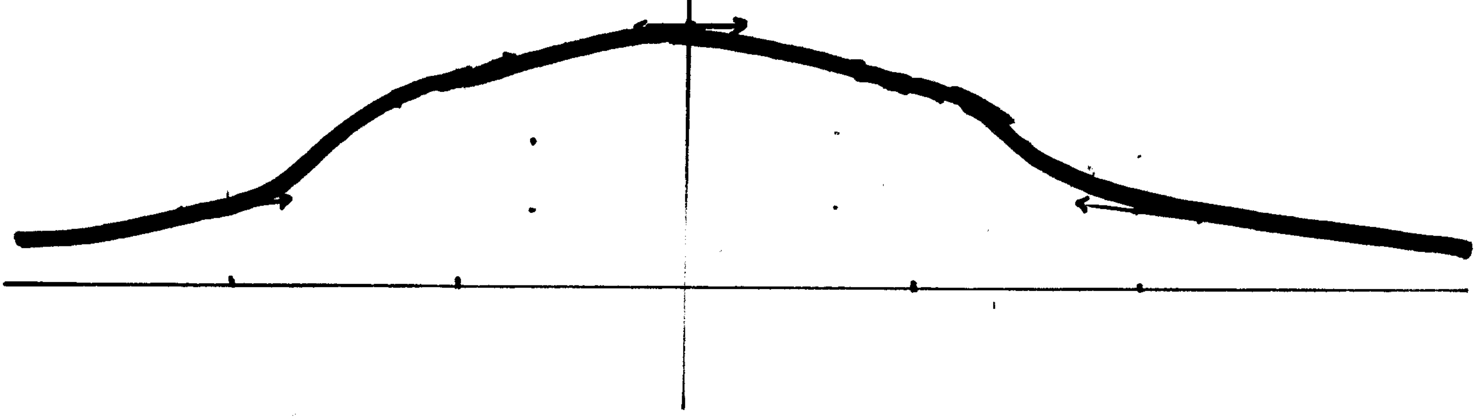
Rappelons que $T(f)$ est paire sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} T(f)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln(|x|+2) - \frac{1}{2}\ln|x|\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$. $\lim\limits_{x\to+\infty} T(f) = 0$

Notons que $T(f)(2) = \frac{1}{2}\ln 2 \simeq 0{,}35$ et $(T(f))'(2) = -\frac{1}{8}$

**Remarque.-** $T(f)$ est concave sur $[-1,1]$ et convexe sur $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$.
Notons que $T(f)$ est $C^2$ sur $\mathbb{R}-\{-1,0,1\}$ mais pas 2 fois dérivable en $-1, 0, 1$.



**Q13** Nous venons de voir que $\lim\limits_{x\to+\infty} T(f)(x)=0$. Comme $T(f)$ est paire sur $\mathbb{R}$ : $\lim\limits_{x\to-\infty} T(f)(x)=0$.

Or $\forall x\in[1,+\infty[,\ 0\leq f(x)=\frac{1}{|x|+1}=\frac{1}{x+1}\leq\frac{1}{x}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ diverge.

Alors les règles de comparaison sur les intégrales impropres de fonctions positives montrent que $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

La réciproque du résultat du résultat de Q9 est fausse.

## Partie IV : Recherche d'extrémums locaux pour une fonction réelle de deux variables réelles

**Q14** • $(x,y)\to x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[^2$, $F$ est $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$ et $\forall(x,y)\in\,]1,+\infty[^2,\ x\in\,]1,+\infty[$. Alors par composition $(x,y)\to F(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,+\infty[^2$.

• de même $(x,y)\to F(y)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[^2$

• $(x,y)\mapsto xy$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[^2$ (fonction polynôme ...), $F$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[$ et $\forall(x,y)\in\,]1,+\infty[^2,\ xy\in\,]1,+\infty[$.
Alors par composition $(x,y)\to F(xy)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[^2$.

Par combinaison linéaire, les trois points précédents montrent que $H$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[^2$.

$H$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]1,+\infty[^2$ donc $H$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[^2$ !

$\forall(x,y)\in\,]1,+\infty[^2,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=1\times F'(x)+0\times F'(y)-2\times y\,F'(xy)$

$\forall(x,y)\in\,]1,+\infty[^2,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x}-2y\left(\frac{1}{xy+2}-\frac{1}{xy}\right)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}-\frac{2y}{xy+2}.$

$\forall(x,y)\in\,]1,+\infty[,\ \frac{\partial H}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}-\frac{2y}{xy+2}.$ "en symétrie" :

$\forall(x,y)\in\,]1,+\infty[,\ \frac{\partial H}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{y+2}+\frac{1}{y}-\frac{2x}{xy+2}.$

notons que si $(x,y)$ appartient à $]1,+\infty[^2$ :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{(x+2)^2} - \frac{1}{x^2} + \frac{2y^2}{(xy+2)^2}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{4}{(xy+2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{1}{(y+2)^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{2x^2}{(xy+2)^2}.$$

**Q15** Rappelons que H est de classe $C^1$ sur $]1,+\infty[^2$. Soit $(x,y) \in ]1,+\infty[^2$.

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{2y}{xy+2} = 0 \Leftrightarrow (x+x+2)(xy+2) - 2y(x)(x+2) = 0.$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = 0 \Leftrightarrow 0 = (x+1)(xy+2) - x(x+2)y = x^2y + 2x + xy + 2 - x^2y - 2xy = 2x + 2 - xy.$$

De même $\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0$ si et seulement $2y + 2 - xy = 0$.

Alors $\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+2-xy=0 \\ 2y+2-xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 2x+2 \\ 0 = 2y+2-2x-2 = 2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2 = 2x+2 \end{cases}$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2-2x+1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ (x-1)^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=\sqrt{3}+1 \\ \text{ou} \\ x=y=-\sqrt{3}+1 \end{cases} \underset{(x,y)\in ]1,+\infty[^2}{\Leftrightarrow} x=y=1+\sqrt{3}$$

Ainsi H possède un point critique et un seul $(1+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$.

**Q15** Nous avons vu plus haut que H est de classe $C^2$ sur $]1,+\infty[^2$ et nous avons calculer les dérivées partielles secondes.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) \underset{x_0=y_0}{=} -\frac{1}{(x_0+2)^2} - \frac{1}{x_0^2} + \frac{2x_0^2}{(x_0^2+2)^2} = -\frac{1}{(3+\sqrt{3})^2} - \frac{1}{(1+\sqrt{3})^2} + \frac{2(1+\sqrt{3})^2}{((1+\sqrt{3})^2+2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) = -\frac{(3-\sqrt{3})^2}{6^2} - \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2^2} + \frac{2(1+\sqrt{3})^2}{4(3+\sqrt{3})^2} = -\frac{(3-\sqrt{3})^2}{6^2} - \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} + \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2\times 3\times(\sqrt{3}+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) = -\frac{1}{36}(9+3-6\sqrt{3}) - \frac{1}{4}(3+1-2\sqrt{3}) + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(-2+\sqrt{3} \quad 6+3\sqrt{3}+1) = \frac{1}{6}(4\sqrt{3}-7)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{1}{6}(4\sqrt{3}-7) \approx -1,2\times 10^{-2} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0,y_0) = \frac{1}{6}(4\sqrt{3}-7) \simeq -1,2\times 10^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = -\frac{4}{(x_0y_0+2)^2} = -\frac{4}{((1+\sqrt{3})^2+2)} = -\frac{4}{(6+2\sqrt{3})^2} = -\frac{4}{4(3+\sqrt{3})^2} = -\frac{(3-\sqrt{3})^2}{(9-3)^2} = -\frac{1}{36}(9+3-6\sqrt{3})$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = -\frac{1}{6}(2-\sqrt{3}) = \frac{1}{6}(\sqrt{3}-2) \simeq -4,5 \times 10^{-2}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 = \left(\frac{1}{6}(4\sqrt{3}-7)\right)^2 - \left(\frac{1}{6}(\sqrt{3}-2)\right)^2$$

$$= \frac{1}{36}\left[48+49-56\sqrt{3}-3-4+4\sqrt{3}\right]$$

$$= \frac{1}{36}\left[90-52\sqrt{3}\right] = \frac{1}{18}(45-26\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{18}\,\frac{(45)^2-(26\times\sqrt{3})^2}{45+26\sqrt{3}} = \frac{1}{18}\,\frac{2025-2028}{45+26\sqrt{3}} = \frac{-1}{6(45+26\sqrt{3})}$$

Ainsi $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 < 0$.

H n'admet pas d'extremum local sur $]1,+\infty[^2$.

Remarque.. Pour être plus précis...

1/ $(x_0,y_0)$ est le seul point critique de H.

2/ H est de classe $C^1$ sur l'ouvert $]1,+\infty[^2$ donc si H admet un extremum local en un point de $]1,+\infty[^2$ ce point est un point critique de H, c'est donc $(x_0,y_0)$

3/ H est de classe $C^2$ sur $]1,+\infty[^2$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) < 0$.

Les trois points précédents montrent que H n'a pas d'extremum local sur $]1,+\infty[^2$.

## PARTIE V : Transformée d'une densité.

**Q17** Soit $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. $T(f)$ et $x \mapsto x$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie l'intégration par partie qui suit.

$$\int_A^B T(f)(u)\,du = \int_A^B 1 \times T(f)(x)\,dx = \left[x\,T(f)(x)\right]_A^B - \int_A^B x\,(T(f))'(x)\,dx.$$

$$\int_A^B T(f)(x)\,dx = B\,T(f)(B) - A\,T(f)(A) - \int_A^B x\,\frac{1}{2}\left(f(x+1)-f(x-1)\right)dx.$$

$$\int_A^B T(f)(x)\,dx = B\,T(f)(B) - A\,T(f)(A) - \frac{1}{2}\int_A^B x\,f(x+1)\,dx + \frac{1}{2}\int_A^B x\,f(x-1)\,dx.$$ En faisant deux petits changements de variable il vient:

$$\int_A^B T(f)(x)dx = BT(f)(B) - AT(f)(A) - \frac12\int_{A+1}^{B+1}(x-1)f(x)dx + \frac12\int_{A-1}^{B-1}(x+1)f(x)dx.$$

$$\int_A^B T(f)(x)dx = BT(f)(B) - AT(f)(A) - \frac12\int_{A+1}^{B+1} x f(x)dx + \frac12\int_{A+1}^{B+1} f(x)dx + \frac12\int_{A-1}^{B-1} x f(x)dx + \frac12\int_{A-1}^{B-1} f(x)dx.$$

Notons que $-\frac12\int_{A+1}^{B+1} x f(x)dx + \frac12\int_{A-1}^{B-1} x f(x)dx = -\frac12\int_{A+1}^{A-1} x f(x)dx - \frac12\int_{A-1}^{B-1} x f(x)dx - \frac12\int_{B-1}^{B+1} x f(x)dx + \frac12\int_{A-1}^{B-1} x f(x)dx$

$$= \frac12\int_{A-1}^{A+1} x f(x)dx - \frac12\int_{B-1}^{B+1} x f(x)dx.$$

Alors $\int_A^B T(f)(x)dx = B\,\frac12\int_{B-1}^{B+1} f(x)dx - A\,\frac12\int_{A-1}^{A+1} f(x)dx + \frac12\int_{A-1}^{A+1} x f(x)dx - \frac12\int_{B-1}^{B+1} x f(x)dx + \frac12\int_{A+1}^{B+1} f(x)dx + \frac12\int_{A-1}^{B-1} f(x)dx.$

$$\int_A^B T(f)(x)dx = \frac12\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)dx - \frac12\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)dx + \frac12\int_{A+1}^{B+1} f(x)dx + \frac12\int_{A-1}^{B-1} f(x)dx.$$

---

**Q18** Soit $B \in \mathbb{R}$.

$$\left|\frac12\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)dx\right| \underset{f \text{ est positive sur } \mathbb{R}}{\le} \frac12\int_{B-1}^{B+1}|B-x|f(x)dx \underset{B-x\in[-1,1]}{\le} \frac12\int_{B-1}^{B+1} f(x)dx = T(f)(B).$$

$$\forall B\in\mathbb{R},\ \left|\frac12\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)dx\right| \le T(f)(B).$$

de même $\forall A\in\mathbb{R},\ \left|\frac12\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)dx\right| \le T(f)(A)$ !

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge donc $\lim_{B\to+\infty} T(f)(B) = \lim_{A\to-\infty} T(f)(A) = 0$.

Ainsi par encadrement : $\lim_{B\to+\infty}\left(\frac12\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)dx\right) = 0$ et $\lim_{A\to-\infty}\left(\frac12\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)dx\right) = 0$.

Rappelons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

Alors pour tout $A$ dans $\mathbb{R}$, $\underset{\text{converge et vaut}}{\lim_{B\to+\infty}\int_A^B T(f)(x)dx} = -\frac12\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)dx + \frac12\int_{A+1}^{+\infty} f(x)dx + \frac12\int_{A-1}^{+\infty} f(x)dx$

donc pour tout $A$ dans $\mathbb{R}$, $\int_A^{+\infty} T(f)(x)dx = -\frac12\int_{A-1}^{A+1}(A-x)f(x)dx + \frac12\int_{A+1}^{+\infty} f(x)dx + \frac12\int_{A-1}^{+\infty} f(x)dx$

En particulier $\int_0^{+\infty} T(f)(x)dx$ converge et vaut $-\frac12\int_{-1}^{1}(-x f(x))dx + \frac12\int_1^{+\infty} f(x)dx + \frac12\int_{-1}^{+\infty} f(x)dx$.

De même pour tout $B\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{A\mapsto-\infty}\int_A^B T(f)(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{B-1}^{B+1}(B-x)f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{B+1}f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{B-1}f(x)\,dx$.

Alors pour tout $B\in\mathbb{R}$ $\int_{-\infty}^{B}T(f)(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}\int_{B-1}^{B-1}(B-x)f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{B+1}f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{B-1}f(x)\,dx$

En particulier $\int_{-\infty}^{0}T(f)(x)\,dx$ converge et vaut $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-x f(x))\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1}f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1}f(x)\,dx$.

Alors $\int_{-\infty}^{+\infty}T(f)(x)\,dx$ converge et vaut $-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-x f(x))\,dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{+\infty}f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(-x f(x))\,dx +$

$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1}f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1}f(x)\,dx$ ou $\frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty}f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{+\infty}f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1}f(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1}f(x)\,dx$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty}T(f)(x)\,dx$ converge et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt$ donc 1.

Rappelons que $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, $x-1\leq x+1$ et $f$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\int_{x-1}^{x+1}f(t)\,dt\geq 0$. Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ T(f)(x)\geq 0$.

Ceci achève de montrer que si $f\in E$ et si $f$ est une densité de probabilité, $T(f)$ est une densité de probabilité.

# PROBLÈME 2

## Partie I : Quelques généralités

**Q1**
- $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $AM \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\phi_A(M) = AM - MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  $\phi_A$ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

$\phi_A(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) - (\lambda M + N)A = \lambda AM + AN - \lambda MA - NA = \lambda(AM - MA) + (AN - NA) = \lambda \phi_A(M) + \phi_A(N)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (M, N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2$, $\phi_A(\lambda M + N) = \lambda \phi_A(M) + \phi_A(N)$. $\phi_A$ est linéaire.

Ainsi $\phi_A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**Q2** $\phi_A(I_n) = AI_n - I_n A = A - A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $I_n$ est un élément non nul du noyau de $\phi_A$. Donc $\phi_A$ n'est pas un endomorphisme injectif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $\phi_A$ ne peut pas être surjectif car il n'est pas injectif.

$\phi_A$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ni injectif ni surjectif.

## Partie II : Étude d'un cas particulier

**Q3** $A$ est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les éléments diagonaux sont $1$ et $3$.

Alors le spectre de $A$ est $\{1, 3\}$. Comme $1 \neq 3$ et que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ :

$A$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}\, A = \{1, 3\}$.

**Q4** $\phi_A(E_{1,1}) = AE_{1,1} - E_{1,1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_{1,2}$.

$\phi_A(E_{1,2}) = AE_{1,2} - E_{1,2}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -2E_{1,2}$.

$\phi_A(E_{2,1}) = AE_{2,1} - E_{2,1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 2E_{2,1} - E_{2,2}$.

$\phi_A(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$

Ainsi la matrice de $\phi_A$ dans la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{Im}\,\phi_A = \mathrm{Vect}(\phi_A(E_{1,1}), \phi_A(E_{1,2}), \phi_A(E_{2,1}), \phi_A(E_{2,2})) = \mathrm{Vect}(-E_{1,2}, -2E_{1,2}, E_{1,1}+2E_{2,1}-E_{2,2}, E_{1,2})$.

$\mathrm{Im}\,\phi_A = \mathrm{Vect}(E_{1,2}, E_{1,1}+2E_{2,1}-E_{2,2})$.

Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\alpha E_{1,2} + \beta(E_{1,1}+2E_{2,1}-E_{2,2}) = 0_{M_2(\mathbb{R})}$.

$\beta E_{1,1} + \alpha E_{1,2} + 2\alpha E_{2,1} - \beta E_{2,2} = 0_{M_2(\mathbb{R})}$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$ :

$\beta = \alpha = 2\alpha = -\beta = 0$. $\alpha = \beta = 0$.

ceci achève de montrer que la famille $(E_{1,2}, E_{1,1}+2E_{2,1}-E_{2,2})$ est libre.

c'est donc une famille génératrice et libre de deux éléments de $\mathrm{Im}\,\phi_A$.

c'est donc une base de cardinal 2 de $\mathrm{Im}\,\phi_A$.

Ainsi $\dim \mathrm{Im}\,\phi_A = 2$. le rang de $\phi_A$ est 2.

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2.

Remarque.. Alors $\mathrm{Ker}\,\phi_A$ est de dimension 2. Ainsi 0 est valeur propre de $\phi_A$ et $\dim SEP(\phi_A, 0) = 2$.

Il est aisé alors de montrer que $SEP(\phi_A, 0) = \mathrm{Vect}(E_{1,1}+E_{2,2}, 2E_{1,1}-E_{2,2})$

Q5 Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $M = xE_{1,1} + yE_{1,2} + zE_{2,1} + tE_{2,2}$ un élément de $M_2(\mathbb{R})$.

$\phi_A(M) = \lambda M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda x \\ -x-2y+t = \lambda y \\ 2z = \lambda z \\ -z = \lambda t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \lambda x = -\lambda t \\ (2-\lambda)z = 0 \\ x + (2+\lambda)y - t = 0 \end{cases}$

1er cas.. $\lambda = 0$

$\phi_A(M) = \lambda M \Leftrightarrow \phi_A(M) = 0_{M_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow M \in \mathrm{Ker}\,\phi_A$.

le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Ker}\,\phi_A = \dim M_2(\mathbb{R}) - \mathrm{rg}\,\phi_A = 4-2 = 2$. Ainsi 0 est valeur propre de $\phi_A$ et $\dim SEP(\phi_A, 0) = 2$.

Exercice.. montrer que $(E_{1,1}+E_{2,2}, 2E_{1,1}\ E_{1,2})$ est une base de $SEP(A,0)$

<u>2ième cas</u>.. $\lambda \neq 0$

$$\phi_A(M) = \lambda M \iff \begin{cases} t = -z \\ z = \lambda x \\ -(2-\lambda) z = 0 \\ x + (2+\lambda) y - t = 0 \end{cases}$$

a) <u>$\lambda = 2$</u>

$$\phi_A(M) = 2M \iff \begin{cases} t = -z \\ z = 2x \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \\ z = -4y \\ t = 2y \end{cases}.$$

$$\mathrm{Ker}(\phi_A - 2\,\mathrm{Id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \mathrm{Vect}(-2E_{1,1} + E_{1,2} - 4E_{2,1} + 2E_{2,2}).$$

Ainsi 2 est valeur propre de $\phi_A$ et le sous-espace propre associé est de dimension 2.

b) <u>$\lambda \neq 2$</u>

$$\phi_A(M) = \lambda M \iff \begin{cases} z = 0 \\ \lambda x = 0 \\ t = -z \\ 2x + (2+\lambda) y = 0 \end{cases} \overset{\lambda \neq 0}{\iff} \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ t = 0 \\ (\lambda+2) y = 0 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq -2$ $\quad \phi_A(M) = \lambda M \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ t = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff M = 0_{M_2(\mathbb{R})}$ et $\lambda$ n'est pas valeur propre de $\phi_A$.

Supposons $\lambda = -2$. $\quad \phi_A(M) = -2M \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$

Alors $\mathrm{Ker}(\phi_A(M) - (-2)\,\mathrm{Id}_{M_2(\mathbb{R})}) = \mathrm{Vect}(E_{1,2})$.

$-2$ est valeur propre de $\phi_A$ et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

<u>Les valeurs propres de $\phi_A$ sont : $-2, 0, 2$.</u>

$\dim SEP(\phi_A, -2) + \dim SEP(\phi_A, 0) + \dim SEP(\phi_A, 2) = 1 + 2 + 1 = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$.

Ainsi <u>$\phi_A$ est diagonalisable.</u>

<u>Remarque</u>.- $\mathrm{Sp}\,\phi_A = \{\lambda - \mu \,;\, (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}\,A\}$ car $\mathrm{Sp}\,A = \{1, 3\}$ et $\mathrm{Sp}\,\phi_A = \{-2, 0, 2\}$

<u>Exercice</u>.- Trouver une base de $M_2(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $\phi_A$.

<u>Remarque</u>.- Nous aurions pu aller beaucoup plus vite pour trouver les valeurs propres de $\phi_A$ et la dimension de ses sous-espaces propres.

# PARTIE III : Étude du cas où A est diagonalisable

**Q6** A est diagonalisable. Alors il existe une matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP = D$.

Alors $D = {}^tD = {}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1} = {}^tP\,{}^tA\,({}^tP)^{-1}$.

Ainsi ${}^tA$ est semblable à la matrice diagonale $D$. ${}^tA$ est diagonalisable.

De plus $Sp\,{}^tA = Sp\,D = Sp\,A$.

A et ${}^tA$ ont les mêmes valeurs propres.

**Q7** • Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $X\,{}^tY = (x_i\,y_j)$ et $X$ et $Y$ sont des vecteurs propres.

$X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $Y \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\exists (i_0, j_0) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $x_{i_0} \neq 0$ et $y_{j_0} \neq 0$.

Alors $x_{i_0}\,y_{j_0} \neq 0$. Donc $X\,{}^tY$ possède un élément non nul. $X\,{}^tY \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

• $\phi_A(X\,{}^tY) = AX\,{}^tY - X\,{}^tY A = (AX)\,{}^tY - X\,{}^t({}^tAY)$.

$X$ (resp. $Y$) est un vecteur propre de $A$ (resp. de ${}^tA$).

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$, $AX = \lambda X$ et $\exists \mu \in \mathbb{R}$, ${}^tAY = \mu Y$.

Ainsi $\phi_A(X\,{}^tY) = \lambda X\,{}^tY - X\,{}^t(\mu Y) = \lambda X\,{}^tY - X(\mu\,{}^tY) = (\lambda - \mu)\, X\,{}^tY$.

$\phi_A(X\,{}^tY) = (\lambda - \mu)\, X\,{}^tY$

Ainsi $X\,{}^tY$ est un vecteur propre de $\phi_A$.

**Q8** Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$

$(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ sont deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ainsi $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\exists (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, $V_i = \sum_{k=1}^n \lambda_k X_k$ et

$V_j = \sum_{\ell=1}^n \beta_\ell Y_\ell$

Alors $V_i\,{}^tV_j = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k\right) {}^t\left(\sum_{\ell=1}^n \beta_\ell Y_\ell\right) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^n \beta_\ell\,{}^tY_\ell\right)$

Donc $V_i\,{}^tV_j = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \lambda_k \beta_\ell\, X_k\,{}^tY_\ell$. $V_i\,{}^tV_j \in \mathrm{Vect}\left((X_k\,{}^tY_\ell)_{(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2}\right) = \mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$

$V_i\,{}^tV_j$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$ et ceci pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

Alors le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$ contient le sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(V_i {}^tV_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$ qui n'est autre que la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

Ainsi le sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ engendré par $\mathcal{F}$ est contenu dans $M_n(\mathbb{R})$ et contient $M_n(\mathbb{R})$. C'est donc $M_n(\mathbb{R})$.

Alors $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $M_n(\mathbb{R})$ de cardinal $n^2$ et $\dim M_n(\mathbb{R})=n^2$.

Ainsi $\mathcal{F}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$.

**Q9** A et ${}^tA$ sont diagonalisables.

Soit $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ (resp. $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$) une base de $M_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A (resp ${}^tA$).

1) $(U_i {}^tT_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ d'après Q 8.

2) Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $U_i {}^tT_j$ est un vecteur propre de $\phi_A$ d'après Q7.

Ainsi $(U_i {}^tT_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $\phi_A$. $\phi_A$ est diagonalisable.

**Q10** Reprenons les notations de Q 9. Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ notons $u_i$ la valeur propre de A associée à $U_i$. Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$ notons $t_j$ la valeur propre de ${}^tA$ associée à $T_j$. $(U_i {}^tT_j)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(i,j)$ appartenant à $[\![1,n]\!]^2$, $U_i {}^tT_j$ est un vecteur propre de $\phi_A$ associé à la valeur propre $u_i-t_j$. Alors $Sp\,\phi_A=\{u_i-t_j\,;\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2\}$.

Or $Sp\,A=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ et $Sp\,{}^tA=\{t_1,t_2,\ldots,t_n\}$.

Ainsi $Sp\,\phi_A=\{\lambda-\mu\,;\,(\lambda,\mu)\in Sp\,A\times Sp\,{}^tA\}=\{\lambda-\mu\,;\,(\lambda,\mu)\in(Sp\,A)^2\}$

$Sp\,{}^tA=Sp\,A$ (d'après Q6).

$Sp\,\phi_A=\{\lambda-\mu\,;\,(\lambda,\mu)\in(Sp\,A)^2\}$

PARTIE IV : Étude d'un sous-espace propre de $\phi_A$ associé à une valeur propre non nulle

(Q11) • $\phi_A(T^0) = \phi_A(I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = \lambda \times 0 \times I_n = \lambda \times 0 \times T^0$.

La propriété est vraie pour $k=0$

• Supposons la propriété vraie pour un élément $k$ de $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$\phi_A(T^{k+1}) = AT^{k+1} - T^{k+1}A = (AT^k)T - T^{k+1}A \underset{1}{=} (T^kA + \lambda k T^k)T - T^{k+1}A$.

hypothèse de récurrence... $AT^k + T^kA = \lambda k T^k$.

$\phi_A(T^{k+1}) = T^kAT + \lambda k T^{k+1} - T^{k+1}A \underset{4}{=} T^k(TA + \lambda T) + \lambda k T^{k+1} - T^{k+1}A$.

$\phi_A(T) = \lambda T$... $AT - TA = \lambda T$.

$\phi_A(T^{k+1}) = T^{k+1}A + \lambda T^{k+1} + \lambda k T^{k+1} - T^{k+1} = \lambda(k+1)T^{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N},\ \phi_A(T^k) = \lambda k T^k$.

Posons $\mathcal{S} = \{k \in [\![0, n^2]\!] \mid T^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$. Supposons $\mathcal{S}$ vide. Alors $\forall k \in [\![0, n^2]\!]$, $T^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors $\forall k \in [\![0, n^2]\!]$, $T^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\phi_A(T^k) = (\lambda k)T^k$.

Ainsi $0, \lambda, \dots, \lambda \times n^2$ sont $n^2+1$ valeurs propres deux à deux distinctes ($\lambda$ est différent de 0...) de $\phi_A$ qui est un endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension $n^2$. Ceci est impossible. Alors $\mathcal{S} \neq \emptyset$. $\exists q \in [\![0, n^2]\!]$, $T^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Notons que $T^0 = I_n \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi il existe un entier $q$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $q \leq n^2$.

Posons $\hat{\mathcal{S}} = \{k \in \mathbb{N}^*,\ T^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$. D'après ce qui précède $\hat{\mathcal{S}}$ n'est pas vide car il contient $q$.

$\hat{\mathcal{S}}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Alors $\hat{\mathcal{S}}$ possède un plus petit élément $p$.

$p \in \mathbb{N}^*$, $T^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $T^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi il existe un élément $p$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $T^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Alors il existe un élément $p$ de $\mathbb{N}^*$ tel que $T^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $T^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

**Q13** $T^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $T^{p-1}$ possède une colonne non nul.

Alors $\exists j_0 \in [\![1,n]\!]$, $T^{p-1} V_{j_0} \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. ($\forall k \in [\![1,n]\!]$, $T^{p-1}V_k$ est la $k^{ième}$ colonne de $T^{p-1}$).

Ainsi $\underline{\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ T^{p-1}X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}}$.

Soit $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{\ell=0}^{p-1} \gamma_\ell T^\ell X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Montrons par récurrence sur $k$ que $\forall k \in [\![0,p-1]\!]$, $\forall i \in [\![0,k]\!]$, $\gamma_i = 0$. $\quad \forall j \in [\![p,+\infty[\![$, $T^j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

- $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = T^{p-1} 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = T^{p-1}\left(\sum_{\ell=0}^{p-1} \gamma_\ell T^\ell X\right) = \sum_{\ell=0}^{p-1} \gamma_\ell T^{p-1+\ell} X \overset{\downarrow}{=} \gamma_0 T^{p-1} X$.

  Or $T^{p-1}X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\gamma_0 = 0$.

- Soit $k \in [\![0, p-2]\!]$ tel que $\forall i \in [\![0,k]\!]$, $\gamma_i = 0$. Montrons que $\forall i \in [\![0,k+1]\!]$, $\gamma_i = 0$.

  Il ne reste plus qu'à montrer que $\gamma_{k+1} = 0$.

  $\sum_{r=0}^{p-1} \gamma_r T^r X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Par hypothèse de récurrence : $\sum_{r=k+1}^{p-1} \gamma_r T^r X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

  $0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} = T^{p-2-k}\left(0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}\right) = T^{p-2-k}\left(\sum_{r=k+1}^{p-1} \gamma_r T^r X\right) = \sum_{r=k+1}^{p-1} \gamma_r T^{p-2-k+r} X \underset{\substack{\uparrow \\ \forall j \in [\![p,+\infty[\![,\ T^j = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}}}{=} \gamma_{k+1} T^{p-1} X$.

  Or $T^{p-1}X \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\gamma_{k+1} = 0$. Ce qui achève la récurrence.

  La propriété est vraie pour $p-1$ donc $\forall i \in [\![0,p-1]\!]$, $\gamma_i = 0$.

  Alors $\forall (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, $\sum_{k=0}^{p-1} \gamma_k T^k X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow \gamma_0 = \gamma_1 = \dots = \gamma_{p-1} = 0$

  <u>Ainsi $(X, TX, \dots, T^{p-1}X)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.</u>

  Cette famille est de cardinal $p$ et la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est $n$.

  Alors $\underline{p \leq n}$.

## PARTIE V : Étude du cas où A est symétrique.

**Q14** • Notons que $(\cdot|\cdot)$ est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$, $N = (n_{i,j})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$, $P = (p_{i,j})_{\in [\![1,n]\!]^2}$

$\rightarrow (\lambda M + N | P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\lambda m_{i,j} + n_{i,j}) p_{i,j} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} p_{i,j} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} n_{i,j} p_{i,j}$.

$(\lambda M + N | P) = \lambda (M, P) + (N|P)$.

→ $(M|N)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}\, n_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} n_{ij}\, m_{i,j} = (N|M)$.

→ $(M|M)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^2 \geq 0$.

→ Supposons que $(M|M)=0$. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}^{\,2}=0$ et $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ m_{ij}^{\,2}\geq 0$

Alors $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j}^{\,2}=0$

donc $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j}=0$. Ainsi $M=0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Résumons. 1/ $(\cdot|\cdot)$ est une application de $M_n(\mathbb{R})\times M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

2/ $\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall (M,N,P)\in (M_n(\mathbb{R}))^3,\ (\lambda M+N|P)=\lambda (M|P)+(N|P)$.

3/ $\forall (M,N)\in (M_n(\mathbb{R}))^2,\ (M|N)=(N|M)$.

4/ $\forall M\in M_n(\mathbb{R}),\ (M|M)\geq 0$.

5/ $\forall M\in M_n(\mathbb{R}),\ (M|M)=0 \Rightarrow M=0_{M_n(\mathbb{R})}$.

Ceci suffit pour dire que <u>$(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.</u>

<u>Remarque</u>.. $(\cdot|\cdot)$ est le produit canonique de $M_n(\mathbb{R})$.
C'est l'unique produit scalaire de $M_n(\mathbb{R})$ qui rend la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$ orthonormée.

<u>Exercice</u>.. Montrer que $\forall (M,N)\in (M_n(\mathbb{R}))^2,\ (M|N)=\operatorname{tr}({}^tMN)$ (trace)

**Q15** Soient $M=(m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $N=(n_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ deux éléments de $M_n(\mathbb{R})$. Posons $I_n=(\delta_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ et $M{}^tN=(p_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

$$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ \delta_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \quad \text{et} \quad p_{i,j}=\sum_{\ell=1}^{n} m_{i,\ell}\, n_{j,\ell}.$$

$$(M{}^tN, I_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{i,j}\,\delta_{i,j}=\sum_{i=1}^{n} p_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} m_{i,\ell}\, n_{i,\ell}=(M|N).$$

<u>$\forall (M,N)\in (M_n(\mathbb{R}))^2,\ (M|N)=(M{}^tN, I_n)$.</u>

**Q16** Notons que $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ est une base orthonormée de vecteurs propres de $A$.(*)
Alors $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ \langle C_i, C_j\rangle=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$ ( $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est le produit scalaire canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$).

(*) car P est orthogonale de $M_n(\mathbb{R})$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, ${}^t C_i C_j = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

**Q17** Posons $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = \begin{pmatrix} d_1^{(j)} \\ d_2^{(j)} \\ \vdots \\ d_n^{(j)} \end{pmatrix}$. ← On aurait pu poser $P = (P_{i,j})$. Alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = \begin{pmatrix} P_{1,j} \\ P_{2,j} \\ \vdots \\ P_{n,j} \end{pmatrix}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $C_i {}^t C_j = \left( d_p^{(i)} \times d_q^{(j)} \right)_{(p,q) \in [\![1,n]\!]^2}$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, les coefficients diagonaux de $C_i {}^t C_j$ sont $d_1^{(i)} d_1^{(j)}, d_2^{(i)} d_2^{(j)}, \dots, d_n^{(i)} d_n^{(j)}$. ou $P_{1,i} \times P_{1,j}, P_{2,i} \times P_{2,j}, \dots, P_{n,i} \times P_{n,j}$ avec $P = (P_{i,j})$.

$(C_i {}^t C_j | I_n)$ est la somme des éléments diagonaux de $C_i {}^t C_j$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$(C_i {}^t C_j | I_n) = \sum_{\ell=1}^{n} d_\ell^{(i)} d_\ell^{(j)} = \langle C_i, C_j \rangle = {}^t C_i C_j = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $(C_i {}^t C_j | I_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

**Q18** Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$. $(C_i {}^t C_j | C_k {}^t C_\ell) = (C_i {}^t C_j {}^t (C_k {}^t C_\ell) | I_n)$.

$(C_i {}^t C_j | C_k {}^t C_\ell) = (C_i {}^t C_j C_\ell {}^t C_k | I_n)$.

Si $j \neq \ell$ : ${}^t C_j C_\ell = 0$ et : $(C_i {}^t C_j | C_k {}^t C_\ell) = (0_{M_n(\mathbb{R})} | I_n) = 0$.

Si $j = \ell$ ${}^t C_j C_\ell = 1$ et : $(C_i {}^t C_j | C_k {}^t C_\ell) = (C_i {}^t C_k | I_n) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Alors $(C_i {}^t C_j | C_k {}^t C_\ell) = \begin{cases} 1 \text{ si } i=k \text{ et } j=\ell \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

$\forall (i,j,k,\ell) \in \mathbb{R}^4$, $(C_i {}^t C_j | C_k {}^t C_\ell) = \begin{cases} 1 \text{ si } (i,j) = (k,\ell) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

**Q19** D'après Q18, $\mathcal{G}$ est une famille orthonormée de cardinal $n^2$ de $(M_n(\mathbb{R}), (\cdot|\cdot))$ et $\dim M_n(\mathbb{R}) = n^2$

Alors $\mathcal{G}$ est une base orthonormée de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid (\cdot|\cdot))$.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_i$ et $c_j$ sont des vecteurs propres de $A$ et $A$ est symétrique.

Alors pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_i$ est un vecteur propre de $A$ et $c_j$ un vecteur propre de ${}^tA$.

Ainsi pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_i {}^t c_j$ est un vecteur propre de $\phi_A$.

Alors __$\mathcal{G}$ est une base orthonormée pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et__

__$\mathcal{G}$ est constituée de vecteurs propres de $\phi_A$.__

__Exercice__ .. Montrer que $\phi_A$ est un endomorphisme symétrique de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (\cdot|\cdot))$.