LYON 2000 DEUXIÈME PROBLÈME

I Calcul d'une somme et d'une intégrale.

1. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et x un élément de $[0,\pi]$.

$1+2\,C_n(x) = 1+\sum\limits_{k=1}^{n} 2\cos(kx) = 1+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right) = 1+\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx}+\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-ikx}.$

Or $1=e^{i0x}$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{-ikx} = \sum\limits_{k=-n}^{-1} e^{ikx}$. Donc $1+2\,C_n(x) = e^{i0x}+\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ikx}+\sum\limits_{k=-n}^{-1} e^{ikx} = \sum\limits_{k=-n}^{n} e^{ikx}$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,\pi],\ 1+2\,C_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}}.$$

b. Soient n un élément de $\mathbb{N}^*$ et z un élément de $\mathbb{C}$ différent de 1 **<u>et de 0</u>**.

$\sum\limits_{k=-n}^{n} z^k$ est la somme de $2n+1$ termes consécutifs d'une suite géométrique de raison z le premier étant z^{-n}.

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} z^k = z^{-n}\ \frac{1-z^{2n+1}}{1-z}\cdot$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall z\in\mathbb{C}-\{0,1\},\ \sum_{k=-n}^{n} z^k = z^{-n}\ \frac{1-z^{2n+1}}{1-z}}.$$

c. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et x un élément de $]0,\pi]$. e^{ix} est un élément de $\mathbb{C}$ différent de 1 et 0 donc :

$$1+2\,C_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n}\left(e^{ix}\right)^k = \left(e^{ix}\right)^{-n}\ \frac{1-\left(e^{ix}\right)^{2n+1}}{1-e^{ix}} = e^{-inx}\ \frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}\cdot$$

$$1+2\,C_n(x) = e^{-inx}\ \frac{e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}}\ \frac{e^{-i\frac{2n+1}{2}x}-e^{i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}} = e^{ix\left(-n+\frac{2n+1}{2}-\frac{1}{2}\right)}\ \frac{-2i\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot$$

$1+2\,C_n(x) = e^{ix0}\ \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\,x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot$ En divisant par 2 il vient : $\dfrac{1}{2}+C_n(x) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\,\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in]0,\pi],\ \frac{1}{2}+C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right)}{2\,\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}}.$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons : $\forall x\in]0,\pi],\ f_n(x) = \dfrac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x\right)}{2\,\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}\cdot$

f_n coïncide sur $]0,\pi]$ avec $\dfrac{1}{2}+C_n$ qui est continue sur $[0,\pi]$. f_n est donc continue sur $]0,\pi]$ et prolongeable par continuité en 0. Ceci suffit pour obtenir la convergence de $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

De plus $J_n = \displaystyle\int_0^\pi f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \Big(\frac{1}{2} + C_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(kt)}{k}\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}\cdot$

$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N}^*,\ J_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{2\sin\big(\frac{t}{2}\big)}\,\mathrm{d}t \text{ existe et vaut } \frac{\pi}{2}}$.

3. $x \to \cos(ax) - 1$ et $x \to \sin\dfrac{x}{2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus cette dernière fonction ne s'annule pas sur $]0,\pi]$. Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$.

$$\frac{\cos(ax)-1}{\sin\frac{x}{2}} = -\frac{1-\cos(ax)}{\sin\frac{x}{2}} \underset{0}{\sim} -\frac{\frac{(ax)^2}{2}}{\frac{x}{2}} = -a^2x.$$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(ax)-1}{\sin\frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0}(-a^2x) = 0 = \varphi(0)$. Ainsi φ est continue en 0.

φ est donc continue sur $[0,\pi]$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$. Pour montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème "de la limite de la dérivée" nous indique alors qu'il suffit de prouver que la restriction de φ' à $]0,\pi]$ admet une limite finie en 0.

$$\forall x \in]0,\pi],\ \varphi'(x) = \frac{1}{(\sin\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos(ax)-1\right)\cos\frac{x}{2}\right]\cdot$$

$$\frac{1}{(\sin\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos(ax)-1\right)\cos\frac{x}{2}\right] \underset{0}{\sim} \frac{1}{(\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos(ax)-1\right)\cos\frac{x}{2}\right]\cdot$$

Conditionnons le second membre pour en trouver plus simplement sa limite en 0.

$$\frac{1}{(\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos(ax)-1\right)\cos\frac{x}{2}\right] = -2a^2\,\frac{\sin(ax)}{ax}\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} + 2a^2\cos\frac{x}{2}\,\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}\cdot$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 1$. De plus $\displaystyle\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} \underset{0}{\sim} \frac{\frac{(ax)^2}{2}}{(ax)^2} = \frac{1}{2}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left[-2a^2\,\frac{\sin(ax)}{ax}\,\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} + 2a^2\cos\frac{x}{2}\,\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}\right] = -2a^2\times 1\times 1 + 2a^2\times 1\times\frac{1}{2} = -a^2.$

Ou $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{(\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos(ax)-1\right)\cos\frac{x}{2}\right]\right) = -a^2.$

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{(\sin\frac{x}{2})^2}\left[-a\sin(ax)\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left(\cos(ax)-1\right)\cos\frac{x}{2}\right] = -a^2 \quad (*).$

Ceci achève de montrer que $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,\pi]}$ et donne également $\boxed{\varphi'(0) = -a^2}$.

<u>Remarque</u> *On peut aisément trouver la limite* $(*)$ *en utilisant des développements limités.*

4. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Une intégration par parties simple donne :

$I_n = \displaystyle\int_0^\pi \varphi(t)\ \sin\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)\,\mathrm{d}t = \left[\varphi(t)\Big(-\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{n+\frac{1}{2}}\Big)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \varphi'(t)\ \Big(-\frac{\cos((n+\frac{1}{2})t)}{n+\frac{1}{2}}\Big)\,\mathrm{d}t$ car les fonctions φ et $t \to -\dfrac{\cos\big((n+\frac{1}{2})t\big)}{n+\frac{1}{2}}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$. Notons que $\varphi(0) = 0$ et que $\cos\big((n+\frac{1}{2})\pi\big) = 0$.

On obtient alors : $I_n = \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}\displaystyle\int_0^\pi \varphi'(t)\ \cos\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)\,\mathrm{d}t.$

$|I_n| = \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}} \left| \displaystyle\int_0^\pi \varphi'(t)\ \cos\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^\pi |\varphi'(t)|\ |\cos\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)|\, \mathrm{d}t.$

$|I_n| \leqslant \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}} \displaystyle\int_0^\pi |\varphi'(t)|\, \mathrm{d}t.$ Par encadrement il vient sans difficulté $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$.

<u>Remarque</u> *Il n'aura échappé à personne que nous venons de (re)démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue ou presque...*

II Calcul de la somme d'une série

1. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(at)\ \cos(kt)\, \mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(at)\ \sum_{k=1}^n \cos(kt)\, \mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(at)\ C_n(t)\, \mathrm{d}t.$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \int_0^\pi \cos(at)\ \Big(-\frac{1}{2} + C_n(t) + \frac{1}{2}\Big)\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos(at)\, \mathrm{d}t + \int_0^\pi \cos(at)\Big(C_n(t) + \frac{1}{2}\Big)\, \mathrm{d}t.$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(at)}{a}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \big(\cos(at) - 1\big)\Big(C_n(t) + \frac{1}{2}\Big)\, \mathrm{d}t + \int_0^\pi \Big(C_n(t) + \frac{1}{2}\Big)\, \mathrm{d}t.$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \int_0^\pi \big(\cos(at) - 1\big)\ \frac{\sin\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)}{2\sin\frac{t}{2}}\, \mathrm{d}t + \int_0^\pi \frac{\sin\Big(\big(n+\frac{1}{2}\big)t\Big)}{2\sin\frac{t}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(t)\ \sin\bigg(\Big(n+\frac{1}{2}\Big)t\bigg)\, \mathrm{d}t + J_n.\ \text{Ainsi :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}\, I_n + J_n}.$$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\dfrac{1}{2}\ I_n\Big) = 0$ (d'après I.4.) et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_n = \dfrac{\pi}{2}$ (d'après I.2.).

Ainsi : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^n u_k = -\dfrac{\sin(\pi a)}{2a} + \dfrac{\pi}{2}\cdot$

Par conséquent $\boxed{\text{la série de terme général } u_n \text{ converge et : } \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}}$.

3. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos(at)\ \cos(nt)\, \mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi \Big(\cos(at+nt) + \cos(at-nt)\Big)\, \mathrm{d}t.$

$$u_n = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(at+nt)}{a+n} + \frac{\sin(at-nt)}{a-n}\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a\pi+n\pi)}{n+a} - \frac{\sin(a\pi-n\pi)}{n-a}\right).$$

Or $\sin(a\pi+n\pi) = (-1)^n\sin(\pi a)$ et $\sin(a\pi-n\pi) = (-1)^n\sin(\pi a)$. Par conséquent :

$$u_n = \frac{1}{2}\ (-1)^n\ \sin(\pi a)\ \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n-a}\right) = \frac{1}{2}\ (-1)^n\ \sin(\pi a)\ \frac{(-2a)}{n^2-a^2}\cdot \text{ Finalement :}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{(-1)^{n-1}a\sin(\pi a)}{n^2-a^2}}.$$

4. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\sin(\pi a)}{2a} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} a \sin(\pi a)}{n^2 - a^2} = \frac{\sin(\pi a)}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1} a}{n^2 - a^2}\cdot$

En divisant par $\dfrac{\sin(\pi a)}{2}$ qui n'est pas nul, car a est un réel de l'intervalle $]0,1[$, il vient :

$\dfrac{\pi}{\sin(\pi a)} - \dfrac{1}{a} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1} a}{n^2 - a^2}\cdot$ Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1} a}{n^2 - a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}}.$$

III Calcul d'une intégrale

1. Posons : $\forall t \in]0,+\infty[,\ f(t) = \dfrac{1}{1+t^\alpha}$. f est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

$\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{1}{1+t^\alpha} = 1$; f est donc prolongeable par continuité en 0 et ainsi $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe.

$f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$ et f est positive, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. Comme α est strictement supérieur à 1, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ existe et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ également. Finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ existe.}}$$

2.a. Ici, pour être dans l'esprit du texte, nous considérerons que $t \to t^\alpha$ est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

Soit t un élément de $[0,1]$ et soit n un élément de $\mathbb{N}$. Observons que $-t^\alpha$ est différent de 1.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ t^{k\alpha} + (-1)^{n+1}\ \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-t^\alpha)^k + (-1)^{n+1}\ \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} = \frac{1-(-t^\alpha)^{n+1}}{1-(-t^\alpha)} + \frac{(-t^\alpha)^{n+1}}{1+t^\alpha} = \frac{1}{1+t^\alpha}\cdot$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ \frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\ t^{k\alpha} + (-1)^{n+1}\ \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}}.$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} \leqslant t^{(n+1)\alpha}$.

En intégrant entre 0 et 1 il vient : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{(n+1)\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{(n+1)\alpha+1}}{(n+1)\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)\alpha+1}\cdot$

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(n+1)\alpha+1}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)\alpha+1} = 0$, on obtient par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = 0}.$$

c. En intégrant l'égalité de Q2. a. on obtient : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{k\alpha}\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[\frac{t^{k\alpha+1}}{k\alpha+1}\right]_0^1 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

$\displaystyle\left|(-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$; Q2. b. donne alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left((-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\right) = 0$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = G(\alpha)$.

Donc $\boxed{\text{la série de terme général } \dfrac{(-1)^k}{k\alpha+1} \text{ converge et } G(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+1}}$.

3. a. Soit A un réel strictement positif. Dans $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ effectuons le changement de variable $u = t^{1-\alpha}$ ($t = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{1-\alpha}\, u^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\mathrm{d}u = \dfrac{1}{1-\alpha}\, u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\mathrm{d}u$).

Alors $\displaystyle\int_1^A \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \int_1^{A^{1-\alpha}} \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}\,\frac{1}{1-\alpha}\, u^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1-\alpha}\int_1^{A^{1-\alpha}} \frac{1}{u^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}+1}\,\mathrm{d}u$.

$\displaystyle\int_1^A \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\int_{A^{1-\alpha}}^1 \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\,\mathrm{d}u \quad (**)$.

Comme $1-\alpha$ est strictement négatif : $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} A^{1-\alpha} = 0$. De plus $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+u^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}}\,\mathrm{d}u$ existe et vaut $G\Big(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\Big)$ car $\dfrac{\alpha}{\alpha-1} > 1$.

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans $(**)$ on obtient : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}\, G\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big)$. Finalement :

$$\boxed{H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\, G\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big)}.$$

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}\, G\Big(\frac{\alpha}{\alpha-1}\Big) = \frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\frac{\alpha}{\alpha-1}+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha+\alpha-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)\alpha-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\alpha-1}.$$

$$\boxed{H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1}}.$$

b. $\displaystyle F(\alpha) = G(\alpha) + H(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha-1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^{n-1}\Big(\frac{1}{n\alpha-1} - \frac{1}{n\alpha+1}\Big)\right]$.

Il vient alors sans difficulté :

$$\boxed{F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1}}.$$

4. α appartient à $]1,+\infty[$ donc $\dfrac{1}{\alpha}$ appartient à $]0,1[$. Alors II Q4. donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}\frac{1}{\alpha}}{n^2-\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}} - \alpha$.

Ou encore : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}\ \alpha}{n^2\alpha^2-1} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}} - \alpha$. En divisant par α on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}} - 1$.

Alors $F(\alpha) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2-1} = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{\frac{\pi}{\alpha}}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}}.$$
