LYON 2009 PREMIER PROBLÈME

Partie I - Calcul d'une intégrale

1. • $f_{a,b} : x \to \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

• Au voisinage de $0 : e^{-ax} = 1 - ax + \mathrm{o}(x)$ et $e^{-bx} = 1 - bx + \mathrm{o}(x)$ donc $e^{-ax} - e^{-bx} = (b - a)x + \mathrm{o}(x)$.

Ainsi $\dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = (b - a) + \mathrm{o}(1)$ au voisinage de 0. Dans ces conditions $\lim\limits_{x\to 0} f_{a,b}(x) = b - a$.

$f_{a,b}$ est donc prolongeable par continuité en 0. Par conséquent $\displaystyle\int_0^1 f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

• a et b sont strictement positifs donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2 f_{a,b}(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{a}\dfrac{ax}{e^{ax}} - \dfrac{1}{b}\dfrac{bx}{e^{bx}}\right) = 0$ par croissance comparée.

On a donc également $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^2\,|f_{a,b}(x)|\right) = 0$ et ainsi $|f_{a,b}(x)| = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

De plus $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge et, $|f_{a,b}|$ et $x \to \dfrac{1}{x^2}$ sont positives sur $[1, +\infty[$.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

2. a. Soit (ε, X) un élément de $]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$.

Notons que $x \to \dfrac{e^{-ax}}{x}$ est continue sur $[\varepsilon, X]$ et que la fonction $x \to ax$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ceci autorise le changement de variable $y = a\,x$ dans ce qui suit.

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y/a}\,\frac{1}{a}\,\mathrm{d}y = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

De manière analogue on obtient : $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } (\varepsilon, X) \text{ appartenant à }]0, +\infty[^2 \text{ tel que } \varepsilon \leqslant X : \\ \displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y \text{ et } \int_\varepsilon^X \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.\end{array}}$$

b. Soit (ε, X) un élément de $]0,+\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leqslant X$.

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^X \frac{e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{b\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

$$\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (\varepsilon, X) \text{ appartenant à }]0,+\infty[^2 \text{ tel que } \varepsilon \leqslant X : \int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.}$$

3. a. • $y \to 1 - e^{-y}$ et $y \to \dfrac{1}{y}$ sont continues sur $]0,+\infty[$. Par produit h est continue sur $]0,+\infty[$.

• $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$. Alors $e^{-y} - 1 \underset{y\to 0}{\sim} -y$ donc $1 - e^{-y} \underset{y\to 0}{\sim} y$. Finalement $\dfrac{1-e^{-y}}{y} \underset{y\to 0}{\sim} 1$.

Alors $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{1-e^{-y}}{y} = 1 = h(0)$. Ceci suffit très largement pour dire que h est continue en 0.

$$\boxed{\text{L'application } h \text{ de } [0,+\infty[\text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par } \forall y \in [0,+\infty[,\ h(y) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases} \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

b. Soit ε un réel strictement positif.

h est continue sur $[0,+\infty[$. Considérons alors une primitive H de h sur $[0,+\infty[$.

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}-1}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} h(y)\,\mathrm{d}y + \Big[\ln|y|\Big]_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \big(\ln(|b\varepsilon|) - \ln(|a\varepsilon|)\big).$$

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \big(\ln(b\varepsilon) - \ln(a\varepsilon)\big) = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln\left(\frac{b\varepsilon}{a\varepsilon}\right) = H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln\frac{b}{a}\cdot$$

Or H est continue en 0 donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \big(H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon)\big) = H(0) - H(0) = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(H(b\varepsilon) - H(a\varepsilon) + \ln\frac{b}{a}\right) = \ln\frac{b}{a}\cdot$

$$\boxed{\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = \ln\frac{b}{a}\cdot}$$

c. Soit X un élément de $]0,+\infty[$.

$\forall \varepsilon \in]0, X]$, $\displaystyle\int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$.

Ce qui précède montre alors que :

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y\right) = \ln\frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.$$

Donc $\displaystyle\int_0^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } X \text{ de }]0,+\infty[,\ \int_0^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y.}$$

d. Soit X un élément de $]0,+\infty[$.

Nous avons vu que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$ converge donc pour tout réel z strictement positif $\displaystyle\int_z^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$ converge également.

Alors $\displaystyle\int_{aX}^{bX}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{aX}^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{bX}^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$ car ces deux intégrales convergent puisque aX et bX sont des réels strictement positifs.

De plus $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_{aX}^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = 0$ (resp. $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_{bX}^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = 0$) comme reste d'une intégrale convergente.

Ainsi $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_{aX}^{bX}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y = \lim_{X\to+\infty}\left(\int_{aX}^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y - \int_{bX}^{+\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y\right) = 0-0=0.$

Donc $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to+\infty}\left(\ln\frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX}\frac{e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y\right) = \ln\frac{b}{a}\cdot$ Finalement :

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{b}{a}\cdot}$$

Partie II - Étude d'un produit scalaire

---

1. Notons E' l'espace vectoriel réel des applications de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

• E est contenu dans E'.

• Posons $\forall x\in[0,+\infty[,\ f_0(x)=0$. f_0 est bornée sur $[0,+\infty[$, f_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et $f_0(0)=0$.

Ainsi f_0 est un élément de E donc E n'est pas vide.

• Soient f et g deux éléments de E et soit λ un réel.

 ▷ f (resp. g) est bornée sur $[0,+\infty[$. Donc il existe un réel positif M_f (resp. M_g) tel que

$\forall x\in[0,+\infty[,\ |f(x)|\leqslant M_f$ (resp. $\forall x\in[0,+\infty[,\ |g(x)|\leqslant M_g$).

$\forall x\in[0,+\infty[,\ |\lambda\, f(x)+g(x)|\leqslant|\lambda|\,|f(x)|+|g(x)|\leqslant|\lambda|\,M_f+M_g$ donc $\lambda\, f+g$ est bornée sur $[0,+\infty[$.

 ▷ f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ donc $\lambda\, f+g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

 ▷ $(\lambda\, f+g)(0)=\lambda\, f(0)+g(0)=\lambda\times 0+0=0$.

Par conséquent $\lambda\, f+g$ appartient à E. Ceci achève de montrer que :

$\boxed{E \text{ est un sous-espace vetoriel de l'espace vectoriel réel des applications de } [0,+\infty[\text{ dans } \mathbb{R}.}$

2. • $\forall x \in [0,+\infty[,\ |f_1(x)| = |\sin x| \leqslant 1$ donc f_1 est bornée sur $[0,+\infty[$.

f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ car sin est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$f_1(0) = \sin 0 = 0$.

Donc f_1 appartient à E.

• $f_2(0) = \cos 0 = 1 \neq 0$. f_2 n'appartient pas à E.

• $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f_3(x) = \lim_{x\to+\infty} (e^x - 1) = +\infty$ donc f_3 n'est pas bornée sur $[0,+\infty[$. f_3 n'appartient pas à E.

• $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant e^{-x} \leqslant 1$ donc $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant f_4(x) = 1 - e^{-x} \leqslant 1$. f_4 est bornée sur $[0,+\infty[$.

$x \to 1 - e^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc f_4 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

$f_4(0) = e^{-0} - 1 = 0$.

Par conséquant f_4 appartient à E.

$\boxed{f_1 \text{ et } f_4 \text{ sont deux éléments de } E.\ f_2 \text{ et } f_3 \text{ n'appartiennent pas à } E.}$

3. a. Soit f un élément de E. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Donc f est dérivable en 0.

En remarquant que f est nulle en 0 il vient : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right) = f'(0)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } f \text{ de } E : \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)\ .}$$

b. Soient f et g deux éléments de E. Posons $\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi(x) = \dfrac{f(x)\,g(x)}{x^2}$.

• φ est continue sur $]0,+\infty[$ car f, g et $x \to \dfrac{1}{x^2}$ sont continues sur $]0,+\infty[$.

• $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)\,g(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{f(x)}{x}\ \frac{g(x)}{x} \right) = f'(0)\,g'(0)$.

Ainsi φ est prolongeable par continuité en 0 donc $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

• f (resp. g) est bornée sur $[0,+\infty[$. Donc il existe un réel positif M_f (resp. M_g) tel que

$\forall x \in [0,+\infty[,\ |f(x)| \leqslant M_f$ (resp. $\forall x \in [0,+\infty[,\ |g(x)| \leqslant M_g$).

$\forall x \in [1,+\infty[,\ 0 \leqslant |\varphi(x)| = \dfrac{|f(x)|\,|g(x)|}{x^2} \leqslant \dfrac{M_f\,M_g}{x^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{M_f\,M_g}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge (car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge).

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} |\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente donc convergente.

Finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ et } g \text{ sont deux éléments de } E,\ \int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

4. • Notons que pour tout élément (f,g) de E^2, $(f\,|\,g)$ appartient à $\mathbb{R}$.

• Soient f, g et ℓ trois éléments de E. Soit λ un réel.

$(\lambda\, f+g\,|\,\ell) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\big(\lambda\, f(x)+g(x)\big)\,\ell(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda\, f(x)\,\ell(x)+g(x)\,\ell(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

$(\lambda\, f+g\,|\,\ell) = \lambda \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,\ell(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{g(x)\,\ell(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lambda\,(f\,|\,\ell)+(g\,|\,\ell)$ car toutes les intégrales convergent.

$\forall (f,g,\ell)\in E^3,\ (\lambda\, f+g\,|\,\ell) = \lambda\,(f\,|\,\ell)+(g\,|\,\ell).$

• Soient f et g deux éléments de E. $(f\,|\,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{g(x)\,f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = (g\,|\,f).$

$\forall (f,g)\in E^2,\ (f\,|\,g) = (g\,|\,f).$

• Soit f un élément de E. $\forall x\in]0,+\infty[,\ \dfrac{f(x)\,f(x)}{x^2} \geqslant 0$ donc $(f\,|\,f) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\,f(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$

$\forall f\in E,\ (f\,|\,f)\geqslant 0.$

• Soit f un élément de E tel que $(f\,|\,f)=0$.

▷ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\big(f(x)\big)^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$

▷ $x \to \dfrac{\big(f(x)\big)^2}{x^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

▷ $x \to \dfrac{\big(f(x)\big)^2}{x^2}$ est positive sur $]0,+\infty[$.

▷ $0\neq +\infty$!

Les quatre points précédents permettent de dire que $\forall x\in]0,+\infty[,\ \dfrac{\big(f(x)\big)^2}{x^2} = 0.$

Alors $\forall x\in]0,+\infty[,\ \big(f(x)\big)^2 = 0$ donc $\forall x\in]0,+\infty[,\ f(x)=0$.

Comme $f(0)=0 : \forall x\in [0,+\infty[,\ f(x)=0$. Ainsi $f=0_E$.

$\forall f\in E,\ (f\,|\,f)=0 \Rightarrow f=0_E.$

Les cinq points précédents montrent que :

$$\boxed{(.\,|\,.) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

5. Soient f et g deux éléments de E. Soient A et B deux réels strictement positifs.

Posons $u = fg$ et $\forall x \in]0, +\infty[,\ v(x) = -\dfrac{1}{x}\cdot$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. De plus $\forall x \in]0, +\infty[,\ u'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}\cdot$

Ceci légitime l'intégration par parties suivantes.

$$\int_A^B \frac{f(x)\, g(x)}{x^2}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{f(x)\, g(x)}{x}\right]_A^B - \int_A^B \left(-\frac{f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}{x}\right) \mathrm{d}x.$$

$$\int_A^B \frac{f(x)\, g(x)}{x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{f(A)\, g(A)}{A} - \frac{f(B)\, g(B)}{B} + \int_A^B \frac{f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}{x}\, \mathrm{d}x \quad (\bigstar).$$

f (resp. g) est bornée sur $[0, +\infty[$. Donc il existe un réel positif M_f (resp. M_g) tel que

$\forall x \in [0, +\infty[,\ |f(x)| \leqslant M_f$ (resp. $\forall x \in [0, +\infty[,\ |g(x)| \leqslant M_g$).

Alors $0 \leqslant \left|\dfrac{f(B)\, g(B)}{B}\right| = \dfrac{|f(B)|\, |g(B)|}{B} \leqslant \dfrac{M_f\, M_g}{B}\cdot$

Comme $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \frac{M_f\, M_g}{B} = 0$ il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \frac{f(B)\, g(B)}{B} = 0$.

De plus $\displaystyle\lim_{A \to 0} \frac{f(A)\, g(A)}{A} = \lim_{A \to 0} \left(\frac{f(A)}{A}\, g(A)\right) = f'(0) \times g(0) = f'(0) \times 0 = 0$ (d'après le résultat de **3. a.** et la continuité de g en 0).

$\displaystyle\lim_{B \to +\infty} \frac{f(B)\, g(B)}{B} = 0,\ \lim_{A \to 0} \frac{f(A)\, g(A)}{A} = 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\, g(x)}{x^2}\, \mathrm{d}x$ converge.

Il résulte alors de $(\bigstar)$ que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}{x}\, \mathrm{d}x$ converge et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)\, g(x)}{x^2}\, \mathrm{d}x$.

Ainsi $\displaystyle (f \mid g) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)\, g(x)}{x^2}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}{x}\, \mathrm{d}x$.

> Pour tout couple (f, g) d'éléments de E, $\displaystyle (f \mid g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}{x}\, \mathrm{d}x$ converge et
>
> $\displaystyle (f \mid g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)}{x}\, \mathrm{d}x.$

6. a. Soit α un réel strictement positif.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant e^{-\alpha x} \leqslant 1$ donc $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant u_\alpha(x) = 1 - e^{-\alpha x} \leqslant 1$. u_α est bornée sur $[0, +\infty[$.

$x \to 1 - e^{-\alpha x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc u_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

$u_\alpha(0) = 1 - e^{-\alpha \times 0} = 1 - 1 = 0$. Ceci achève de montrer que u_α appartient à E.

$$\boxed{\forall \alpha \in]0, +\infty[,\ u_\alpha \in E.}$$

b. Soient α et β deux réels strictement positifs.

$$(u_\alpha \mid u_\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{u'_\alpha(x)\, u_\beta(x) + u_\alpha(x)\, u'_\beta(x)}{x}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha\, e^{-\alpha x}\, (1 - e^{-\beta x}) + (1 - e^{-\alpha x})\, \beta\, e^{-\beta x}}{x}\, \mathrm{d}x.$$

$(u_\alpha \,|\, u_\beta) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\left(e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}\right) + \beta\left(e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}\right)}{x}\,\mathrm{d}x.$

α, β et $\alpha+\beta$ étant strictement positifs, **I.3.d** montre que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\,\mathrm{d}x$ convergent et valent respectivement $\ln \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}$ et $\ln \dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot$

Alors $(u_\alpha \,|\, u_\beta) = \alpha \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\,\mathrm{d}x + \beta \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x}\,\mathrm{d}x = \alpha \ln \frac{\alpha+\beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot$

$(u_\alpha \,|\, u_\beta) = \alpha \ln \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha} + \beta \ln \dfrac{\alpha+\beta}{\beta} = (\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta) - \alpha\ln\alpha - \beta\ln\beta.$

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (\alpha,\beta) \text{ d'éléments de }]0,+\infty[: (u_\alpha \,|\, u_\beta) = \alpha \ln \frac{\alpha+\beta}{\alpha} + \beta \ln \frac{\alpha+\beta}{\beta}\cdot}$$

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (\alpha,\beta) \text{ d'éléments de }]0,+\infty[: (u_\alpha \,|\, u_\beta) = (\alpha+\beta)\ln(\alpha+\beta) - \alpha\ln\alpha - \beta\ln\beta.}$$

c. Soient α et β deux réels strictement positifs.

$\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha} > 1$ et $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta} > 1$ donc $\ln \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha} > 0$ et $\ln \dfrac{\alpha+\beta}{\beta} > 0$.

Ainsi $(u_\alpha \,|\, u_\beta) = \alpha \ln \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha} + \beta \ln \dfrac{\alpha+\beta}{\beta} > 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (\alpha,\beta) \text{ d'éléments de }]0,+\infty[: (u_\alpha \,|\, u_\beta) > 0.}$$

Partie III - Étude de densités de variables aléatoires

---

1. • $\forall x \in]-\infty, 0],\ v(x) = 0 \geqslant 0$!

Soit un x un élément de $]0,+\infty[$. $4\,c^2 x \geqslant c^2\,x$ donc $e^{-c^2\,x} \geqslant e^{-4\,c^2\,x}$. Alors $e^{-c^2\,x} - e^{-4\,c^2\,x} \geqslant 0$.

Comme $x \ln 4$ est strictement positif : $v(x) = \dfrac{e^{-c^2\,x} - e^{-4\,c^2\,x}}{x \ln 4} \geqslant 0$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ v(x) \geqslant 0$.

• v est nulle sur $]-\infty, 0]$ donc v est continue sur $]-\infty, 0]$.

$x \to e^{-c^2\,x} - e^{-4\,c^2\,x}$ et $x \to \dfrac{1}{x \ln 4}$ sont continues sur $]0,+\infty[$. Par produit v est continue sur $]0,+\infty[$.

Finalement v est au moins continue sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points.

• $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} v(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 0 car v est nulle sur $]-\infty, 0]$.

c^2 et $4\,c^2$ sont des réels strictement positifs donc, d'après **I.3.d.** : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-c^2 x} - e^{-4c^2 x}}{x}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\ln \dfrac{4\,c^2}{c^2}$ ou $\ln 4$.

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} v(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{1}{\ln 4} \times \ln 4$ ou 1. Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 1.

Les trois points précédents montrent que :

$$\boxed{v \text{ est une densité d'une variable aléatoire réelle.}}$$

2. $\forall x \in]-\infty, 0],\ x\,v(x) = 0$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,v(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 0.

$\forall x \in]0, +\infty[,\ x\,v(x) = \dfrac{1}{\ln 4}\big(e^{-c^2 x} - e^{-4c^2 x}\big).$

Si λ est un réel strictement positif le cours sur les lois exponentielles nous autorise à dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 1.

Ainsi pour tout réel strictement positif λ, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{1}{\lambda}\cdot$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-c^2 x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4c^2 x}\,\mathrm{d}x$ existent et valent respectivement $\dfrac{1}{c^2}$ et $\dfrac{1}{4c^2}\cdot$

Alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\,v(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{1}{\ln 4}\,\dfrac{1}{c^2} - \dfrac{1}{\ln 4}\,\dfrac{1}{4\,c^2}$ ou $\dfrac{3}{4\,c^2\,\ln 4}\cdot$

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,v(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\dfrac{3}{4\,c^2\,\ln 4}\cdot$ Par conséquent :

$$\boxed{X \text{ admet une espérance qui vaut } \dfrac{3}{4\,c^2\,\ln 4}\cdot}$$

3. a. Nous noterons F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y.

Y prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_Y(x) = 0$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(\sqrt{X} \leqslant x) = P(X \leqslant x^2) = F_X(x^2)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} F_X(x^2) & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$

Montrons que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ au moins sur $\mathbb{R}^*$.

• $x \to x^2$ et F_X sont continues sur $\mathbb{R}$ donc par composition $x \to F_X(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors F_Y est continue sur $[0, +\infty[$ donc continue en tout point de $]0, +\infty[$ et continue à droite en 0.

F_Y est nulle sur l'intervalle ouvert $]-\infty, 0[$, donc F_Y est continue en tout point de $]-\infty, 0[$.

Observons que $F_Y(0) = F_X(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} v(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Alors $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} F_Y(x) = 0 = F_Y(0)$; F_Y est continue à gauche en 0.

Ceci achève de montrer que F_Y est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

• v est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc F_X est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F'_X(x) = v(x)$.

$x \to x^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 \in \mathbb{R}^*$. Donc par composition $x \to F_X(x^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Ainsi F_Y est de classes $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

F_Y étant nulle sur $]-\infty, 0[$ elle est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$.

F_Y est donc au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{Y = \sqrt{X} \text{ est une variable aléatoire à densité.}}$$

$\forall x \in]-\infty, 0[,\ F_Y(x) = 0$ donc $\forall x \in]-\infty, 0[,\ F'_Y(x) = 0$.

$\forall x \in]0, +\infty[,\ F_Y(x) = F_X(x^2)$ donc $\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_Y(x) = 2\,x\,F'_X(x^2) = 2\,x\,v(x^2)$.

$\forall x \in]0, +\infty[,\ F'_Y(x) = 2\,x\,\dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x^2\,\ln 4} = 2\,x\,\dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x^2\,2\,\ln 2} = \dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x\,\ln 2}\cdot$

Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x\,\ln 2} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

f_Y est positive sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec F'_Y sur $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un ensemble fini de points. Ainsi f_Y est une densité de Y.

$$\boxed{\text{La fonction } f_Y \text{ définie par : } \forall x \in \mathbb{R},\ f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2}}{x\,\ln 2} & \text{si } x \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \text{ est une densité de } Y.}$$

b. $Y^2 = X$ et X possède une espérance. Ainsi $E(Y^2)$ existe donc Y possède un moment d'ordre 2 donc une espérance et une variance.

$E(Y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_y(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\,f_y(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln 2}\int_0^{+\infty} (e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2})\,\mathrm{d}x.$

$\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{c}{\sqrt{\pi}}\,e^{-c^2x^2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2}\,c}}\,e^{-\frac{x^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}c}\right)^2}}.$

Ainsi $x \to \dfrac{c}{\sqrt{\pi}}\,e^{-c^2x^2}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres 0 et $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}\,c}\right)^2$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{\sqrt{\pi}}\,e^{-c^2x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 1. Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c^2x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{c}\cdot$

Par parité $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-c^2x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2c}\cdot$

En remplaçant c par $2c$ on peut dire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4c^2x^2}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4c}\cdot$ Alors :

$E(Y) = \dfrac{1}{\ln 2} \displaystyle\int_0^{+\infty} (e^{-c^2x^2} - e^{-4c^2x^2})\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln 2} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-c^2x^2}\,\mathrm{d}x - \dfrac{1}{\ln 2} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-4c^2x^2}\,\mathrm{d}x.$

$E(Y) = \dfrac{1}{\ln 2} \left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2c} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{4c} \right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4\,c\,\ln 2}.$

$$\boxed{Y \text{ possède une espérance qui vaut : } \dfrac{\sqrt{\pi}}{4\,c\,\ln 2}.}$$

$V(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = E(X) - \big(E(Y)\big)^2 = \dfrac{3}{4\,c^2\,\ln 4} - \left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{4\,c\,\ln 2} \right)^2 = \dfrac{3}{4\,c^2\,\ln 4} - \dfrac{\pi}{16\,c^2\,(\ln 2)^2}$

$$\boxed{Y \text{ possède une variance qui vaut : } \dfrac{3}{4\,c^2\,\ln 4} - \dfrac{\pi}{16\,c^2\,(\ln 2)^2} \text{ ou } \dfrac{6\,\ln 2 - \pi}{16\,c^2\,(\ln 2)^2}.}$$
