LYON 2010 DEUXIÈME PROBLÈME

Préliminaires

1. • La série de terme général $\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $2 > 1$.

• $\dfrac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{4n^2} \geqslant 0$ et la série de terme général $\dfrac{1}{4n^2}$ converge d'après ce qui précède.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$ donc la série de terme général $\left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right|$ est convergente.

Ainsi la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

$$\boxed{\text{Les séries de termes généraux } \frac{1}{n^2},\ \frac{1}{(2n+1)^2} \text{ et } \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ sont convergentes.}}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}\cdot$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\cdot$

Or par hypothèse $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$ Ainsi $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\,\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}\cdot$

Nous retrouvons ainsi la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et de plus :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\cdot}$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}\cdot$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}\cdot$

Les séries de termes généraux $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ étant convergentes il vient en passant à la limite :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}\cdot$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}\cdot}$$

Partie I : Éléments d'étude de f

---

1. Soit x un élément de $\mathbb{R}$. $t \to \dfrac{t^x}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$.

- $\dfrac{t^x}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} t^x = \dfrac{1}{t^{-x}}\cdot$
- $\forall t \in]0,1],\ \dfrac{1}{t^{-x}} \geqslant 0.$

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives montrent alors que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$ sont de même nature.

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$ converge si et seulement si $-x < 1$ donc si et seulement si $x > -1$.

Le domaine de définition de $x \to \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est donc J ce qui permet très largement de dire que :

$$\boxed{\text{pour tout élément } x \text{ de } J,\ \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

2. $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln|1+t|\Big]_0^1 = \ln 2.$

$$f(1) = \int_0^1 \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t+1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t - f(0) = 1 - \ln 2.$$

$$\boxed{f(0) = \ln 2 \text{ et } f(1) = 1 - \ln 2.}$$

3. Soit x un élément de J. $\forall t \in]0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ et $t^x \geqslant 0$ donc $\forall t \in]0,1],\ 0 \leqslant \dfrac{t^x}{1+t} \leqslant t^x = \dfrac{1}{t^{-x}}\cdot$

Comme $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$ sont convergentes, il vient en intégrant : $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$ ou $0 \leqslant f(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t$ (car $0 \leqslant 1$).

$$\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 t^x\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\right]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{\varepsilon^{x+1}}{x+1}\right) = \frac{1}{x+1} \text{ cars } x+1 > 0.$$

Ainsi $\displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}\cdot$ On a alors $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in J,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x+1}\cdot}$$

$\forall x \in J,\ 0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$. Il vient lors par encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

4. a. Soient x et y deux éléments de J et soit t un élément de $]0,1]$. Supposons que $x \leqslant y$.

$\ln t \leqslant 0$ donc $x\,\ln t \geqslant y\,\ln t$. Par croissance de la fonction exponentielle il vient $e^{x\,\ln t} \geqslant e^{y\,\ln t}$ donc $t^x \geqslant t^y$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in J^2,\ \forall t \in]0,1],\ (x \leqslant y \Rightarrow t^x \geqslant t^y).}$$

4. b. Soient x et y deux éléments de J tels que $x \leqslant y$.

$\forall t \in]0,1],\ t^x \geqslant t^y$ et $\dfrac{1}{1+t} \geqslant 0$. Donc $\forall t \in]0,1],\ \dfrac{t^x}{1+t} \geqslant \dfrac{t^y}{1+t}\cdot$

En intégrant il vient $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{t^y}{1+t}\,\mathrm{d}t = f(y)$ (car $0 \leqslant 1$).

$\forall (x,y) \in J^2,\ x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } J.}$$

5. Soit x un élément de J. Notons que $x+1$ appartient encore à J.

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^x + t^{x+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^x\,(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t.$$

Nous avons vu plus haut que $\displaystyle\int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$ donc $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in J,\ f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}\cdot}$$

6. Soit x un élément de $]0,+\infty]$. Notons alors que $x-1$ est dans J. f est décroissante sur J donc

- $\dfrac{1}{x+1} = f(x) + f(x+1) \leqslant 2\,f(x)$ ce qui donne $\dfrac{1}{x+1} \leqslant 2\,f(x)$.
- $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{(x-1)+1} = f(x-1) + f(x) \geqslant 2\,f(x)$ ce qui donne $\dfrac{1}{x} \geqslant 2\,f(x)$.

Ainsi $\dfrac{1}{x+1} \leqslant 2\,f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}\cdot$ Cela donne encore $\dfrac{x}{x+1} \leqslant 2\,x\,f(x) \leqslant 1$ car x est strictement positif.

Donc $\forall x \in]0,+\infty],\ \dfrac{x}{x+1} \leqslant 2\,x\,f(x) \leqslant 1$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ il vient par encadrement $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(2\,x\,f(x)\big) = 1$ ce qui permet de dire que :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\,x}\cdot}$$

7. a. Ce résultat peut s'obtenir sans difficulté par récurrence. Voici une seconde piste.

$\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{1}{x+k+1} = f(x+k) + f(x+k+1).$

Donc $\forall k \in \mathbb{N},\ \dfrac{(-1)^k}{x+k+1} = (-1)^k\, f(x+k) + (-1)^k\, f(x+k+1) = (-1)^k\, f(x+k) - (-1)^{k+1}\, f(x+k+1).$

Soit n dans $\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k+1} = \sum_{k=0}^{n} \Big((-1)^k\, f(x+k) - (-1)^{k+1}\, f(x+k+1)\Big) = (-1)^0\, f(x+0) - (-1)^{n+1}\, f(x+n+1).$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k+1} = f(x) - (-1)^{n+1}\, f(x+n+1)$. Alors $\displaystyle f(x) = (-1)^{n+1}\, f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{x+k+1}\cdot$

$$\boxed{\forall x \in J,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = (-1)^{n+1}\, f(n+1+x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x}\cdot}$$

7. b. $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} = f(x) - (-1)^{n+1}\, f(n+1+x).$

$\forall n \in \mathbb{N},\ |(-1)^{n+1}\, f(n+1+x)| = f(n+1+x)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f(n+1+x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \Big((-1)^{n+1}\, f(n+1+x)\Big) = 0.$

Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1+x} = f(x)$. Par conséquent :

$$\boxed{\text{pour tout élément } x \text{ de } J, \text{ la série de terme général } \frac{(-1)^k}{k+1+x} \text{ converge et } f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}\cdot}$$

8. a. Soient x et y deux éléments de J et soit k un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| = \left|\frac{(k+1+y)-(k+1+x)}{(k+1+x)\,(k+1+y)}\right| = \frac{|y-x|}{(k+1+x)\,(k+1+y)} = \frac{|x-y|}{(k+1+x)\,(k+1+y)}\cdot$$

Or $k+1+x \geqslant k > 0$ et $k+1+y \geqslant k > 0$ car x et y sont dans J ($x+1>0$ et $y+1>0$...) et k dans $\mathbb{N}^*$.

Alors $0 \leqslant \dfrac{1}{k+1+x} \leqslant \dfrac{1}{k}$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{k+1+x} \leqslant \dfrac{1}{k}\cdot$ Dans ces conditions : $\dfrac{1}{k+1+x}\,\dfrac{1}{k+1+y} \leqslant \dfrac{1}{k^2}\cdot$

$\dfrac{1}{(k+1+x)\,(k+1+y)} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ et $|x-y| \geqslant 0$ donc $\dfrac{|x-y|}{(k+1+x)\,(k+1+y)} \leqslant |x-y|\,\dfrac{1}{k^2}\cdot$

Alors $\left|\dfrac{1}{k+1+x} - \dfrac{1}{k+1+y}\right| = \dfrac{|x-y|}{(k+1+x)\,(k+1+y)} \leqslant |x-y|\,\dfrac{1}{k^2}\cdot$

$$\boxed{\forall (x,y) \in J^2,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left|\frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y}\right| \leqslant |x-y|\,\frac{1}{k^2}\cdot}$$

Soient x et y deux éléments de J. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right)\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|.$$

Notons que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|=\sum_{k=0}^{n}\left|(-1)^k\Big(\frac{1}{k+1+x}-\frac{1}{k+1+y}\Big)\right|$. Ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|=\sum_{k=0}^{n}\left(\left|(-1)^k\right|\left|\frac{1}{k+1+x}-\frac{1}{k+1+y}\right|\right)=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k+1+x}-\frac{1}{k+1+y}\right|.$$

Ainsi : $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|=\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k+1+x}-\frac{1}{k+1+y}\right|.$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|\leqslant\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{k+1+x}-\frac{1}{k+1+y}\right|.$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|\leqslant\left|\frac{1+y-(1+x)}{(1+x)\,(1+y}\right|+\sum_{k=1}^{n}\left(|x-y|\,\frac{1}{k^2}\right)\leqslant\frac{|y-x|}{(1+x)\,(1+y)}+|x-y|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}.$$

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+x}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1+y}\right|\leqslant|x-y|\left(\frac{1}{(1+x)\,(1+y)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ il vient : $|f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\left(\dfrac{1}{(x+1)\,(y+1)}+\dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

$$\boxed{\forall(x,y)\in J^2,\ \ |f(x)-f(y)|\leqslant|x-y|\left(\frac{1}{(x+1)\,(y+1)}+\frac{\pi^2}{6}\right).}$$

8. b. Soit a un élément de J.

$\forall x\in J,\ 0\leqslant|f(x)-f(a)|\leqslant|x-a|\left(\dfrac{1}{(x+1)\,(a+1)}+\dfrac{\pi^2}{6}\right)$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(|x-a|\left(\frac{1}{(x+1)\,(a+1)}+\frac{\pi^2}{6}\right)\right)=0\times\left(\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{\pi^2}{6}\right)=0.$

On obtient alors par encadrement : $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$. Ce qui montre que f est continue en a et ceci pour tout élément a de J.

$$\boxed{f\text{ est continue sur }J.}$$

9. Soit x un élément de J. $f(x)+f(x+1)=\dfrac{1}{x+1}$. Alors $(x+1)\,f(x)=1-(x+1)\,f(x+1)$.

$\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x+1)=f(0)$ car f est continue en 0.

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to-1}\big((x+1)\,f(x)\big)=\lim_{x\to-1}\big(1-(x+1)\,f(x+1)\big)=1-0\times f(0)=1$. Ce qui donne :

$$\boxed{f(x)\underset{x\to-1}{\sim}\frac{1}{x+1}.}$$

$\displaystyle\lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1}=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to-1^+}f(x)=+\infty$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=+\infty$!

$$\boxed{\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty.}$$

Partie II : Dérivabilité de f

1. Soit k un élément de $\mathbb{N}^*$. Notons que g_k est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J comme fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur J. g_k est donc en particulier de classe $\mathcal{C}^2$ sur J.

Soient x et y deux éléments de J. L'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à l'ordre 1 à g_k donne :

$|g_k(y) - g_k(x) - (y-x)\, g_k'(x)| \leqslant \dfrac{|y-x|^2}{2!} \underset{t\in[x,y] \text{ ou } [y,x]}{\mathrm{Max}} |g_k''(t)|.$

$\forall t \in J,\ g_k'(t) = -\dfrac{(-1)^k}{(k+1+t)^2}$ et $g_k''(t) = 2\,\dfrac{(-1)^k}{(k+1+t)^3}$. $\forall t \in J,\ |g_k''(t)| = \dfrac{2}{(k+1+t)^3}$.

$\forall t \in J,\ k+1+t \geqslant k > 0$. Alors $\forall t \in J,\ (k+1+t)^3 \geqslant k^3 > 0$. Ainsi $\forall t \in J,\ |g_k''(t)| = \dfrac{2}{(k+1+t)^3} \leqslant \dfrac{2}{k^3}$.

Cela permet d'affirmer que : $\underset{t\in[x,y] \text{ ou } [y,x]}{\mathrm{Max}} |g_k''(t)| \leqslant \dfrac{2}{k^3}$.

Donc $|g_k(y) - g_k(x) - (y-x)\, g_k'(x)| \leqslant \dfrac{|y-x|^2}{2} \underset{t\in[x,y] \text{ ou } [y,x]}{\mathrm{Max}} |g_k''(t)| \leqslant \dfrac{|y-x|^2}{2}\,\dfrac{2}{k^3} = \dfrac{|y-x|^2}{k^3}$.

Alors $|g_k(y) - g_k(x) - (y-x)\, g_k'(x)| \leqslant \dfrac{|y-x|^2}{k^3} = \dfrac{|x-y|^2}{k^3}$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x,y) \in J^2,\ |g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x)| \leqslant \frac{|x-y|^2}{k^3}.}$$

Remarque Retrouvons rapidement ce résultat à la main. Soit k un élément de J et soient x et y deux éléments de J. Posons $\varphi_k(x,y) = g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x)$.

$\varphi_k(x,y) = \dfrac{(-1)^k}{k+1+x} - \dfrac{(-1)^k}{k+1+y} - (x-y)\left(-\dfrac{(-1)^k}{(k+1+x)^2}\right).$

$\varphi_k(x,y) = \dfrac{(-1)^k}{(k+1+x)^2\,(k+1+y)}\Big((k+1+x)\,(k+1+y) - (k+1+x)^2 + (x-y)\,(k+1+y)\Big).$

Posons : $\psi_k(x,y) = (k+1+x)\,(k+1+y) - (k+1+x)^2 + (x-y)\,(k+1+y)$.

$\psi_k(x,y) = (k+1)^2 + (k+1)x + (k+1)y + xy - (k+1)^2 - 2(k+1)x - x^2 + (k+1)x - (k+1)y + xy - y^2.$

$\psi_k(x,y) = -x^2 + 2xy - y^2 = -(x-y)^2$. *Alors :* $\varphi_k(x,y) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2\,(k+1+y)}\,(x-y)^2$.

Donc $|\varphi_k(x,y)| = \left|\dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2\,(k+1+y)}\,(x-y)^2\right| = \dfrac{|x-y|^2}{(k+1+x)^2\,(k+1+y)}$.

$(k+1+x)^2\,(k+1+y) \geqslant k^3 > 0$ *car* $x+1>0$ *et* $y+1>0$. *Donc* $\dfrac{1}{(k+1+x)^2\,(k+1+y)} \leqslant \dfrac{1}{k^3}$.

Alors $|\varphi_k(x,y)| \leqslant \dfrac{|x-y|^2}{k^3}$.

2. a. La série de terme général $\dfrac{1}{k^3}$ est une série de Riemann convergente car $3>1$.

$$\boxed{\text{La série de terme général } \frac{1}{k^3} \text{ est convergente.}}$$

Soit x un élément de J.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant |g_k'(x)| = \left|-\dfrac{(-1^k)}{(k+1+x)^2}\right| = \dfrac{1}{(k+1+x)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ (car $k+1+x \geqslant k > 0$, air maintenant connu...).

Comme la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ est convergente, les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent la convergence de la série de terme général $|g_k'(x)|$.

La série de terme général $g_k'(x)$ est absolument convergente donc elle est convergente.

$$\boxed{\text{La série de terme général } g_k'(x) \text{ est convergente pour tout élément } x \text{ de } J.}$$

2. b. Soient x et y deux éléments de J. Rappelons que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$ et $f(y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(y)$.

Rappelons également que la série de terme général $g_k'(x)$ est convergente et posons $S(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g_k'(x)$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Posons $L_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} g_k(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(y) - (x-y) \sum_{k=0}^{n} g_k'(x)$.

Observons que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} L_n(x,y) = f(x) - f(y) - (x-y)\, S(x)$.

$|L_n(x,y)| = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Big(g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x)\Big)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Big|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x)\Big|$.

$|L_n(x,y)| \leqslant |g_0(x) - g_0(y) - (x-y)\, g_0'(x)| + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x)\Big|$.

Or : $|g_0(x) - g_0(y) - (x-y)\, g_0'(x)| = \left|\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{1+y} - (x-y)\, \dfrac{-1}{(1+x)^2}\right|$.

$|g_0(x) - g_0(y) - (x-y)\, g_0'(x)| = \left|\dfrac{(1+x)(1+y) - (1+x)^2 + (x-y)(1+y)}{(x+1)^2\,(y+1)}\right|$.

$|g_0(x) - g_0(y) - (x-y)\, g_0'(x)| = \left|\dfrac{1+x+y+xy-1-2x-x^2+x-y+xy-y^2}{(x+1)^2\,(y+1)}\right| = \left|\dfrac{-x^2+2xy-y^2}{(x+1)^2\,(y+1)}\right|$.

$|g_0(x) - g_0(y) - (x-y)\, g_0'(x)| = \left|\dfrac{-(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)}\right| = \dfrac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)}$. Dans ces conditions :

$|L_n(x,y)| \leqslant \dfrac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big|g_k(x) - g_k(y) - (x-y)\, g_k'(x)\Big| \leqslant \dfrac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{|x-y|^2}{k^3}$.

Ce qui donne $\left|\sum_{k=0}^{n} g_k(x) - \sum_{k=0}^{n} g_k(y) - (x-y)\sum_{k=0}^{n} g'_k(x)\right| \leqslant \dfrac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{|x-y|^2}{k^3}\cdot$

En faisant tendre n vers $+\infty$, ce qui est licite car toutes les séries convergent on obtient :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(y) - (x-y)\sum_{k=0}^{+\infty} g'_k(x)\right| \leqslant \frac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|x-y|^2}{k^3}\cdot$$

Ce qui s'écrit : $|f(x) - f(y) - (x-y)\,S(x)| \leqslant \dfrac{(x-y)^2}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{|x-y|^2}{k^3}\cdot$

Ou encore : $|f(x) - f(y) - (x-y)\,S(x)| \leqslant |x-y|^2 \left(\dfrac{1}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right).$

Supposons $y \neq x$ et divisons par $|x-y|$.

On obtient : $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - S(x)\right| \leqslant |x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right).$

Finalement $\forall (x,y) \in J^2,\ y \neq x \Rightarrow \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - S(x)\right| \leqslant |x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right).$

Reprenons x dans J.

$\forall y \in J - \{x\},\ 0 \leqslant \left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - S(x)\right| \leqslant |x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right).$

Comme $\lim_{y \to x} \left(|x-y| \left(\dfrac{1}{(x+1)^2\,(y+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right)\right) = 0 \times \left(\dfrac{1}{(x+1)^3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3}\right) = 0$, il vient par encadrement :

$\lim_{y \to x} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = S(x)$ ou $\lim_{y \to x} \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} = S(x).$

Ainsi f est dérivable en x et $f'(x) = S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g'_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\dfrac{(-1)^k}{(k+1+x)^2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}\cdot$

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } J \text{ et pour tout élément } x \text{ de } J,\ f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}\cdot}$$

2. c. $f'(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$ (d'après la question 3 du préliminaire).

$$\boxed{f'(0) = -\frac{\pi^2}{12}\cdot}$$

3. A défaut de la courbe résumons les informations sur f.

- f est définie, continue et dérivable sur J.
- f est décroissante sur J.
- $\lim_{x \to -1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

• $f(0) = \ln 2 \approx 0.69$, $f(1) = 1 - \ln 2 \approx 0.31$, $f'(0) = -\dfrac{\pi^2}{12} \approx -0.82$.

• On a encore : $f(2) \approx 0.19$, $f(3) \approx 0.14$, $f(4) \approx 0.11$, $f(5) \approx 0.09$, $f(6) \approx 0.08$, $f(7) \approx 0.07$, $f(8) \approx 0.06$, $f(9) \approx 0.06$, $f(10) \approx 0.05$ (en utilisant $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$).
