MATRICES

MATRICES

P mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique des matrices ...

★ mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes, E et E' (et même E'') sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Sauf précisions n, p, q sont des éléments de $\mathbb{N}^*$.

I GÉNÉRALITÉS

▶ 1. Définitions

Déf. 1 On appelle **matrice de type** $(\mathbf{n},\mathbf{p})$ ou de format (n,p) à éléments ou à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application de $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$ ou encore toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à éléments dans $\mathbb{K}$.

Un élément $A=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se représente par un tableau rectangulaire de n lignes et p colonnes où figure à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne : a_{ij}.

Souvent on assimile la matrice et le tableau. On écrit alors :

$$A=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{np}\end{pmatrix}$$

Remarque Dans $A=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, i est l'indice de ligne et j celui de colonne.

Le plus souvent au lieu de parler de l'élément $A=(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, nous parlerons de l'élément $A=(a_{ij})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; a_{ij} est le terme général ou l'élément générique de la matrice A.

Déf. 2 Soit $A=(a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si i est un élément de $[\![1,n]\!]$, la matrice ligne $\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ip}\end{pmatrix}$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.

Si j est un élément de $[\![1,p]\!]$, la matrice colonne $\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{nj}\end{pmatrix}$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Déf. 3 1. Les matrices de type (n,n) sont appelées **matrices carrées d'ordres** n. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si $A=(a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, a_{11}, a_{22},..., a_{nn} sont **les éléments ou coefficients diagonaux de la matrice** A.

2. Les matrices de type $(1,n)$ sont appelées **matrices lignes**.

3. Les matrices de type $(n,1)$ sont appelées **matrices colonnes**.

▶ 2. Matrices carrées particulières

Déf. 4 1. I_n est l'élément (a_{ij}) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que : $\forall i \in [\![1,n]\!], a_{ii} = 1$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$;

on parle de **matrice identité** ou **matrice unité**.

2. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$A = (a_{ij})$ est **scalaire** si : $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda\, \mathrm{I}_n$.

$A = (a_{ij})$ est **diagonale** si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

$A = (a_{ij})$ est **triangulaire supérieure** si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

$A = (a_{ij})$ est **triangulaire inférieure** si : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \Rightarrow a_{ij} = 0$.

II ADDITIONS ET MULTIPLICATION EXTERNE DANS $\mathcal{M}_{\mathbf{n,p}}(\mathbb{K})$

▶ 1. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Th. 1 Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et α un élément de $\mathbb{K}$, on pose :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \text{et} \quad \alpha\cdot A = (\alpha a_{ij})$$

$\boxed{(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot\,) \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{K}}$.

▶ 2. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Th. 2 et **déf. 5** Si i appartient à $[\![1,n]\!]$ et j à $[\![1,p]\!]$, on note E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et le $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

La famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. C'est la **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} Eij$ donc $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est la famille des coordonnées de A dans cette base.

$\boxed{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ est de dimension } np \text{ sur } \mathbb{K}}$ $\boxed{\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \text{ est de dimension } n^2 \text{ sur } \mathbb{K}}$

Th. 3 1. La base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Les coordonnées d'un élément $C = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans cette base sont : c_1, c_2,..., c_n.

2. La base canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ est : $\big((1 \quad 0 \quad \dots \quad 0), (0 \quad 1 \quad \dots \quad 0), \dots, (0 \quad 0 \quad \dots \quad 1)\big)$.

Les coordonnées d'un élément $L = (\,\ell_1 \quad \ell_2 \quad \dots \quad \ell_n\,)$ de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ dans cette base sont : ℓ_1, ℓ_2,..., ℓ_n.

III MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1. Matrice d'une famille de vecteurs.

Déf. 6 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille d'éléments de E.

Pour tout j dans $[\![1, p]\!]$ et pour tout i dans $[\![1, n]\!]$ on note a_{ij} la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de u_j dans la base $\mathcal{B}$.

L'élément (a_{ij}) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelé **matrice de la famille** $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ **dans la base** $\mathcal{B}$.

On la note $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

P $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ s'obtient en écrivant en colonne, et successivement, les coordonnées des vecteurs u_1, u_2, ..., u_p dans la base $\mathcal{B}$.

Th. 4 **P** Les notations sont celles de la définition précédente.

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = (a_{ij}) \iff \forall j \in [\![1, p]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i}$$

Déf. 7 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et u un vecteur de E de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la **matrice des coordonnées du vecteur** u **dans la base** $\mathcal{B}$.

★ Dans la situation précédente on est prié de ne pas confondre le vecteur u, la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

2. Matrice d'une application linéaire.

Déf. 8 E est de dimension non nulle p et E' de dimension non nulle n. f est une application linéaire de E dans E', $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ une base de E'.

La **matrice de** f **relativement aux bases** $\mathcal{B}$ **et** $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $\big((f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p)\big)$ dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$. Nous la noterons $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

$M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ est l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ obtenu en écrivant en colonne, et successivement, les coordonnées des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$, ..., $f(e_p)$ dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$

P Il convient de retenir le schéma suivant : $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \ldots & f(e_p) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \end{array}$

Th. 5 **P** Les notations sont celles de la définition précédente.

$$\boxed{M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') = (a_{ij}) \iff \forall j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e'_i}$$

Déf. 9 E est de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la matrice de la famille $\big(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\big)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

On la note $M_{\mathcal{B}}(f)$. $M_{\mathcal{B}}(f)$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Th. 6 **P** Les notations sont celles de la définition précédente.

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij}) \iff \forall j \in [\![1,n]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i}$$

▶ 3. L'isomorphisme fondamental

Th. 7 E est de dimension non nulle p et E' de dimension non nulle n.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \dots, {e'}_n)$ une base de E'.

1. Si f et g sont deux applications linéaires de E dans E' et α un élément de K :

$$M(f+g,\mathcal{B},\mathcal{B}') = M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') + M(g,\mathcal{B},\mathcal{B}') \text{ et } M(\alpha\, f,\mathcal{B},\mathcal{B}') = \alpha\, M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}').$$

2. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ il existe une application linéaire f, de E dans E', et une seule telle que $M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}') = A$.

3. $\varphi : \mathcal{L}(E,E') \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. φ est un isomophisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E,E')$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   $f \longrightarrow M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')$

P S'il convient de savoir trouver la matrice d'une application linéaire relativement à deux bases il convient également de savoir associer à une matrice une application linéaire. Voila une phrase toute faite permettant de le faire dans le cas où A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Considérons l'application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ est A.

Notons qu'alors $f = \varphi^{-1}(A)$

Th. 8 E est de dimension n non nulle et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

$\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. φ est un isomophisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$f \longrightarrow M_{\mathcal{B}}(f)$

P S'il convient de savoir trouver la matrice d'un endomorphisme relativement à une base il convient également de savoir associer à une matrice carrée un endomorphisme. Voila une phrase toute faite permettant de le faire dans le cas où A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est A.

Notons qu'alors $f = \varphi^{-1}(A)$

▶ 4. Matrice d'une forme linéaire

Prop. 1 E est un K-espace vectoriel de dimension n.

La matrice d'une forme linéaire sur E, relativement à une base de E et une base de K, est un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ donc une matrice ligne.

IV RANG D'UNE MATRICE

▶ 1. Définition

Déf. 10 Le **rang d'une matrice** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de cette matrice.

▶ 2. Propriétés

Th. 9 Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les lignes de cette matrice.

Th. 10 On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant sur cette matrices les opérations élémentaires sur les lignes $L_i \longleftrightarrow L_j$, $L_j \leftarrow L_j + \lambda\, L_i$ ou $L_i \leftarrow \lambda\, L_i$ avec cette fois λ non nul.

On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant sur cette matrices les opérations élémentaires sur les colonnes $C_i \longleftrightarrow C_j$, $C_j \leftarrow C_j + \lambda\, C_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda\, C_i$ avec cette fois λ non nul.

Th. 11 E est de dimension non nulle p et E' de dimension non nulle n. f est une application linéaire de E dans E', $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ une base de E'. A est la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) \text{ ou } \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')\right)}$$

Prop. 2 Soit A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{Min}(n, p)$.

V PRODUIT DE DEUX MATRICES

▶ 1. Définition

Déf. 11 $A = (a_{ij})$ est une matrice de type (n, p) à éléments dans $\mathbb{K}$ et $B = (b_{ij})$ une matrice de type (p, q) à éléments dans $\mathbb{K}$.

Le produit de A par B est la matrice $C = (c_{ij})$ de type (n, q) à éléments dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\boxed{\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, q]\!],\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

On le note $A \times B$ ou plus simplement AB.

★ Le produit de AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

A retenir : "Type $(n, p) \times$ Type $(p, q) =$ Type (n, q)".

P $A=(a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B=(b_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $C=AB=(c_{ij})$.

L'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB et de sa $j^{\text{ème}}$ colonne est le produit matriciel de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de B ou :

$$c_{ij}=\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{pj}\end{pmatrix}$$

▸ 2. Matrice de la composée de deux applications linéaires

Th. 12 $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base de E. f et g sont deux endomorphismes de E.

Si A est la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et B celle de g dans $\mathcal{B}$, alors BA est la matrice de $g\circ f$ dans $\mathcal{B}$. En clair :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(g\circ f)=M_{\mathcal{B}}(g)M_{\mathcal{B}}(f)}$$

Th. 13 E, E' et E'' sont de dimensions finies non nulles. $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ en sont des bases respectives. f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''. Alors :

P $$\boxed{M(g\circ f,\mathcal{B},\mathcal{B}'')=M(g,\mathcal{B}',\mathcal{B}'')\times M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')}$$

▸ 3. Définition analytique d'une application linéaire.

Th. 14 E est de dimension non nulle p et E' de dimension non nulle n. f est une application linéaire de E dans E', $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}'=({e'}_1,{e'}_2,\dots,{e'}_n)$ une base de E'.

A est la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

u est un élément de E de matrice $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. v est un élément de E' de matrice $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

P $$\boxed{f(u)=v \iff AX=Y \iff \forall i\in[\![1,n]\!],\ y_i=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}x_k}$$

▸ 4. Propriétés des opérations sur les matrices.

Th. 15 A, B et C sont trois matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. α est un élément de $\mathbb{K}$.

Si $(AB)C$ a un sens $A(BC)$ aussi et : $(AB)C=A(BC)$.

Si $A(B+C)$ a un sens $AB+AC$ aussi et : $A(B+C)=AB+AC$.

Si $(B+C)A$ a un sens $BA+CA$ aussi et : $(B+C)A=BA+CA$.

Si AB a sens on peut écrire : $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.

★ Si A et B sont deux matrices AB peut être défini sans que BA le soit.

★★ Si A et B sont deux élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ AB n'est en général pas égal à BA.

★★ Si A et B sont deux matrices $AB=0$ ne donne pas nécessairement $A=0$ ou $B=0$.

★ Si A, B, C sont trois matrices $AB=AC$ ne donne pas nécessairement $B=C$.

Prop. 3 A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **qui commutent** ★ $(AB = BA)$.

1. Si p est un élément de $\mathbb{N}$:

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k \, A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k \, A^{p-k} B^k$$

2. Si p est dans $\mathbb{N}^*$:

$$A^p - B^p = (A-B)\Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\Big) = \Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\Big)(A-B) = (A-B)\Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^{p-1-k} B^k\Big) = \cdots$$

▶ 5. Produit de matrices particulières

Th. 16 Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB (resp. BA) est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable pour $\times$.

Th. 17 Si L est une matrice ligne de type $(1, n)$ à éléments dans $\mathbb{K}$ et C est une matrice colonne de type $(n, 1)$ à éléments dans $\mathbb{K}$:

- Le produit LC est une matrice de type $(1, 1)$ que nous assimilerons à un élément de $\mathbb{K}$.
- Le produit CL est une matrice carrée d'ordre n.

Th. 18 Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A et B sont scalaires, AB est scalaire.

Si A et B sont diagonales, AB est diagonale.

Si A et B sont triangulaires supérieures, AB est triangulaire supérieure.

Si A et B sont triangulaires inférieures, AB est triangulaire inférieure.

Th. 19 Soient $A = \mathrm{Diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $B = \mathrm{Diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $AB = \mathrm{Diag}(a_1\, b_1, a_2\, b_2, \ldots, a_n\, b_n)$.
2. $\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \mathrm{Diag}(a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p)$.
3. Si P est un élément de $\mathbb{K}[X]$, $P(A) = \mathrm{Diag}\big(P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)\big)$.

▶ 6. Polynômes de matrices **Deuxième année**

Prop. 4 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

$\sum_{k=0}^{r} a_k\, A^k$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que l'on note $P(A)$.

Th. 20 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et α est un élément de K.

$$\boxed{(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)} \quad \boxed{(\alpha\, P)(A) = \alpha\, P(A)} \quad \boxed{(PQ)(A) = P(A)\, Q(A) = Q(A)\, P(A)}$$

▶ 7. Polynômes annulateurs d'une matrice **Deuxième année**

Déf. 12 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle **polynôme annulateur** de A tout élément P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Th. 21 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur **non nul**

On montre ce résultat en remarquant que si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la famille $(\mathrm{I}_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2})$ est liée...)

VI MATRICES INVERSIBLES

1. Définition

Déf. 13 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est **inversible** si elle symétrisable pour $\times$, autrement dit s'il existe un élément A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AA' = A'A = \mathrm{I}_n$.

Si A est symétrisable, l'élément A' est unique et s'appelle **le symétrique ou l'inverse de** A et se note A^{-1}.

Déf. 14 On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $GL_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe linéaire sur** K **de type** n **ou d'ordre** n.

2. Matrice inversible et isomorphisme

Th. 22 1. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E et f un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

A est inversible si et seulement si f est bijectif (resp. injectif ; resp. surjectif).

Autrement dit A appartient à $GL_n(K)$ si et seulement si f appartient à $GL(E)$.

Si A est inversible : A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$; autrement dit :

$$\boxed{\big(M_{\mathcal{B}}(f)\big)^{-1} = M_{\mathcal{B}}(f^{-1})}$$

2. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ une base de E' (donc $\dim E = \dim E' < +\infty$).

f une application linéaire de E dans E' de matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

A est inversible si et seulement si f est bijective.

Si A est inversible : A^{-1} est la matrice de f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$; autrement dit :

$$\boxed{\big(M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')\big)^{-1} = M(f^{-1}, \mathcal{B}', \mathcal{B})}$$

▸ 3. Caractérisations des matrices inversibles.

Th. 23 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est inversible.

ii) $\boxed{\mathbf{P}}$ $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(K)} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

iii) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\ AX = Y$.

iv) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists\,! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\ AX = Y$.

v) $\exists A' \in \mathcal{M}_n(K),\ AA' = \mathrm{I}_n$ (inversibilité à droite).

vi) $\exists A'' \in \mathcal{M}_n(K),\ A''A = \mathrm{I}_n$ (inversibilité à gauche).

vii) 0 n'est pas valeur propre de A.

viii) A admet une réduite de Gauss inversible c'est à dire sans zéro sur la diagonale.

ix) $\mathrm{rg}(A) = n$.

▸ 4. Quelques propriétés

Th. 24 1. Si A et B sont deux éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit AB est inversible et :

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}}$$

1'. Plus généralement si A_1, A_2, ..., A_p sont p matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(K)$ alors $A_1\,A_2\cdots A_p$ est une matrice inversible et :

$$\boxed{\big(A_1\,A_2\cdots A_p\big)^{-1} = A_p^{-1}\,A_{p-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}}$$

2. I_n est inversible et $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.

3. Si A est inversible, A^{-1} est inversible et :

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$$

.

Prop. 5 A_1, A_2, ..., A_p sont p éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si la matrice $A_1\,A_2\cdots A_p$ n'est pas inversible, $\boxed{\text{l'une au moins}}$ des matrices A_1, A_2, ..., A_p n'est pas inversible.

▸ 5. Inversibilité des matrices triangulaires

Th. 25 1. Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si $\boxed{\text{TOUS}}$ ses éléments diagonaux sont non nuls.

1'. Une matrice triangulaire n'est pas inversible si et seulement si $\boxed{\text{AU MOINS UN}}$ de ses éléments diagonaux est nul.

2. L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) inversible est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Th. 26 Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

D est inversible si et seulement si pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $d_i \neq 0$.

En cas d'inversibilité : $D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\dfrac{1}{d_1}, \dfrac{1}{d_2}, \ldots, \dfrac{1}{d_n}\right)$

Prop. 6 Soient A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, p un élément de $\mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_p)$ une famille d'élément de K.

Si $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k\, A^k = a_0\, \mathrm{I}_n + a_1\, A + \cdots + a_p\, A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et si $a_0 \neq 0$ alors :

1. A est invesible.
2. $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k\, A^{k-1} = -\dfrac{1}{a_0} \left(a_1\, \mathrm{I}_n + a_2\, A + \cdots + a_p\, A^{p-1}\right)$

▶ 6. Inversibilité des matrices d'ordre 2 (Programme 2003)

Th. 27 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
2. Si A est inversible : $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

VII CHANGEMENT DE BASE

▶ 1. Définition

Déf. 15 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ sont deux bases de E.

La **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Nous la noterons le plus souvent $\mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

P On l'obtient donc en écrivant en colonne les coordonnées des éléments de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

▶ 2. Changement de base dans un espace vectoriel

Th. 28 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ sont deux bases de E.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(K)$ et son inverse est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

$$\big(\mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\big)^{-1} = \mathrm{Pas}(\mathcal{B}', \mathcal{B})$$

Th. 29 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ sont deux bases de E.

Si u est un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ et X' dans $\mathcal{B}'$ alors :

$$\boxed{X = PX' \quad \text{et} \quad X' = P^{-1}X}$$

▶ 3. Changement de base pour une application linéaire.

Th. 30 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ sont deux bases de E.

f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$ et A' dans $\mathcal{B}'$.

P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

$$\boxed{A' = P^{-1}AP} \quad \text{et} \quad \boxed{A = PA'P^{-1}}$$

Th. 31 E est un espace vectoriel de dimension non nulle p. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ sont deux bases de E et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$.

E' est un espace vectoriel de dimension non nulle n. $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'_1$ sont deux bases de E' et Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}_1^{'}$.

f est une application linéaire de E dans E'.

$$\boxed{M(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1)=Q^{-1}M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')P \quad \text{ou} \quad M(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1)=(\mathrm{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B}'_1))^{-1}\,M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')\ \mathrm{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{B}_1)}$$

▶ 4. Matrices semblables.

Déf. 16 A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

B est **semblable** à A s'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B=P^{-1}AP$.

Prop. 7 A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est semblable à A.

Si B est semblable à A, A est semblable à B. Nous pourrons alors dire que A **et** B **sont semblables**.

Si A est semblable à B et B est semblable à C, A est semblable à C.

Ainsi la semblablité définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Th. 32 1. f est un endomorphisme de E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Les matrices de f relativement à deux bases de E sont semblables.

P 2. A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A et B sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ relativement à deux bases de E.

3. Deux matrices semblables ont même rang (et même trace).

Prop. 8 A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B=P^{-1}AP$.

Si p est un élément de $\mathbb{N}$ et si Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$:

$$\boxed{B^p=P^{-1}A^pP} \quad \text{et} \quad \boxed{Q(B)=P^{-1}Q(A)P}$$

VIII PRATIQUE DE L'INVERSIBILITÉ ET DE L'INVERSION.

Evoquons quelques méthodes pour inverser une matrice inversible $A=(a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. On part de deux éléments $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ tels que $AX=Y$.

On exprime alors x_1, x_2,..., x_n en fonction de y_1, y_2 ,..., y_n.

On obtient alors une matrice A' telle que $A'Y=X$ qui n'est autre que A^{-1}.

2. On considère l'automorphisme f de K^n dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ de K^n est A.

A est encore la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ à la base $\big(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\big)$.

A^{-1} est alors la matrice de passage de $\big(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\big)$ à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Trouver A^{-1} revient alors à exprimer e_1, e_2,..., e_n en fonction de $f(e_1)$, $f(e_2)$,..., $f(e_n)$.

2'. On considère la famille $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de K^n dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de K^n est A. A étant inversible, $\mathcal{B}'=(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ est une base de K^n.

A est encore la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ à la base $\mathcal{B}'=(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$.

A^{-1} est alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'=(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Trouver A^{-1} revient alors à exprimer e_1, e_2,..., e_n en fonction de e'_1, e'_2,..., e'_n.

3. Le pivot de Gauss.

On part de $\mathrm{I}_n = AA^{-1}$. On effectue des opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes) de A pour obtenir une matrice triangulaire, puis pour obtenir I_n. En effectuant SIMULTANEMENT les mêmes opérations sur la matrice I_n figurant à gauche de l'égalité initiale on obtient A^{-1}.

4. A est un élément de $\mathcal{M}_n(K)$. Si l'on trouve A' (resp. A'') tel que $AA' = \mathrm{I}_n$ (resp. $A''A = \mathrm{I}_n$), on peut alors dire que A est inversible et que $A^{-1} = A'$ (resp. $A^{-1} = A''$).

5. A est un élément de $\mathcal{M}_n(K)$.

On suppose qu'il existe un élément $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k X^k$ de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k A^k = O_{\mathcal{M}_n(K)}$ et $P(0) \neq 0$ (c'est à dire $a_0 \neq 0$).

Alors A est inversible et $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_k A^{k-1}$

6. B est un élément de $\mathcal{M}_n(K)$. On suppose qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}$ tel que : $B^q = 0_{\mathcal{M}_n(K)}$.

$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n^q - B^q = (\mathrm{I}_n - B)\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} B^k\Big)$.

Alors $A = \mathrm{I}_n - B$ est inversible et d'inverse : $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} B^k = \mathrm{I}_n + B + B^2 + \cdots + B^{q-1}$. En changeant B en $-B$ on obtient l'inversibilité et l'inverse de $\mathrm{I}_n + B$.

IX Transposition

▸ 1. Définition

Déf. 17 Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La **transposée** de A est la matrice, de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont la $i^{\text{ème}}$ ligne est la $i^{\text{ème}}$ colonne de A. On la note ${}^tA$.

Si "$A = (a_{ij})$: ${}^tA = (a_{ji})$".

▶ 2. Propriétés

Th. 33 1. Soient α un élément de $\mathbb{K}$, A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$$\boxed{{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB} \quad \boxed{{}^t(\alpha A) = \alpha\, {}^tA} \quad \boxed{{}^t({}^tA) = A}.$$

2. Soient A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA}$$

3. La transposition est un automorphisme involutif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)}$$

5. Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ${}^tA$ est inversible si et seulement si A est inversible.

En cas d'inversibilité :

$$\boxed{\left({}^tA\right)^{-1} = {}^tA^{-1}}$$

X MATRICE SYMÉTRIQUE. MATRICE ANTISYMÉTRIQUE.

Déf. 18 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est **symétrique** si : ${}^tA = A$.

A est **antisymétrique** si : ${}^tA = -A$.

Prop. 9 L'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

L'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires ; autrement dit tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de manière unique la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

XI SAVOIR FAIRE

- Trouver la matrice d'une application est linéaire.
- Associer une application linéaire à une matrice.
- Définir analytiquement une application linéaire.
- Utiliser toutes les opérations (et leurs propriétés) sur les matrices.
- Calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice.
- Trouver le rang d'une matrice.
- Montrer qu'une matrice est inversible.
- Trouver l'inverse d'une matrice inversible.
- Trouver la matrice de passage entre deux bases.
- Utiliser les formules de changement de base.
- Montrer que deux matrices sont semblables.

XII COMPLÉMENTS

▶ 1. Egalité de deux matrices

Prop. 10 **P** Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.
2. $A = B \iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = BX$.

▶ 2. "Extraction" d'une colonne ou d'une ligne ou d'un élément d'une matrice

Prop. 11 **P** $A = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La $j^{\text{ème}}$ colonne de A est le produit AE_j où E_j est le $j^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

La $i^{\text{ème}}$ ligne de A est le produit ${}^tE'_iA$ où E'_i est le $i^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Avec les notations précédentes : $a_{ij} = {}^tE'_iAE_j$.

▶ 3. Trace d'une matrice

Déf. 19 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La **trace** de A est la somme des éléments diagonaux de A. On la note $\operatorname{tr} A$.

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Prop. 12 1. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et λ un élément de $\mathbb{K}$.

$$\boxed{\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B} \quad \boxed{\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A} \quad \boxed{\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$$

2. tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Deux matrices semblables ont même trace.

▶ 4. Une nouvelle caractérisation des base en dimension finie

Th. 34 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de n éléments de E.

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si la matrice $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de cette famille dans la base $\mathcal{B}$ est inversible.

Si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base, l'inverse de $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est la matrice de la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

▶ 5. Simplification par une matrice inversible

Prop. 13 A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si AB est la matrice nulle et $\boxed{\text{si l'une des matrices est inversible}}$ l'autre est nulle.

Si $AB = AC$ (resp. $BA = CA$) et $\boxed{\text{si } A \text{ est inversible}}$ alors $B = C$.

▶ 6. Matrice de passage

Prop. 14 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ sont deux bases de E.

La matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est encore :

- La matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'automorphisme de E qui transforme la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$
- La matrice de Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ (attention à l'inversion) c'est à dire $M(Id_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$

Prop. 15 $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E. $\boxed{\mathrm{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{B}'') = \mathrm{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{B}') \times \mathrm{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')}$.

▶ 7. Matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$

Prop. 16 • La matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans une base quelconque est d'ordre $n+1$!

• Si f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ et si, pour tout élément P de $\mathbb{K}_n[X]$, $\deg f(P) \leqslant \deg P$ alors la matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure (ce qui donne immédiatement le spectre de f).

▶ 8. Rang

Th. 35 A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si B est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : \mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}\, A$.

Si C est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K}) : \mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg}\, A$.

▶ 9. Interprétation matricielle des opérations élémentaires dans la méthode du pivot.

Prop. 17 Soit A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Pour transformer A par une opération élémentaire sur les **lignes** il suffit de la multiplier à **gauche** par la matrice déduite de I_n par la même opération élémentaire.

Pour transformer A par une opération élémentaire sur les **colonnes** il suffit de la multiplier à **droite** par la matrice déduite de I_p par la même opération élémentaire.

Prop. 18 n est dans N^*, i et j sont dans $[\![1,n]\!]$.

1. La matrice déduite de I_n par l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ est inversible et égale à son inverse.

2. α est un élément non nul de $\mathbb{K}$. La matrice déduite de I_n par l'opération $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ est inversible et son inverse est la matrice déduite de I_n par l'opération $L_i \longleftarrow 1/\alpha L_i$.

3. α est un élément de $\mathbb{K}$. La matrice déduite de I_n par l'opération $L_j \longleftarrow L_j + \alpha L_i$ est inversible et son inverse est la matrice déduite de I_n par l'opération $L_j \longleftarrow L_j - \alpha L_i$.

Prop. 19 p est dans N^*, i et j sont dans $[\![1,p]\!]$.

1. La matrice déduite de I_p par l'opération $C_i \longleftrightarrow C_j$ est inversible et égale à son inverse.

2. α est un élément non nul de $\mathbb{K}$. La matrice déduite de I_p par l'opération $C_i \longleftarrow \alpha C_i$ est inversible et son inverse est la matrice déduite de I_p par l'opération $C_i \longleftarrow 1/\alpha C_i$.

3. α est un élément de $\mathbb{K}$. La matrice déduite de I_p par l'opération $C_j \longleftarrow C_j + \alpha C_i$ est inversible et son inverse est la matrice déduite de I_p par l'opération $C_j \longleftarrow C_j - \alpha C_i$.

Prop. 20 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes on peut transformer A en une matrice triangulaire A'.

Il existe alors une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A' = PA$.

P est la matrice obtenue en effectuant sur I_n les opérations effectuées sur A.

A est inversible si et seulement si A' est inversible.

2. Par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes on peut transformer A en une matrice triangulaire A''.

Il existe alors une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A'' = AQ$.

Q est la matrice obtenue en effectuant sur I_n les opérations effectuées sur A.

A est inversible si et seulement si A'' est inversible.

Th. 36 A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Par des opérations élémentaires sur les lignes on peut transformer A en I_n.

A^{-1} est la matrice obtenue en effectuant sur I_n les mêmes opérations.

2. Par des opérations élémentaires sur les colonnes on peut transformer A en I_n.

A^{-1} est la matrice obtenue en effectuant sur I_n les mêmes opérations.

XIII DES PHRASES OU DES RHÉTORIQUES TOUTES FAITES

▶ Inverser une matrice

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour trouver l'inverse de A : Considérons un élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX$

On exprime alors les composantes de X en fonction de celles de Y sans raisonner par équivalences.

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour traiter simultanément l'inversibilité et l'inversion éventuelle de A

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. $AX = Y \Leftrightarrow$ ....

On résout ensuite ce système en raisonnant par équivalences.

▶ Associer un endomorphisme à une matrice carrée

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons $E = \mathbb{K}^n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$. Considérons l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A ($A = M_{\mathcal{B}}(f)$).

► **Associer une application linéaire à une matrice.**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Posons $E = \mathbb{K}^p$, et $E' = \mathbb{K}^n$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ la base canonique de $E' = \mathbb{K}^n$. Considérons l'application linéaire f de E dans E' dont la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est A ($M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A$).

► **Semblablité**

Soit à montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Cherchons une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est B.

On fait alors une analyse du problème en commençant par supposer que $\mathcal{B}'$ existe et on termine par une synthèse.

XIV DES ERREURS À NE PAS FAIRE

★ A est un éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ecrire $A = a_{ij}$ (au lieu de $A = \big(a_{ij}\big)$)

★ A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ecrire que $AB = 0$ et A non nulle donne $B = 0$.

★ A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ecrire que $AB = AC$ et A non nulle donne $B = C$.

★ A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ecrire que $(A+B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$ sans vérifier que $AB = BA$.

★ A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ecrire que $(AB)^p = A^p\,B^p$ sans vérifier que $AB = BA$.

★ Ecrire la formule du binôme pour deux matrices sans vérifier qu'elles commutent.

★ Ecrire la réduite de Gauss de A.

★ La matrice A est inversible car elle n'a pas de zéro sur sa diagonale.

★ La trace de ABC est égale à la trace de BAC (en s'appuyant sur le fait que la trace de UV est la trace de VU).

★ Si $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr} A^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$ alors que $\operatorname{tr} A^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki}$.

★ Si A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les coefficients de A^2 sont positifs (si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$...)