MATRICES

I GÉNÉRALITÉS

1. Définitions
2. Matrices carrées particulières
3. Transposée d'une matrice

II ADDITION ET MULTIPLICATION EXTERNE DANS $\mathcal{M}_{\mathbf{n},\mathbf{p}}(\mathbb{K})$

1. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
2. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
3. Des sous-espaces usuels de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$
4. Les deux opérations élémentaires et la transposition
5. Les deux opérations élémentaires et la trace

III MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1. Matrice d'une famille de vecteurs
2. Matrice d'une application linéaire
3. L'isomorphisme fondamental
4. Matrice d'une forme linéaire

IV RANG D'UNE MATRICE

1. Définition
2. Propriétés

V PRODUIT DE DEUX MATRICES

1. Définition
2. Produit matriciel et bases canoniques
3. Matrice de la composée de deux applications linéaires
4. Définition analytique d'une application linéaire
5. Propriétés usuelles des opérations sur les matrices
6. Puissances d'une matrice carrée
7. Produit de matrices particulières
8. Polynômes de matrices
9. Polynômes annulateurs d'une matrice
10. Produit et trace

VI MATRICES INVERSIBLES

1. Définition
2. Matrice inversible et isomorphisme
3. Caractérisations des matrices inversibles
4. Quelques propriétés
5. Inversibilité des matrices triangulaires et des matrices diagonales
6. Inversibilité des matrices d'ordre 2
7. Inversibilité de la transposée
8. Polynôme annulateur et inversion

VII CHANGEMENT DE BASE

1. Matrice de passage
2. Changement de base dans un espace vectoriel
3. Changement de base pour un endomorphisme

3'. Changement de base pour une application linéaire

4. Matrices semblables

VIII PRATIQUE DE L'INVERSIBILITÉ ET DE L'INVERSION

IX SAVOIR FAIRE

X COMPLÉMENTS

1. Égalité de deux matrices
2. Une nouvelle caractérisation des bases en dimension finie
3. Simplification par une matrice inversible
4. Matrice de passage again
5. Matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$
6. Encore du rang
7. Caractérisation des matrices de rang 1
8. Matrice à diagonale strictement dominante
9. Matrice nilpotente
10. Commutant d'une matrice ou d'un ensemble de matrices
11. Exponentielle d'une matrice
12. Interprétation matricielle des opérations élémentaires dans la méthode du pivot

XI DES PHRASES OU DES RHÉTORIQUES TOUTES FAITES

XII DES ERREURS À NE PAS FAIRE

MATRICES

P Mentionne des résultats particulièrement utiles et souvent oubliés dans la pratique des matrices...

★ Mentionne des erreurs à ne pas faire où des hypothèses importantes ou des mises en garde.

SD Mentionne des résultats qu'il serait bon de savoir démontrer.

Dans ce qui suit $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou des complexes, E et E' (et même E'') sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Sauf précisions n, p, q sont des éléments de $\mathbb{N}^*$.

I GÉNÉRALITÉS

▶ 1. Définitions

Déf. 1 On appelle **matrice de type $(\mathbf{n}, \mathbf{p})$** ou de format (n,p) ou de taille (n,p) à éléments ou à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$ ou encore toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de type (n,p) à éléments dans $\mathbb{K}$.

Un élément $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se représente par un tableau rectangulaire de n lignes et p colonnes où figure à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne : $a_{i,j}$.

Souvent on assimile la matrice et le tableau. On écrit alors :

$$A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Dans $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$, i est l'indice de ligne et j celui de colonne.

Le plus souvent au lieu de parler de l'élément $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, nous parlerons de l'élément $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$; $a_{i,j}$ est **le terme général ou l'élément générique de la matrice** A.

Déf. 2 Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si i est un élément de $[\![1,n]\!]$, la matrice $\begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A.

Si j est un élément de $[\![1,p]\!]$, la matrice $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Déf. 3 1. Les matrices de type (n, n) sont appelées **matrices carrées d'ordres n ou de taille n**.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$!

Si $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $a_{1,1}$, $a_{2,2}$,..., $a_{n,n}$ sont **les éléments ou coefficients diagonaux de la matrice** A.

2. Les matrices de type $(1, n)$ sont appelées **matrices lignes**.

3. Les matrices de type $(n, 1)$ sont appelées **matrices colonnes**.

★ Nous confondrons le plus souvent la matrice (a) de $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ avec l'élément a de $\mathbb{K}$.

Seconde année

Déf. 4 Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La trace de A est la somme des éléments diagonaux de A. On la note $\mathrm{Tr}(A)$. $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}}$.

▶ 2. Matrices carrées particulières

Déf. 5 1. I_n est l'élément $(a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que : $\forall i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} = 1$ et $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$;

on parle de **matrice identité** ou de **matrice unité**.

2. Soit $A = (a_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$A = (a_{i,j})$ est **scalaire** si : $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ A = \lambda\, \mathrm{I}_n$.

$A = (a_{i,j})$ est **diagonale** si : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

$A = (a_{i,j})$ est **triangulaire supérieure** si : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

$A = (a_{i,j})$ est **triangulaire inférieure** si : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$.

$A = (a_{i,j})$ est **symétrique** si : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{j,i} = a_{i,j}$.

$A = (a_{i,j})$ est **antisymétrique** si : $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{j,i} = -a_{i,j}$.

Dans la suite si n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$, $\mathrm{Diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ désignera la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments diagonaux sont, dans l'ordre, a_1, a_2, ..., a_n.

▶ 3. Transposée d'une matrice

Déf. 6 Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La transposée de A est la matrice $(b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par : $\forall (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!],\ b_{i,j} = a_{j,i}$.

On la note ${}^tA$.

Le programme de 2013 impose la notation ${}^tA$ mais on trouve parfois dans les problèmes de concours la notation A^t.

Prop. 1 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$.

A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$.

II ADDITION ET MULTIPLICATION EXTERNE DANS $\mathcal{M}_{\mathbf{n,p}}(\mathbb{K})$

▶ 1. Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Th. 1 Si $A=(a_{i,j})$ et $B=(b_{i,j})$ sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et α un élément de $\mathbb{K}$, on pose :

$$A+B=(a_{i,j}+b_{i,j}) \quad \text{et} \quad \alpha\cdot A=(\alpha\, a_{i,j})\,.$$

$\boxed{(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot\,) \text{ est un espace vectoriel sur } \mathbb{K}}$.

Dans la suite nous noterons $0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$ le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Nous parlerons de la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

▶ 2. Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Th. 2 et **déf. 7** Si i appartient à $[\![1,n]\!]$ et j à $[\![1,p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont tous nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et le $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

La famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. C'est la **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si $A=(a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $A=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\,E_{i,j}$ donc $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est la famille des coordonnées de A dans cette base.

$\boxed{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \text{ est de dimension } np \text{ sur } \mathbb{K}}$. $\boxed{\mathcal{M}_{n}(\mathbb{K}) \text{ est de dimension } n^2 \text{ sur } \mathbb{K}}$.

Th. 3 1. La base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est : $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Les coordonnées d'un élément $C=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans cette base sont : c_1, c_2, ..., c_n.

2. La base canonique de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ est : $\big((1\ \ 0\ \ \dots\ \ 0),(0\ \ 1\ \ \dots\ \ 0),\dots,(0\ \ 0\ \ \dots\ \ 1)\big)$.

Les coordonnées d'un élément $L=(\,\ell_1\ \ \ell_2\ \ \dots\ \ \ell_n\,)$ de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ dans cette base sont : ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_n.

▶ 3. Des sous-espaces usuels de $\mathcal{M}_{\mathbf{n}}(\mathbb{K})$

Prop. 2 A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et α est un élément de $\mathbb{K}$.

Si A et B sont scalaires, $\alpha\,A$ et $A+B$ sont scalaires.

Si A et B sont diagonales, $\alpha\,A$ et $A+B$ sont diagonales.

Si A et B sont triangulaires supérieures, $\alpha\,A$ et $A+B$ sont triangulaires supérieures.

Si A et B sont triangulaires inférieures, $\alpha\,A$ et $A+B$ sont triangulaires inférieures.

Prop. 3 Soient $A=\mathrm{Diag}(a_1,a_2,\dots,a_n)$ et $B=\mathrm{Diag}(b_1,b_2,\dots,b_n)$ deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit α un élément de $\mathbb{K}$.

$\boxed{A+B=\mathrm{Diag}(a_1+b_1,a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)}$ et $\boxed{\alpha\,A=\mathrm{Diag}(\alpha\,a_1,\alpha\,a_2,\dots,\alpha\,a_n)}$.

Prop. 4 1. L'ensemble des matrices scalaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est la droite vectorielle engendrée par I_n .

2. **SD** L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension n.

3. **SD** L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

4. **SD** L'ensemble des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Prop. 5 A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et α est un élément de $\mathbb{K}$.

Si A et B sont symétriques, $\alpha\, A$ et $A+B$ sont symétriques.

Si A et B sont antisymétriques, $\alpha\, A$ et $A+B$ sont antisymétriques.

Prop. 6 1. **SD** L'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. **SD** L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. **SD** Ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

P Soit M un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice symétrique S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une unique matrice antisymétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = A + S$. $\boxed{S = \dfrac{1}{2}\left(M + {}^tM\right)}$ et $\boxed{A = \dfrac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)}$.

▸ 4. Les deux opérations élémentaires et la transposition

Prop. 7 Soient α un élément de $\mathbb{K}$, A et B deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$\boxed{{}^t(\alpha\, A) = \alpha\, {}^tA}$ $\boxed{{}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB}$ $\boxed{{}^t\left({}^tA\right) = A}$.

Prop. 8 1. La transposition définie un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

2. La transposition définie un automorphisme involutif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

▸ 5. Les deux opérations élémentaires et la trace **Deuxième année**

Prop. 9 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit α un élément de $\mathbb{K}$.

$\boxed{\mathrm{Tr}(\alpha\, A) = \alpha\ \mathrm{Tr}(A)}$ $\boxed{\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)}$

Prop. 10 La trace définie une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de rang 1 .

III MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

▶ 1. Matrice d'une famille de vecteurs

Déf. 8 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille d'éléments de E.

Pour tout j dans $[\![1, p]\!]$ et pour tout i dans $[\![1, n]\!]$ on note $a_{i,j}$ la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de u_j dans la base $\mathcal{B}$.

L'élément $(a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelé **matrice de la famille** $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ **dans la base** $\mathcal{B}$.

On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ ou plus simplement $M_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

P $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ s'obtient en écrivant en colonne, et successivement, les coordonnées des vecteurs u_1, u_2, ..., u_p dans la base $\mathcal{B}$.

Th. 4 **P** Les notations sont celles de la définition précédente.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_p) = (a_{i,j}) \iff \forall j \in [\![1, p]\!],\ u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i}.$$

Déf. 9 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et u un vecteur de E de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la **matrice des coordonnées du vecteur** u **dans la base** $\mathcal{B}$, ou le vecteur colonne des coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ comme le dit le programme...

★★ Dans la situation précédente on est prié de ne pas confondre le vecteur u, la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

▶ 2. Matrice d'une application linéaire

Déf. 10 E est de dimension non nulle p et E' de dimension non nulle n.

f est une application linéaire de E dans E', $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une base de E'.

La **matrice de** f **relativement aux bases** $\mathcal{B}$ **et** $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $\big((f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_p)\big)$ dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$. Nous la noterons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ ou plus simplement $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$ est l'élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ obtenu en écrivant en colonne, et successivement, les coordonnées des vecteurs $f(e_1)$, $f(e_2)$, ..., $f(e_p)$ dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$.

★ Il convient de bien mémoriser qu'une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension p dans un espace vectoriel de dimension n est représentée par une matrice de type (n, p). Attention donc à "l'inversion".

P Il convient de retenir le schéma suivant : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & f(e_p) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \end{array}$.

★★ Le programme 2013 impose la notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$. Attention à "l'inversion". Beaucoup d'auteurs ne font pas l'inversion et utilisent $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ ou $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$. Perso j'utilisais jusqu'à maintenant $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')$. Faire donc très attention lorsque vous lirez d'anciennes corrections à la notation utilisée. Attention encore le jour du concours aux concepteurs un peu distraits...

Th. 5 **P** Les notations sont celles de la définition précédente.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j}) \iff \forall j \in [\![1,p]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e'_i}.$$

★ Cette équivalence doit devenir un réflexe fort.

Déf. 11 E est de dimension non nulle n. f est un endomorphisme de E et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la matrice de la famille $\big((f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\big)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. $\boxed{\text{On la note } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \text{ ou plus simplement } M_{\mathcal{B}}(f)}$.

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$=$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$!

Th. 6 **P** Les notations sont celles de la définition précédente.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j}) \iff \forall j \in [\![1,n]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, e_i}.$$

★ Cette équivalence doit devenir un réflexe fort.

▶ 3. L'isomorphisme fondamental

Th. 7 E est de dimension non nulle p et E' de dimension non nulle n.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ une base de E'.

1. Si f et g sont deux applications linéaires de E dans E' et α un élément de $\mathbb{K}$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\alpha\, f) = \alpha\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)}.$$

2. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ il existe une application linéaire f, de E dans E', et une seule telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = A$.

3. $\varphi : \mathcal{L}(E,E') \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. φ est un isomophisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E,E')$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$\quad f \longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)$

P S'il convient de savoir trouver la matrice d'une application linéaire relativement à deux bases il convient également de savoir associer à une matrice une application linéaire. Voila une phrase toute faite permettant de le faire dans le cas où A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Considérons l'application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$ est A.

On dit que **f est l'application linéaire canoniquement associée à A.**

Th. 8 E est de dimension n non nulle et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. Si f et g sont deux endomorphismes de E et α un élément de $\mathbb{K}$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f+g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\alpha\, f) = \alpha\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}.$$

2. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il existe un endomorphisme f de E et un seul tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$.
3. $\begin{array}{l} \varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ \qquad f \longrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$. φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

P S'il convient de savoir trouver la matrice d'un endomorphisme relativement à une base il convient également de savoir associer à une matrice carrée un endomorphisme. Voila une phrase toute faite permettant de le faire dans le cas où A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est A.

On dit que **f est l'endomorphisme canoniquement associée à A.**

▶ 4. Matrice d'une forme linéaire

Prop. 11 E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

La matrice d'une forme linéaire sur E, relativement à une base de E et une base de $\mathbb{K}$, est un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ donc une matrice ligne.

Prop. 12 Réciproquement toute matrice ligne est la matrice d'une forme linéaire.

IV RANG D'UNE MATRICE

▶ 1. Définition

Déf. 12 Le **rang d'une matrice** de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ engendré par les colonnes de cette matrice.

▶ 2. Propriétés

Prop. 13 **P** Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ engendré par les lignes de cette matrice.

Prop. 14 **P** On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant sur cette matrices les opérations élémentaires sur les lignes $L_i \longleftrightarrow L_j$, $L_j \leftarrow L_j + \lambda\, L_i$ ou $L_i \leftarrow \lambda\, L_i$ avec cette fois λ non nul.

On ne change pas le rang d'une matrice en effectuant sur cette matrices les opérations élémentaires sur les colonnes $C_i \longleftrightarrow C_j$, $C_j \leftarrow C_j + \lambda\, C_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda\, C_i$ avec cette fois λ non nul.

Th. 9 E est de dimension non nulle p et E' de dimension non nulle n. f est une application linéaire de E dans E', $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \dots, {e'}_n)$ une base de E'. A est la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) \text{ ou } \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\right)}.$$

Prop. 15 Soit A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\mathrm{rg}(A) \leqslant \mathrm{Min}(n,p)$.

Prop. 16 Soit A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\boxed{\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)}$.

V PRODUIT DE DEUX MATRICES

1. Définition

Déf. 13 $A = (a_{i,j})$ est une matrice de type (n,p) à éléments dans $\mathbb{K}$ et $B = (b_{i,j})$ une matrice de type (p,q) à éléments dans $\mathbb{K}$.

Le produit de A par B est la matrice $C = (c_{i,j})$ de type (n,q) à éléments dans $\mathbb{K}$ définie par :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\, b_{k,j}}.$$

On le note $A \times B$ ou plus simplement AB.

★ Le produit de AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

★ A retenir : "Type $(n,p) \times$ Type $(p,q) =$ Type (n,q)".

P $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $C = AB = (c_{i,j})$.

L'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB et de sa $j^{\text{ème}}$ colonne est le produit matriciel de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A avec la $j^{\text{ème}}$ colonne de B ou :

$$\boxed{c_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix}}.$$

P $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})$ un élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $C = AB = (c_{i,j})$.

Pour tout j dans $[\![1,q]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de AB est le produit de A par la $j^{\text{ème}}$ colonne de B.

Pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB est le produit de la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par B.

2. Produit matriciel et bases canoniques

Prop. 17 **P** $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

La $j^{\text{ème}}$ colonne de A est le produit AE_j où E_j est le $j^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

La $i^{\text{ème}}$ ligne de A est le produit ${}^tE'_iA$ où E'_i est le $i^{\text{ème}}$ élément de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Avec les notations précédentes : $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!],\ a_{i,j} = {}^tE'_iAE_j$.

Ce modeste résultat est très pratique pour "extraire" une colonne ou une ligne ou un élément d'une matrice.

Prop. 18 Soit $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et soit $(E_{i,j})_{(i,j)\in\in[\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $\boxed{\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ E_{i,j}=E_i\,{}^tE_j}$.

2. $\boxed{\forall (p,q,r,s)\in [\![1,n]\!]^4,\ E_{p,q}\,E_{r,s}=\begin{cases} E_{p,s} & \text{si } q=r\\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} & \text{sinon}\end{cases}}$.

▸ 3. Matrice de la composée de deux applications linéaires

Th. 10 $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base de E. f et g sont deux endomorphismes de E.

Si A est la matrice de f dans $\mathcal{B}$ et B celle de g dans $\mathcal{B}$, alors BA est la matrice de $g\circ f$ dans $\mathcal{B}$. En clair :

P $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g\circ f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)\times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)}$.

Th. 11 E, E' et E'' sont de dimensions finies non nulles. $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ en sont des bases respectives. f est une application linéaire de E dans E' et g une application linéaire de E' dans E''. Alors :

P $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}(g\circ f)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(g)\times \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)}$.

▸ 4. Définition analytique d'une application linéaire

Th. 12 E est de dimension non nulle p et E' de dimension non nulle n. f est une application linéaire de E dans E', $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ une base de E'.

$A=(a_{i,j})$ est la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

u est un élément de E de matrice $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. v est un élément de E' de matrice $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

P $\boxed{f(u)=v \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) \iff AX=Y \iff \forall i\in[\![1,n]\!],\ y_i=\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\,x_k}$

★ Le résultat précédent doit devenir un réflexe fort.

▸ 5. Propriétés usuelles des opérations sur les matrices

Prop. 19 A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\boxed{A\,0_{\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})}=0_{\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})}}$ et $\boxed{0_{\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})}\,A=0_{\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})}}$.

Prop. 20 A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\boxed{A\,I_p=A}$ et $\boxed{I_n\,A=A}$.

Th. 13 A, B et C sont trois matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$. α est un élément de $\mathbb{K}$.

Si $(AB)C$ a un sens $A(BC)$ aussi et : $(AB)C=A(BC)$.

Si $A(B+C)$ a un sens $AB+AC$ aussi et : $A(B+C)=AB+AC$.

Si $(B+C)A$ a un sens $BA+CA$ aussi et : $(B+C)A=BA+CA$.

Si AB a sens on peut écrire : $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.

★ Si A et B sont deux matrices AB peut être défini sans que BA le soit.

★★ Si A et B sont deux élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ AB n'est en général pas égal à BA.

★★ Si A et B sont deux matrices $AB = 0$ ne donne pas nécessairement $A = 0$ ou $B = 0$.

★ Si A, B, C sont trois matrices $AB = AC$ ne donne pas nécessairement $B = C$.

Prop. 21 Soient A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B un élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. $\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$.

▸ 6. Puissances d'une matrice carrée

Th. 14 et **déf. 14** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On considère la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence suivante.

$A^0 = I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ A^{k+1} = A^k\, A$.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, A^k est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée puissance $k^{\text{ème}}$ de A.

Prop. 22 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et f un endomorphisme de E.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big)^k}.$$

Prop. 23 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient r et r deux éléments de $\mathbb{N}$.

$\boxed{A^r\, A^s = A^s\, A^r = A^{r+s}}$ et $\boxed{(A^r)^s = (A^s)^r = A^{rs}}$.

Prop. 24 **SD** A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **qui commutent** ★ $(AB = BA)$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ (AB)^k = A^k\, B^k}.$$

Pour démontrer cela on peut faire deux récurrences. La première consiste à montrer que B commute avec les puissances de A. La seconde achève de prouver le résultat.

Prop. 25 A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **qui commutent** ★ $(AB = BA)$. p est un élément de $\mathbb{N}$:

$$\boxed{(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k\, A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k\, A^{p-k} B^k}.$$

Prop. 26 A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **qui commutent** ★ $(AB = BA)$. p est un élément de $\mathbb{N}^*$.

$$\boxed{A^p - B^p = (A-B)\Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\Big) = (A-B)\Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^{p-1-k} B^k\Big)}.$$

$$\boxed{A^p - B^p = \Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k}\Big)(A-B) = \Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^{p-1-k} B^k\Big)(A-B)}.$$

Prop. 27 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et p est un élément de $\mathbb{N}$. $\boxed{{}^t(A^p) = ({}^tA)^p}$.

▶ 7. Produit de matrices particulières

Prop. 28 Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, AB (resp. BA) est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est stable pour $\times$.

Prop. 29 Si L est une matrice ligne de type $(1, n)$ à éléments dans $\mathbb{K}$ et C est une matrice colonne de type $(n, 1)$ à éléments dans $\mathbb{K}$:

- Le produit LC est une matrice de type $(1, 1)$ que nous assimilerons à un élément de $\mathbb{K}$.
- Le produit CL est une matrice carrée d'ordre n.

Prop. 30 Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A et B sont scalaires, AB est scalaire.

Si A et B sont diagonales, AB est diagonale.

Si A et B sont triangulaires supérieures, AB est triangulaire supérieure.

Si A et B sont triangulaires inférieures, AB est triangulaire inférieure.

P Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices triangulaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les éléments diagonaux de AB sont, dans l'ordre, $a_{1,1}\, b_{1,1}$, $a_{2,2}\, b_{2,2}$, ..., $a_{n,n}\, b_{n,n}$.

Prop. 31 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit k un élément de $\mathbb{N}$.

Si A est scalaire, A^k est scalaire.

Si A est diagonale, A^k est diagonale.

Si A est triangulaire supérieure, A^k est triangulaire supérieure.

Si A est triangulaire inférieure, A^k est triangulaire inférieure.

Prop. 32 Soient $A = \mathrm{Diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $B = \mathrm{Diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$$\boxed{AB = \mathrm{Diag}(a_1\, b_1, a_2\, b_2, \ldots, a_n\, b_n)} \quad \text{et} \quad \boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ A^p = \mathrm{Diag}(a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p)}.$$

▶ 8. Polynômes de matrices

Prop. 33 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, X^k$ est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

$\displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\, A^k$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que l'on note $P(A)$.

Th. 15 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, P et Q sont deux éléments de $\mathbb{K}[X]$ et α est un élément de K.

$$\boxed{(P+Q)(A) = P(A) + Q(A)} \quad \boxed{(\alpha\, P)(A) = \alpha\, P(A)} \quad \boxed{(PQ)(A) = P(A)\, Q(A) = Q(A)\, P(A)}.$$

P On retiendra que $P(A)$ et $Q(A)$ commutent.

Cor. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\{P(A)\,;\, P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stable par $\times$.

Prop. 34 λ est un élément de $\mathbb{K}$ et P est le polynôme constant égal à λ.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P(A) = \lambda\, I_n$.

★ On évitrera d'écrire $P(A)=\lambda$.

Prop. 35 P est un élément $\mathbb{K}[X]$. Si A est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P(A)$ est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prop. 36 Soient $A=\text{Diag}(a_1,a_2,\dots,a_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si P est un élément de $\mathbb{K}[X]$, $P(A)=\text{Diag}\big(P(a_1),P(a_2),\dots,P(a_n)\big)$.

Prop. 37 $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base de E, f un endomorphisme de E et P un élément de $\mathbb{K}[X]$.

$$\boxed{\text{Mat}_{\mathcal{B}}\left(P(f)\right)=P\big(\text{Mat}_B(f)\big).}$$

▸ 9. Polynômes annulateurs d'une matrice

Déf. 15 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle **polynôme annulateur** de A tout élément P de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(A)=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Prop. 38 A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. L'ensemble des polynômes annulateurs de A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Si P est un polynôme annulateur de A et Q un élément quelconque de $\mathbb{K}[X]$, PQ est encore un polynôme annulateur A.

Prop. 39 $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base de E, f un endomorphisme de E et P un élément de $\mathbb{K}[X]$.

P est un polynôme annulateur de f si et seulement si P est un polynôme annulateur de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Deuxième année

Th. 16 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède un polynôme annulateur **non nul**.

On montre ce résultat en remarquant que si A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la famille $(\mathrm{I}_n,A,A^2,\dots,A^{n^2})$ est liée...

▸ 10. Produit et trace

Deuxième année

Prop. 40 **SD** Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\boxed{\text{Tr}(AB)=\text{Tr}(BA)}$.

★ Résulat qu'il vaut mieux savoir démontrer car sa présence au programme n'est pas explicite.

VI MATRICES INVERSIBLES

▸ 1. Définition

Déf. 16 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est **inversible** si elle symétrisable pour $\times$, autrement dit s'il existe un élément A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AA'=A'A=\mathrm{I}_n$.

Si A est symétrisable, l'élément A' est unique et s'appelle **le symétrique ou l'inverse de** A et se note A^{-1}.

Déf. 17 On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $GL_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe linéaire sur** $\mathbb{K}$ **de type** n **ou d'ordre** n.

▸ 2. Matrice inversible et isomorphisme

Th. 17 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E et f un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

A est inversible si et seulement si f est bijectif (resp. injectif ; resp. surjectif).

Autrement dit A appartient à $GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si f appartient à $GL(E)$.

Si A est inversible : A^{-1} est la matrice de f^{-1} dans la base $\mathcal{B}$; autrement dit :

$$\boxed{\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1})}.$$

Th. 18 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ une base de E'.

Notons que l'on a $\dim E = \dim E' < +\infty$.

f est une application linéaire de E dans E' de matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

A est inversible si et seulement si f est bijective (resp. injectif ; resp. surjectif).

Si A est inversible : A^{-1} est la matrice de f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$; autrement dit :

$$\boxed{\big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\big)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1})}.$$

▸ 3. Caractérisations des matrices inversibles

Th. 19 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

i) A est inversible.

ii) $\boxed{\mathbf{P}}$ $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(K)} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

iii) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\ AX = Y$.

iv) $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), \exists ! X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\ AX = Y$.

v) $\boxed{\mathbf{P}}$ $\exists A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AA' = \mathrm{I}_n$ (inversibilité à droite).

vi) $\boxed{\mathbf{P}}$ $\exists A'' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A''A = \mathrm{I}_n$ (inversibilité à gauche).

vii) 0 n'est pas valeur propre de A.

viii) A admet une réduite de Gauss inversible c'est à dire sans zéro sur la diagonale.

ix) $\mathrm{rg}(A) = n$.

Notons que si l'on a v)) A est inversible et $A^{-1} = A'$.

Notons que si l'on a vi), A est inversible et $A^{-1} = A''$.

▶ 4. Quelques propriétés

Th. 20 1. Si A et B sont deux éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le produit AB est inversible et :

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}}.$$

2. Plus généralement si A_1, A_2, ..., A_p sont p matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$alors $A_1\,A_2\cdots A_p$ est une matrice inversible et :

$$\boxed{\big(A_1\,A_2\cdots A_p\big)^{-1} = A_p^{-1}\,A_{p-1}^{-1}\cdots A_1^{-1}}.$$

3. Si A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si p appartient à $\mathbb{N}$, A^p est inversible et $\boxed{(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p}$.

Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le point trois permet d'envisager la définition des puissances négatives de A en posant :

$$\forall k \in \mathbb{Z} - \mathbb{N},\ A^k = (A^{-1})^{-k} = (A^{-k})^{-1}.$$

Si r et s sont dans $\mathbb{Z}$ on a encore :

$$\boxed{A^r\,A^s = A^s\,A^r = A^{r+s}} \quad \boxed{(A^r)^s = (A^s)^r = A^{rs}} \quad \boxed{(A^r)^{-1} = (A^{-1})^r} \quad \boxed{{}^t(A^r) = ({}^tA)^r}.$$

Th. 21 A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si α est un élément non nul de $\mathbb{K}$.

$\alpha\,A$ est inversible et $\boxed{(\alpha\,A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}\,A^{-1}}$.

Cor. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible, A^{-1} est inversible et $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$.

Prop. 41 **P** A_1, A_2, ..., A_p sont p éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si la matrice $A_1\,A_2\cdots A_p$ n'est pas inversible, l'une au moins des matrices A_1, A_2, ..., A_p n'est pas inversible.

Petit résultat anodin qui peut rendre de gros services en réduction...

▶ 5. Inversibilité des matrices triangulaires et des matrices diagonales

Th. 22 Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si TOUS ses éléments diagonaux sont non nuls.

Une matrice triangulaire n'est pas inversible si et seulement si AU MOINS UN de ses éléments diagonaux est nul.

Prop. 42 L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) inversible est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).

Th. 23 Soit $D = \mathrm{Diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

D est inversible si et seulement si pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $d_i \neq 0$.

En cas d'inversibilité : $D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\dfrac{1}{d_1}, \dfrac{1}{d_2}, \ldots, \dfrac{1}{d_n}\right)$.

Prop. 43 I_n est inversible et $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.

▶ 6. Inversibilité des matrices d'ordre 2

Prop. 44 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

1. A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.
2. Si A est inversible : $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$.

▶ 7. Inversibilité de la transposée

Th. 24 Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. ${}^tA$ est inversible si et seulement si A est inversible.

En cas d'inversibilité : $\boxed{\left({}^tA\right)^{-1} = {}^tA^{-1}}$.

▶ 8. Polynôme annulateur et inversion

Th. 25 **P** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$ est un polynôme annulateur de A.

Ainsi $P(A) = \sum_{k=0}^{r} a_k A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Si $P(0) = a_0$ n'est pas nul, A est inversible et $A^{-1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \left(\frac{a_k}{a_0}\right) A^{k-1}$.

VII CHANGEMENT DE BASE **Seconde année**

▶ 1. Matrice de passage

Déf. 18 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de E.

La **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice de la famille $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ dans la base $\mathcal{B}$. Le programme 2013 propose de la notée $P_{B,\mathcal{B}'}$.

$$\boxed{P_{B,\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'}.$$

P On l'obtient donc en écrivant en colonne les coordonnées des éléments de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Perso j'utilise aussi la notation $\mathrm{Pas}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$...

P Il peut être intéressant de remarquer que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est aussi la matrice de l'endomorphisme Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ (attention à l'ordre). Résultat à bien comprendre et à retenir...

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)}.$$

P Il peut être intéressant de remarquer que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est aussi la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'automorphisme de E qui transforme la base $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{B}'$.

Th. 26 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ sont deux bases de E.

La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et son inverse est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

$$\boxed{\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}.$$

▶ 2. Changement de base dans un espace vectoriel

Th. 27 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \dots, {e'}_n)$ sont deux bases de E.

Si u est un élément de E de matrice X dans $\mathcal{B}$ et X' dans $\mathcal{B}'$ alors :

$\boxed{X = PX' \quad \text{et} \quad X' = P^{-1}X}$ ou $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)}$.

Notons que ce résulat ne nous est pas très favorable ! En effet il nous faut $P^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ pour obtenir les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$ à partir de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$...

▶ 3. Changement de base pour un endomorphisme

Th. 28 E est de dimension n non nulle. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \dots, {e'}_n)$ sont deux bases de E.

f est un endomorphisme de E de matrice A dans $\mathcal{B}$ et A' dans $\mathcal{B}'$.

P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\,P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}}.$$

$$\boxed{A' = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad A = PA'P^{-1}}.$$

▶ 3'. Changement de base pour une application linéaire. Hors programme...

Th. 29 E est un espace vectoriel de dimension non nulle p. $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_1$ sont deux bases de E et P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$.

E' est un espace vectoriel de dimension non nulle n. $\mathcal{B}'$ et ${\mathcal{B}'}_1$ sont deux bases de E' et Q est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}'_1$.

f est une application linéaire de E dans E' de matrices A relativement aux base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ et de matrices A_1 relativement aux base $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$.

$$\boxed{A_1 = Q^{-1}\,A\,P \quad \text{ou} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_1,\mathcal{B}_1}(f) = \left(P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'_1}\right)^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\,P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1}}.$$

▶ 4. Matrices semblables

Déf. 19 A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

B est **semblable** à A s'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $B = P^{-1}AP$.

Prop. 45 A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A est semblable à A.

Si B est semblable à A, A est semblable à B. Nous pourrons alors dire que A **et** B **sont semblables**.

Si A est semblable à B et B est semblable à C, A est semblable à C.

Ainsi la semblablité définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Th. 30 1. f est un endomorphisme de E de dimension n sur $\mathbb{K}$.

Les matrices de f relativement à deux bases de E sont semblables.

P 2. A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

A et B sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{K}$ relativement à deux bases de E.

P Pour montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables on procède le plus souvent de la manière suivante :

1. On se donne l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique de $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ (f est l'endomorphisme canoniquement associé A).
2. On montre (après une petite analyse) l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = B$.

Th. 31 Deux matrices semblables ont même rang.

Th. 32
1. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\boxed{\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(P^{-1}AP\right)}$.
2. Deux matrices semblables ont même trace.

Notons que ce dernier résultat permet de définir la trace d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension non nulle n sur $\mathbb{K}$ comme étant la trace d'une de ses matrices dans une base.

Prop. 46 A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Si p est un élément de $\mathbb{N}$ et si Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$:

$$\boxed{B^p = P^{-1}A^pP} \quad \text{et} \quad \boxed{Q(B) = P^{-1}Q(A)P}.$$

VIII PRATIQUE DE L'INVERSIBILITÉ ET DE L'INVERSION

Évoquons quelques méthodes pour inverser une matrice inversible $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1 On part de deux éléments $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $AX = Y$.

On exprime alors x_1, x_2,..., x_n en fonction de y_1, y_2 ,..., y_n.

On obtient alors une matrice A' telle que $A'Y = X$ qui n'est autre que A^{-1}.

Notons qu'il est inutile de raisonner par équivalences si l'on sait que A est inversible...

2 On considère l'automorphisme f de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ est A.

A est encore la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ à la base $\big(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\big)$.

A^{-1} est alors la matrice de passage de $\big(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\big)$ à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Trouver A^{-1} revient alors à exprimer e_1, e_2,..., e_n en fonction de $f(e_1)$, $f(e_2)$,..., $f(e_n)$.

Trouver A^{-1} revient encore à exprimer les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ en fonction des colonnes de A.

2' On considère la famille $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ est A. A étant inversible, $\mathcal{B}'$=$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.

A est encore la matrice de passage de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ à la base $\mathcal{B}'$=$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$.

A^{-1} est alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$=$(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ à la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

Trouver A^{-1} revient alors à exprimer e_1, e_2,..., e_n en fonction de e'_1, e'_2,..., e'_n.

Trouver A^{-1} revient encore à exprimer les éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ en fonction des colonnes des A.

3 Le pivot de Gauss.

On part de $\mathrm{I}_n = AA^{-1}$. On effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A pour obtenir une matrice triangulaire, puis pour obtenir I_n. En effectuant SIMULTANÉMENT les mêmes opérations sur la matrice I_n figurant à gauche de l'égalité initiale on obtient A^{-1}.

4 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si l'on trouve A' (resp. A'') tel que $AA' = \mathrm{I}_n$ (resp. $A''A = \mathrm{I}_n$), on peut alors dire que A est inversible et que $A^{-1} = A'$ (resp. $A^{-1} = A''$).

5 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose qu'il existe un élément $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k\, X^k$ de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k\, A^k = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et $P(0) \neq 0$ (c'est à dire $a_0 \neq 0$).

Alors A est inversible et $A^{-1} = -\dfrac{1}{a_0} \displaystyle\sum_{k=1}^{q} a_k A^{k-1}$.

6 B est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe un élément q de $\mathbb{N}^*$ tel que : $B^q = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

$\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n^q - B^q = (\mathrm{I}_n - B)\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} B^k\Big)$.

Alors $A = \mathrm{I}_n - B$ est inversible et d'inverse : $\displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} B^k = \mathrm{I}_n + B + B^2 + \cdots + B^{q-1}$. En changeant B en $-B$ on obtient l'inversibilité et l'inverse de $\mathrm{I}_n + B$.

IX SAVOIR FAIRE

- Trouver la matrice d'une application est linéaire.
- Associer une application linéaire à une matrice.
- Définir analytiquement une application linéaire à partir de sa matrice.
- Utiliser toutes les opérations (et leurs propriétés) sur les matrices.
- Travailler sur les puissances de matrices.
- Travailler sur les polynômes de matrices.
- Calculer la puissance $n^{\text{ème}}$ d'une matrice.
- Trouver le rang d'une matrice.
- Montrer qu'une matrice est inversible.
- Trouver l'inverse d'une matrice inversible.
- Trouver la matrice de passage entre deux bases.
- Utiliser les formules de changement de base.
- Montrer que deux matrices sont semblables.

X COMPLÉMENTS

▶ 1. Egalité de deux matrices

Prop. 47 **P** Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. $A = 0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} \iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.
2. $A = B \iff \forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}),\ AX = BX$.

Prop. 48 **P** Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

$$\boxed{A = B \iff \forall i \in [\![1,p]\!],\ AE_i = BE_i}$$

.

▶ 2. Une nouvelle caractérisation des bases en dimension finie

Th. 33 $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une famille de n éléments de E.

$(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ de cette famille dans la base $\mathcal{B}$ est inversible.

Si $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une base, l'inverse de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est la matrice de la famille $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ dans la base $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

▶ 3. Simplification par une matrice inversible

Prop. 49 A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si AB est la matrice nulle et $\boxed{\text{si l'une des matrices est inversible}}$ l'autre est nulle.

Si $AB = AC$ (resp. $BA = CA$) et $\boxed{\text{si } A \text{ est inversible}}$ alors $B = C$.

▶ 4. Matrice de passage again

Prop. 50 $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases de E. $\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}}$.

▶ 5. Matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$

Prop. 51
- La matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans une base quelconque est d'ordre $n+1$!
- **P** Si f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ et si, pour tout élément P de $\mathbb{K}_n[X]$, $\deg f(P) \leqslant \deg P$ alors la matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure (ce qui donne immédiatement le spectre de f).

▶ 6. Encore du rang

Prop. 52 A est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si B est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}\, A$.

Si C est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$: $\mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg}\, A$.

Th. 34 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r un élément non nul de $\mathbb{N}$. À deux petits abus près, A est de rang r si et seulement si :

$$\exists (P,Q) \in Gl_p(\mathbb{K}) \times Gl_n(\mathbb{K}),\ Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

I_r est la matrice indentité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $O_{r,p-r}$, $O_{n-r,r}$ et $O_{n-r,p-r}$ sont les matrices nulles de $\mathcal{M}_{r,p-r}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n-r,p-r}(\mathbb{K})$.

▶ 7. Caractérisation des matrices de rang 1

Prop. 53 1. X et Y sont deux matrices non nulles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. X^tY est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

2. Réciproquement si A est une matrice de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe deux matrices non nulles X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $A = X^tY$.

Ce résultat se généralise sans problème dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

▶ 8. Matrice à diagonale strictement dominante

Déf. 20 Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est à **diagonale strictement dominante** si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|.$$

Prop. 54 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

▶ 9. Matrice nilpotente

Déf. 21 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A est **nilpotente** s'il existe un élément k de $\mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.
2. Si A est nilpotente, **l'indice de nilpotence** de A est le plus petit élément p de $\mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Prop. 55 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note p l'indice de nilpotence de A.

1. $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ A^k \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et $\forall k \in [\![p, +\infty[\![,\ A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.
2. X^p est un polynôme annulateur non nul de A (c'est même son polynôme minimal...).
3. $(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$ est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.
4. $(I_n, A, \ldots, A^{p-1})$ est une base du sous-espace vectoriel $\{P(A)\,;\, P \in \mathbb{K}[X]\}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prop. 56 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ **qui commutent**.

$A + B$ et AB sont deux matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Prop. 57 Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et r un élément de $\mathbb{N}^*$ tel que $A^r = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

$I_n - A$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(I_n - A)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} A^k$.

▶ 10. Commutant d'une matrice ou d'un ensemble de matrices

Déf. 22 Soit $\mathcal{P}$ est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le commutant de $\mathcal{P}$ est l'ensemble des matrices qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{P}$. Nous le noterons $\mathcal{C}(\mathcal{P})$. $\boxed{\mathcal{C}(\mathcal{P}) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall P \in \mathcal{P},\ BP = PB\}}$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le commutant de A est l'ensemble des matrices qui commutent avec A. Nous le noterons $\mathcal{C}(A)$. $\boxed{\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid BA = AB\}}$.

Prop. 58 Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Le commutant $\mathcal{C}(\mathcal{P})$ de $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $\forall B \in \mathcal{C}(\mathcal{P}), \forall C \in \mathcal{C}(\mathcal{P}),\ BC \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$.
3. $\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ \forall B \in \mathcal{C}(\mathcal{P}),\ Q(B) \in \mathcal{C}(\mathcal{P})$.

Prop. 59 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Le commutant $\mathcal{C}(A)$ de A est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $\forall B \in \mathcal{C}(A), \forall C \in \mathcal{C}(A),\ BC \in \mathcal{C}(A)$.
3. $\forall Q \in \mathbb{K}[X],\ \forall B \in \mathcal{C}(A),\ Q(B) \in \mathcal{C}(A)$.
4. Si A est inversible, $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(A^{-1})$.

Prop. 60 L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices scalaires. Donc $\mathcal{C}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \mathrm{Vect}(I_n)$

Prop. 61 L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les matrices de $GL_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices scalaires. Donc $\mathcal{C}(GL_n(\mathbb{K})) = \mathrm{Vect}(I_n)$

Prop. 62 Soir D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.

1. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 . $\mathrm{Vect}(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une base du commutant de D.

▸ 11. Exponentielle d'une matrice

Th. 35 et **déf. 23** A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout p dans $\mathbb{N}$ on pose $A^p = \big(a_{i,j}(p)\big)$.

Pour tout élément (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$, la série de terme général $\dfrac{a_{i,j}(p)}{p!}$ converge.

On pose pour tout (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$ on pose $S^A_{i,j} = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_{i,j}(p)}{p!}$.

La matrice $\big(S^A_{i,j}\big)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'exponentielle de A. On la note e^A ou $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}\, A^p$.

Prop. 63 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $e^{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}} = I_n$.
2. e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
3. ${}^t e^A = e^{{}^t A}$.
4. Si $A = \mathrm{Diag}\,(d_1, d_2, \dots, d_n)$ alors $e^A = \mathrm{Diag}\,(e^{d_1}, e^{d_2}, \dots, e^{d_n})$.
5. Si P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $e^{P^{-1}\,A\,P} = P^{-1}\, e^A\, P$.
6. e^A est un polynôeme de A.

Prop. 64 A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. $\boxed{e^{A+B} = e^A\, e^B = e^B\, e^A}$.

▸ 12. Interprétation matricielle des opérations élémentaires dans la méthode du pivot

Prop. 65 Soit A un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Pour transformer A par une opération élémentaire sur les **lignes** il suffit de la multiplier à **gauche** par la matrice déduite de I_n par la même opération élémentaire.

Pour transformer A par une opération élémentaire sur les **colonnes** il suffit de la multiplier à **droite** par la matrice déduite de I_p par la même opération élémentaire.

Prop. 66 n est dans N^*, i et j sont dans $[\![1, n]\!]$.

1. La matrice déduite de I_n par l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$ est inversible et égale à son inverse.

2. α est un élément non nul de $\mathbb{K}$. La matrice déduite de I_n par l'opération $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ est inversible et son inverse est la matrice déduite de I_n par l'opération $L_i \longleftarrow 1/\alpha L_i$.

3. α est un élément de $\mathbb{K}$. La matrice déduite de I_n par l'opération $L_j \longleftarrow L_j + \alpha L_i$ est inversible et son inverse est la matrice déduite de I_n par l'opération $L_j \longleftarrow L_j - \alpha L_i$.

Prop. 67 p est dans N^*, i et j sont dans $[\![1, p]\!]$.

1. La matrice déduite de I_p par l'opération $C_i \longleftrightarrow C_j$ est inversible et égale à son inverse.

2. α est un élément non nul de $\mathbb{K}$. La matrice déduite de I_p par l'opération $C_i \longleftarrow \alpha C_i$ est inversible et son inverse est la matrice déduite de I_p par l'opération $C_i \longleftarrow 1/\alpha C_i$.

3. α est un élément de $\mathbb{K}$. La matrice déduite de I_p par l'opération $C_j \longleftarrow C_j + \alpha C_i$ est inversible et son inverse est la matrice déduite de I_p par l'opération $C_j \longleftarrow C_j - \alpha C_i$.

Prop. 68 A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes on peut transformer A en une matrice triangulaire A'.

Il existe alors une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A' = PA$.

P est la matrice obtenue en effectuant sur I_n les opérations effectuées sur A.

A est inversible si et seulement si A' est inversible.

2. Par une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes on peut transformer A en une matrice triangulaire A''.

Il existe alors une matrice inversible Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A'' = AQ$.

Q est la matrice obtenue en effectuant sur I_n les opérations effectuées sur A.

A est inversible si et seulement si A'' est inversible.

Th. 36 A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Par des opérations élémentaires sur les lignes on peut transformer A en I_n.

A^{-1} est la matrice obtenue en effectuant sur I_n les mêmes opérations.

2. Par des opérations élémentaires sur les colonnes on peut transformer A en I_n.

A^{-1} est la matrice obtenue en effectuant sur I_n les mêmes opérations.

XI DES PHRASES OU DES RHÉTORIQUES TOUTES FAITES

► **Inverser une matrice**

A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour trouver l'inverse de A : Considérons un élément $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons : $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = AX$.

On exprime alors les composantes de X en fonction de celles de Y sans raisonner par équivalences.

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour traiter simultanément l'inversibilité et l'inversion éventuelle de A.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. $AX = Y \Leftrightarrow ....$

On résout ensuite ce système en raisonnant par équivalences.

▶ **Associer un endomorphisme à une matrice carrée**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Posons $E = \mathbb{K}^n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$. Considérons l'endomorphisme f de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A $(A = M_{\mathcal{B}}(f))$.

▶ **Associer une application linéaire à une matrice.**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Posons $E = \mathbb{K}^p$, et $E' = \mathbb{K}^n$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ la base canonique de $E' = \mathbb{K}^n$. Considérons l'application linéaire f de E dans E' dont la matrice relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est A $(M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A)$.

▶ **Semblablité**

Soit à montrer que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $E = \mathbb{K}^n$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A. Cherchons une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f est B.

On fait alors une analyse du problème en commençant par supposer que $\mathcal{B}'$ existe et on termine par une synthèse.

XII DES ERREURS À NE PAS FAIRE

★ Confondre un vecteur et la matrice de ses cordonnées.

★ A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Écrire $A = a_{i,j}$ (au lieu de $A = \big(a_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ ou de $A = \big(a_{i,j}\big)$).

★ A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Écrire $A = B \Longleftrightarrow a_{i,j} = b_{i,j}$ (au lieu de $A = B \Longleftrightarrow \forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ a_{i,j} = b_{i,j}$).

★ A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Écrire $\dim A = n$.

★ A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$(U_p)_{p\geqslant p_0}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $\forall p \in [\![p_0, +\infty[\![,\ U_{p+1} = AU_p$.

Écrire que $(U_p)_{p\geqslant p_0}$ est une suite géométrique.

★ A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Écrire $AB = BA$ sans le justifier.

★ A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Écrire que $AB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ donne $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ ou $B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Écrire que $AB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et A non nulle donne $B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Écrire que $AB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et B non nulle donne $A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

★ A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Écrire que $AB = AC$ et A non nulle donne $B = C$.

★ A, B et C sont trois éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Écrire que $BA = CA$ et A non nulle donne $B = C$.

★ A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

• Si $P = X - \alpha$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ écrire $P(A) = A - \alpha$ (à la place de $P(A) = A - \alpha\, I_n$).

• Si $P = a\,X^2 + b\,X + c$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ écrire $P(A) = a\,A^2 + A\,f + c$ (à la place de $P(A) = a\,A^2 + A\,f + c\,I_n$).

Même chose lorsque P est un élément quelconque de $\mathbb{K}[X]$.

★ A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Écrire des $(A-1)(A-3)$ ou $(A - \mathrm{Id})(A - 3\,\mathrm{Id})$ à la place de $(A - I_n)(A - 3\,I_n)$.
- Écrire des $A^3 - 4\,A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ donne $A\,(A^2 - 4) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ à la place de $A\,(A^2 - 4\,I_n) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

★ A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$ et Q est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

Écrire que $Q(B) = Q(P^{-1})Q(A)Q(P)$ (à la place de $Q(B) = P^{-1}Q(A)P$).

★ A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Écrire que $(A+B)^2 = A^2 + 2\,AB + B^2$ sans vérifier que $AB = BA$.

★ Plus généralement écrire la formule du binôme pour deux matrices sans vérifier qu'elles commutent.

★ A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Écrire que $(AB)^p = A^p\,B^p$ sans vérifier que $AB = BA$.

★ Écrire $\boxed{\textbf{LA}}$ réduite de Gauss de A.

★ La matrice A est inversible car elle n'a pas de zéro sur sa diagonale.

★ La trace de ABC est égale à la trace de BAC (en s'appuyant sur le fait que la trace de UV est la trace de VU).

★ Si $A = (a_{i,j})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,A^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}^2$ alors que $\mathrm{Tr}\,A^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}a_{k,i}$.

★ Si A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ les coefficients de A^2 sont positifs (si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$...)

★ Écrire, pour une matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\dfrac{1}{A}$ à la place de A^{-1}.

★ A est un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B est un élément de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On suppose que $n \neq p$.

Écrire $AB = I_n$ donne A et B inversibles.