MATRICES

Exercice 1 **Matrice de passage**.

$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

$$\text{Pas}\,(\mathcal{B},\mathcal{B}'') = \text{Pas}\,(\mathcal{B},\mathcal{B}') \times \text{Pas}\,(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')$$

Pas $(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ est la matrice de Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$, c'est à dire Pas $(\mathcal{B},\mathcal{B}') = M(Id_E,\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

Pas $(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')$ est la matrice de Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}''$ et $\mathcal{B}'$, c'est à dire Pas $(\mathcal{B}',\mathcal{B}'') = M(Id_E,\mathcal{B}'',\mathcal{B}')$.

Or $M(Id_E,\mathcal{B}',\mathcal{B}) \times M(Id_E,\mathcal{B}'',\mathcal{B}') = M(Id_E \circ Id_E,\mathcal{B}'',\mathcal{B}) = M(Id_E,\mathcal{B}'',\mathcal{B})$.

Ainsi Pas $(\mathcal{B},\mathcal{B}') \times$ Pas $(\mathcal{B}',\mathcal{B}'')$ est la matrice de Id_E relativement aux bases $\mathcal{B}''$ et $\mathcal{B}$; c'est donc Pas $(\mathcal{B},\mathcal{B}'')$

Exercice Retrouver le résultat à la main en posant : Pas $(\mathcal{B},\mathcal{B}') = (a_{ij})$, Pas $(\mathcal{B}',\mathcal{B}'') = (b_{ij})$ et Pas $(\mathcal{B},\mathcal{B}'') = (c_{ij})$.

Exercice 2 **Caractérisation des matrices de rang 1**.

Q1. $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L = (\ell_1\,\ell_2\,\cdots\ell_n)$ une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Ecrire la matrice $A = CL$ et montrer, en raisonnant sur les colonnes, qu'elle est de rang 1.

Q2. Enoncer et démontrer une réciproque.

Q1 $A = CL = (a_{ij})$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A = \begin{pmatrix} c_1\,\ell_1 & c_1\,\ell_2 & \cdots & c_1\,\ell_n \\ c_2\,\ell_1 & c_2\,\ell_2 & \cdots & c_2\,\ell_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n\,\ell_1 & c_n\,\ell_2 & \cdots & c_n\,\ell_n \end{pmatrix}$. Ou $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} = c_i\,\ell_j$.

Pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de A est $C_j(A) = \begin{pmatrix} c_1\,\ell_j \\ c_2\,\ell_j \\ \vdots \\ c_n\,\ell_j \end{pmatrix} = \ell_j\,C$.

Le rang de A est la dimension de $F = \text{Vect}\Big(C_1(A), C_2(A), \ldots, C_n(A)\Big) = \text{Vect}\Big(\ell_1, C, \ell_2, C, \ldots, \ell_n, C\Big) \subset \text{Vect}(C)$.

Notons que Vect(C) est de dimension 1 car C n'est pas nul(le). Donc F est de dimension 0 ou 1.

Si F est de dimension $0 : \forall i \in [\![1,n]\!],\ \ell_i\,C = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Comme C n'est pas nul(le), $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \ell_i = 0$ et L est nul(le) ce qui n'est pas.

Ainsi F est de dimension 1 et A est de rang 1.

Q2 Réciproquement soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrons qu'il existe une matrice non nulle C de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice non nulle L de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$telles que : $A = CL$.

Notons encore, pour tout j dans $[\![1,n]\!]$, $C_j(A)$ la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

$\dim \text{Vect}\Big(C_1(A), C_2(A), \ldots, C_n(A)\Big) = 1$ donc il existe un élément non nul $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que

$\text{Vect}\Big(C_1(A), C_2(A), \ldots, C_n(A)\Big) = \text{Vect}(C)$. Alors $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \exists \ell_j \in \mathbb{K},\ C_j(A) = \ell_j\, C$.

Posons $L = (\ell_1\, \ell_2\, \ldots \ell_n)$. L est un élément non nul de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ car au moins une des colonne de A n'est pas nulle (dans le cas contraire A est nulle et A est alors de rang 0).

$\forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j(A) = \ell_j\, C$ donne $\forall j \in [\![1,n]\!],\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ a_{ij} = \ell_j\, c_i = c_i\, \ell_j$.

Par conséquent $A = CL$. Ce qui achève la preuve de la réciproque.

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement si il existe une matrice non nulle C de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice non nulle L de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telles que : $A = CL$.

Exercice Reprendre l'exercice avec un élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exercice 3 **Formule d'inversion de Pascal**. HEC 1998

Q1. n est un élément de $\mathbb{N}$. a) Vérifier rapidement que l'application φ de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P(X)) = P(X+1)$$

est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer φ^{-1}.

b) Déterminer la matrice M de φ dans la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Déterminer M^{-1}.

Q2. n est un élément de $\mathbb{N}$. On suppose que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ appartiennent à $\mathbb{R}^{n+1}$ et vérifient :

$$\forall j \in [\![0,n]\!],\ b_j = \sum_{k=0}^{j} \mathrm{C}_j^k\ a_k.$$

a) Trouver un lien entre les deux matrices lignes $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ et M.

b) En déduire, pour tout j dans $[\![0,n]\!]$, l'expression de a_j en fonction des nombres b_0, ..., b_j.

Q3. Retouver le nombre de surjections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments.

Q1 a) Si P est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$ il en est de même pour $P(X+1)$ donc φ est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2,\ \varphi(\lambda\, P + Q) = (\lambda\, P + Q)(X+1) = \lambda\, P(X+1) + Q(X+1) = \lambda\, \varphi(P) + \varphi(Q)$. φ est linéaire.

Soit P un élément de $\text{Ker}\, \varphi$. $P(X+1) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x+1) = 0$. Alors $\forall t \in \mathbb{R},\ P(t) = 0$ et P est nul.

$\text{Ker}\, \varphi = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension finie.

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X]}.$$

Posons $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \psi(P) = P(X-1)$. ψ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \psi(\varphi(P)) = \psi(P(X+1)) = P(X+1-1) = P$. Ainsi $\psi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.

En composant à droite par φ^{-1} on obtient : $\psi = \varphi^{-1}$.

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi^{-1}(P) = P(X-1)}.$$

b) $\forall j \in [\![0,n]\!],\ \varphi(X^j) = (X+1)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \mathrm{C}_j^i\ X^i$.

Ainsi $M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}$ avec $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \mathrm{C}_j^i & \text{si } i \leqslant j \end{cases}.$

c) $\forall j \in [\![0,n]\!],\ \varphi^{-1}(X^j) = (X-1)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \mathrm{C}_j^i\,(-1)^{j-i}\,X^i.$

Ainsi $M^{-1} = (s_{ij})_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}$ avec $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ s_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ \mathrm{C}_j^i\,(-1)^{j-i} & \text{si } i \leqslant j \end{cases}.$

Q2 a) Posons $L = (a_0\,a_1\,\dots\,a_n)$, $L' = (b_0\,b_1\,\dots\,b_n)$ et $L'' = LM$.

L'' est un élément de $\mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$. Mieux $L'' = (t_0\,t_1\,\dots\,t_n)$ avec $\forall j \in [\![0,n]\!],\ t_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i\,m_{ij} = \sum_{i=0}^{j} a_i\ \mathrm{C}_j^i = b_j$.

Ainsi $L'' = L'$ ou $L' = LM$. Alors

$$\boxed{(b_0\,b_1\,\dots\,b_n) = (a_0\,a_1\,\dots\,a_n)M}.$$

b) $(b_0\,b_1\,\dots\,b_n) = (a_0\,a_1\,\dots\,a_n)M$ donc $(a_0\,a_1\,\dots\,a_n) = (b_0\,b_1\,\dots\,b_n)\,M^{-1}$.

Alors $\forall j \in [\![0,n]\!],\ a_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_i\,s_{ij} = \sum_{i=0}^{j} b_i\ \mathrm{C}_j^i\,(-1)^{j-i}.$

$$\boxed{\forall j \in [\![0,n]\!],\ a_j = \sum_{i=0}^{j} \mathrm{C}_j^i\,(-1)^{j-i}\,b_i}.$$

Q3 Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ notons S_p^n le nombre de surjections d'un ensemble de p éléments dans un ensemble de n éléments. Par convention nous poserons $S_p^0 = 0$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des applications d'un ensemble E ayant p éléments dans un ensemble F qui a n éléments.

Pour tout k dans $[\![0,n]\!]$ on note $\mathcal{A}_k$ l'ensemble des applications de E dans F dont l'image a k éléments.

$\mathcal{A} = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{A}_k$ et cette réunion est disjointe. Alors $n^p = \operatorname{Card}\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}\mathcal{A}_k$.

Dès lors cherchons pour k dans $[\![0,n]\!]$, $\operatorname{Card}\mathcal{A}_k$.

Soit k un éléments de $[\![1,n]\!]$. Pour construire un élément f de $\mathcal{A}_k$:

- On choisit l'image C de f ; il y C_n^k possibilités car c'est une partie de k éléments de F et F a n éléments.
- On construit une surjection de E sur C. Il y a S_p^k possibilités car C a k éléments.

Ainsi $\operatorname{Card}\mathcal{A}_k = \mathrm{C}_n^k\ S_p^k$. Notons que ceci vaut encore pour $k = 0$ car $\operatorname{Card}\mathcal{A}_0 = 0$ et $S_p^0 = 0$.

Dès lors $n^p = \operatorname{Card}\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}\mathcal{A}_k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\ S_p^k$.

Nous avons ainsi prouvé que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\ S_p^k$. Notons encore que ceci vaut pour $n = 0$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k\ S_p^k$.

Fixons n dans $\mathbb{N}$. Nous avons $\forall j \in [\![0,n]\!],\ j^p = \sum_{k=0}^{j} \mathrm{C}_j^k\ S_p^k = \sum_{i=0}^{j} \mathrm{C}_j^i\ S_p^i$!

Alors la question 2 donne : $\forall j \in [\![0,n]\!],\ S_p^j = \sum_{i=0}^{j} \mathrm{C}_j^i\,(-1)^{j-i}\,i^p$.

En particulier $S_p^n=\sum\limits_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i\,(-1)^{n-i}\,i^p$. Finalement :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N},\ S_p^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\,(-1)^{n-k}\,k^p}$$

Remarque Si p est dans $\mathbb{N}^*$ et si n appartient à $[\![p+1,+\infty[\![$, S_p^n est nul et ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\,(-1)^{n-k}\,k^p=0$

Exercice 4 **Base duale. Transposée.**

Q1. $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_p)$ est une base de E espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{K}$. E^* est l'espace vectoriel des formes linéaires sur E. Pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, e_i^* est la forme linéaire sur E définie par :

$$\forall k\in[\![1,p]\!],\ e_i^*(e_k)=\begin{cases}1 & \text{si } k=i\\ 0 & \text{si } k\neq i\end{cases}$$

Q1. Montrer que $\mathcal{B}^*=(e_1^*,e_2^*,\cdots,e_p^*)$ est une base de E^*.

Q2. E' est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$ et $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ en est une base.

u est une application linéaire de E dans E' et $A=M(u,\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

Pour tout f dans E'^* on pose : $\varphi(f)=f\circ u$.

a) Montrer que φ est une application linéaire de E'^* dans E^* et que $M(\varphi,\mathcal{B}'^*,\mathcal{B}^*)={}^tA$.

b) Montrer que u et φ ont même rang

(construire, si possible, une base $(t_1,t_2,\dots,t_p)$ de E telle que $\big(u(t_1),u(t_2),,\dots,u(t_r)\big)$ soit une base de $\operatorname{Im}u$ et $(t_{r+1},t_{r+2},\dots,t_p)$ une base de $\operatorname{Ker}u$, compléter $\big(u(t_1),u(t_2),\dots,u(t_r)\big)$ ... et déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$).

Que dire alors pour A et ${}^tA$?

Q1 $E^*=\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ donc E^* a la même dimension p que E. Pour montrer que $\mathcal{B}^*=(e_1^*,e_2^*,\cdots,e_p^*)$ est une base de E^* il suffit donc de montrer que cette famille de cardinal p est libre. Aisé et sans gloire.

Montrons plutôt que $\mathcal{B}^*$ est une base en utilisant la définition.

Soit f un élément de E^*. Montrons par analyse/synthèse qu'il existe un unique élément $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)$ de $\mathbb{K}^p$ tel que $f=\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k\,e_k^*$.

• Analyse/Unicité. Supposons que $f=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\,e_k^*$ avec $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p)$ dans $\mathbb{K}^p$.

$\forall i\in[\![1,p]\!],\ f(e_i)=\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k\,e_k^*(e_i)=\lambda_i\,e^*(e_i)=\lambda_i$. Ainsi $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \lambda_i=f(e_i)$. D'où l'unicité.

• Synthèse/Existence. Récipoquement posons $\forall i\in[\![1,p]\!],\ \lambda_i=f(e_i)$ et montrons que $f=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\,e_k^*$.

f et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\,e_k^*$ étant deux formes linéaires sur E pour montrer qu'elles sont égales il suffit de montrer qu'elles coïncident sur les éléments de la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_p)$.

$\forall i\in[\![1,p]\!],\ \left(\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k\,e_k^*\right)(e_i)=\sum\limits_{k=1}^{p}\lambda_k\,e_k^*(e_i)=\lambda_i\,e_i^*(e_i)=\lambda_i=f(e_i)$. Ainsi $f=\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\,e_k^*=\sum_{k=1}^{p}f(e_k)\,e_k^*$. D'où l'existence.

$$\boxed{\mathcal{B}^* = (e_1^*, e_2^*, \cdots, e_p^*) \text{ est une base de } E^* \text{ et si } f \text{ est un élément de } E^*,\ f = \sum_{k=1}^{p} f(e_k)\, e_k^*}.$$

Q2 a) Soit f un élément de E'^*. u est une application linéaire de E dans E' et f une application linéaire de E' dans $\mathbb{K}$ donc $f \circ u$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Ainsi φ est une application de E'^* dans E^*.

$\forall (f,g) \in (E'^*)^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \varphi(\lambda\, f + g) = u \circ (\lambda\, f + g) = \lambda\, u \circ f + u \circ g = \lambda\, \varphi(f) + \varphi(g)$. φ est linéaire.

$$\boxed{\varphi \text{ est une application linéaire de } E'^* \text{ dans } E^*}$$

Posons $A = M(u, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = (a_{ij})$ et $C = M(\varphi, \mathcal{B}'^*, \mathcal{B}^*) = (c_{ij})$. $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Montrons que ${}^tC = A$.

Soit j un élément de $[\![1, n]\!]$ et i un élémnet de $[\![1, p]\!]$. $\varphi({e'_j}^*) = \sum\limits_{k=1}^{p} c_{kj}\, {e_k}^*$ donc $\varphi({e'_j}^*)(e_i) = \sum\limits_{k=1}^{p} c_{kj}\, e_k^*(e_i) = c_{ij}$.

De plus $\varphi({e'_j}^*)(e_i) = ({e'_j}^* \circ u)(e_i) = {e'_j}^*(u(e_i)) = {e'_j}^* \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\, e'_k \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ki}\, {e'_j}^*(e'_k) = a_{ji}\, {e'_j}^*(e'_j) = a_{ji}$.

Ainsi $\forall i \in [\![1, p]\!],\ \forall j \in [\![1, n]\!],\ c_{ij} = a_{ji}$. Donc $C = {}^tA$.

b) Notons r le rang de u. $r \leqslant \mathrm{Min}(\dim E, \dim E') = \mathrm{Min}(n, p)$.

Si $r = 0$, u est nulle et φ l'est également donc $\mathrm{rg}\, \varphi = 0 = \mathrm{rg}\, u$.

Supposons r non nul.

$\dim \mathrm{Ker}\, u = p - r$. Soit $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ une base d'un supplémentaire F de $\mathrm{Ker}\, u$ et $(t_{r+1}, t_{r+2}, \ldots, t_p)$ une base de $\mathrm{Ker}\, u$.

La supplémentarité de F et de $\mathrm{Ker}\, u$ permet de dire que $\mathcal{T} = (t_1, t_2, \ldots, t_p)$ est une base de E.

<u>Remarque</u> Il est entendu que si $\mathrm{Ker}\, u = \{0_E\}$, $\mathrm{Ker}\, u$ ne possède pas de base mais alors $r = p$ et ainsi $(t_1, t_2, \ldots, t_r) = (t_1, t_2, \ldots, t_p)$ est directement une base de E. En toute rigueur il faudrait envisager les cas particuliers $r = p$ et ... $r = n$.

Posons $\forall k \in [\![1, r]\!],\ t'_k = u(t_k)$. $({t'}_1, {t'}_2, \ldots, {t'}_r)$ est une famille de cardinal r de $\mathrm{Im}\, u$ et $\dim \mathrm{Im}\, u = r$.

Pour montrer que cette famille est une base de $\mathrm{Im}\, u$ il suffit de montrer qu'elle libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ un élément de $\mathbb{K}^r$ tel que : $\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k\, t'_k = 0_{E'}$.

$0_{E'} = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k\, t'_k = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k\, u(t_k) = u\left(\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k\, t_k \right)$. Alors $\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k\, t_k$ est un élément de $\mathrm{Ker}\, u$ et de F. Il est donc nul car $\mathrm{Ker}\, u$ et F sont supplémentaires. $\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k\, t_k = 0_E$ donne alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0_{\mathbb{K}}$ car la famille $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ est libre.

Ceci achève de montrer que $({t'}_1, {t'}_2, \ldots, {t'}_r)$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$. Cette famille est en particulier une famille libre de E' que l'on peut compléter, si nécessaire, en une base $\mathcal{T}' = ({t'}_1, {t'}_2, \ldots, {t'}_n)$ de E'.

Nous poserons $\mathcal{T}^* = (t_1^*, t_2^*, \cdots, t_p^*)$ et $\mathcal{T}'^* = ({t'_1}^*, {t'_2}^*, \ldots, {t'_n}^*)$. $\mathcal{T}^*$ est une base de E^* et $\mathcal{T}'^*$ est une base de E'^*.

Cherchons $\mathrm{Ker}\, \varphi$. Soit $f = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\, {t'_k}^*$ un élement de E'^*.

$f \in \mathrm{Ker}\, \varphi \iff f \circ u = 0_{E^*} \iff \forall i \in [\![1, p]\!],\ f(u(t_i)) = 0_{\mathbb{K}}$.

Or $\forall i \in [\![1,r]\!],\ u(t_i)=t'_i$ et $\forall i \in [\![r+1,p]\!],\ u(t_i)=0_{E'}$.

Alors $f \in \operatorname{Ker}\varphi \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,r]\!],\ f(t'_i)=0_{\mathbb{K}} \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,r]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, {t'_k}^*(t'_i)=0_{\mathbb{K}} \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1,r]\!],\ \lambda_i=0_{\mathbb{K}}$.

$f \in \operatorname{Ker}\varphi \Longleftrightarrow f \in \operatorname{Vect}({t'_{r+1}}^*, {t'_{r+2}}^*, \ldots, {t'_n}^*)$ (à un petit abus près si $r=n$).

$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Vect}({t'_{r+1}}^*, {t'_{r+2}}^*, \ldots, {t'_n}^*)$. Donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension $n-r$.

Alors $\operatorname{rg}\varphi = \dim E'^* - (n-r) = n-(n-r) = r = \operatorname{rg} u$. Ainsi

$$\boxed{\operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg} u.\ \text{Alors } \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} {}^t A.}\ .$$

Remarques 1. Si $r=n$ il est entendu que $\operatorname{Ker}\varphi$ est réduit au vecteur nul et est alors de dimension 0.

Donc $\operatorname{rg}\varphi = \dim E'^* - 0 = n = r = \operatorname{rg}\varphi$... et le résultat vaut encore.

2. φ est la transposée de u. On la note ${}^t u$. L'application de $\mathcal{L}(E,E')$ dans $\mathcal{L}(E'^*,E^*)$ qui à u associe ${}^t u$ est linéaire.

Exercice 5 **Pseudo-inverse d'une matrice** ESCP 98

n est un élément de $[\![2,+\infty[\![$ et $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit A une matrice de E de rang p. On appelle pseudo-inverse de A tout élément X de E tel que :

$$AXA=A,\ XAX=X \text{ et } AX=XA$$

Q1. Ici $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Calculer A^2. A admet-elle un pseudo-inverse ?

Q2. Même chose avec $A'=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$.

Q3. On suppose A inversible. Déterminer l'ensemble des pseudo-inverses de A.

Q4. X et X' sont deux pseudo-inverses de A. En partant de $AXAX'$, montrer que $AX'=XA$, puis que $X=X'$. Conclusion ?

Q5. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$.

a) On suppose que X est un pseudo-inverse de A. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ de matrice X dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$.

Montrer que $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$ et que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

b) Réciproquement on suppose que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$. Montrer que A possède un pseudo-inverse.

Q1 $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=A$. Alors $AAA=A$, $AAA=A$ et $AA=AA$ ... ha ! ha !

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} \text{ admet un pseudo inverse : } A}\ .$$

Q2 $A'^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. Supposons que X soit un pseudo-inverse de A'.

$XA'=A'X$ donc $A'=A'XA'=A'^2X=0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}X=0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}$!

$$\boxed{A'=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} \text{ n'admet pas de pseudo inverse}}\ .$$

Q3 Soit X un pseudo-inverse de A. $AXA = A$ donne $AXAA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ donc $AX = I_n$ et ainsi $X = A^{-1}$.

Ainsi si A possède un pseudo-inverse X, $X = A^{-1}$. Montons alors que A^{-1} est un pseudo-inverse de A.

$AA^{-1}A = A$, $A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$ et $AA^{-1} = A^{-1}A$. A^{-1} est donc un pseudo-inverse de A.

$\boxed{\text{Si } A \text{ est inversible, } A \text{ possède un pseudo-inverse et un seul} : A^{-1}}$.

Q4 Soient X et X' deux pseudo-inverses de A.

$AXAX' = AX'$ car $AXA = A$. $AX = XA$ et $AX' = X'A$ donnent $AXAX' = AXX'A = XAX'A = XA$ (car $AX'A = A$).

Finalement $AX' = AXAX' = XA$. Alors $X = XAX = AX'X = X'AX = X'XA$ car $AX' = X'A$ et $AX = XA$.

Comme $XA = AX'$, $X = X'XA = X'AX' = X'$.

$\boxed{\text{Un élément de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ possède au plus un pseudo-inverse}}$.

Q5 a) $AXA = A$, $XAX = X$ et $AX = XA$ donc $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g = g \circ f$.

Notons alors que $f = f \circ g \circ f = f^2 \circ g = g \circ f^2$ car $f \circ g = g \circ f$. De même $g = g^2 \circ f = f \circ g^2$.

• $\operatorname{Im} g = g(\mathbb{K}^n) = f(g^2(\mathbb{K}^n)) \subset f(\mathbb{K}^n) = \operatorname{Im} f$ car $g^2(\mathbb{K}^n) \subset \mathbb{K}^n$. Par “symétrie” $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$ et ainsi $\boxed{\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} f}$.

• Soit x un élément de $\operatorname{Ker} g$. $f(x) = f^2(g(x)) = f^2(0_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^n}$; $x \in \operatorname{Ker} f$.

Donc $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker} f$. Par “symétrie” $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} g$ et $\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} g}$.

• Soit x un élément de $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f$. $f(x) = 0_{\mathbb{K}^n}$ et il existe z dans $\mathbb{K}^n$ tel que $x = f(z)$.

$x = f(z) = g(f^2(z)) = g(f(x)) = g(0_{\mathbb{K}^n}) = 0_{\mathbb{K}^n}$. Ainsi $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. De plus $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{K}^n$. Finalement :

$$\boxed{\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f}$$

b) Réciproquement supposons que $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$ et montrons que A possède un pseudo-inverse. Pour se faire il suffit de prouver qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbb{K}^n$ tel que : $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g = g \circ f$.

Une petite analyse s'impose. Supposons qu'un tel endomorphisme g existe. Alors $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} f$ donc g est nul sur $\operatorname{Ker} f$. Ne reste plus qu'à définir g sur $\operatorname{Im} f$.

Soit x un élément de $\operatorname{Im} f$. Il existe z dans E tel que $x = f(z)$. $x = f(z) = g(f^2(z)) = g(f(x))$.

Par conséquent $\forall x \in \operatorname{Im} f, x = g(f(x)) = f(g(x))$. Tout est alors clair non ? g est vaguement sur $\operatorname{Im} f$ la réciproque de la restriction de f à $\operatorname{Im} f$. Construisons g.

Considérons l'application h de $\operatorname{Im} f$ dans $\operatorname{Im} f$ définie par : $\forall x \in \operatorname{Im} f,\ h(x) = f(x)$. f étant linéaire, h l'est également. Montrons que h est un automorphisme de $\operatorname{Im} f$. Il suffit de prouver que h est injective car $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie. Soit x un élément de $\operatorname{Ker} h$. x appartient à $\operatorname{Im} f$ et $f(x) = h(x) = 0_{\mathbb{K}^n}$ donc x appartient à $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ étant supplémentaires $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$. Ainsi $x = 0_{\mathbb{K}^n}$.

$\operatorname{Ker} h = \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ et h est un endomorphisme injectif de $\operatorname{Im} f$ donc h est un automorphisme de $\operatorname{Im} f$.

Exercice Montrer que h est surjectif (on pourra utiliser $\mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$).

Soit p la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. $\forall x \in \mathbb{K}^n,\ p(x) \in \operatorname{Im} f$.

Posons : $\boxed{\forall x \in \mathbb{K}^n,\ g(x) = h^{-1}(p(x))}$. g est une application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ (h^{-1} et p sont linéaires).

Montrons que $f = f \circ g \circ f$, $g = g \circ f \circ g$ et $f \circ g = g \circ f$.

Soit x un élément de $\mathbb{K}^n$. $g(x) = h^{-1}(p(x))$ appartient à $\operatorname{Im} f$ donc $f(g(x)) = h(g(x)) = h(h^{-1}(p(x))) = p(x)$. $f(g(x)) = p(x)$.

Calculons alors $g(f(x))$. $f(x) \in \operatorname{Im} f$ donc $p(f(x)) = f(x)$ et $g(f(x)) = h^{-1}(p(f(x))) = h^{-1}(f(x))$.

Comme p est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$, $x = p(x) + x''$ avec x'' élément de $\operatorname{Ker} f$.

Ainsi $f(x) = f(p(x)) + f(x'') = f(p(x))$. Donc $g(f(x)) = h^{-1}(f(x)) = h^{-1}(f(p(x)))$.

$p(x)$ est dans $\operatorname{Im} f$ donc $f(p(x)) = h(p(x))$ et $g(f(x)) = h^{-1}(f(p(x))) = h^{-1}(h(p(x))) = p(x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{K}^n,\ f(g(x)) = p(x) = g(f(x))$. $f \circ g = p = g \circ f$.

Nous avons également montré dans ce qui précède que $f(x) = f(p(x))$ pour x quelconque donc : $f = f \circ p$.

Alors $f \circ g \circ f = f \circ (g \circ f) = f \circ p = f$.

$g \circ f \circ g = (g \circ f) \circ g = p \circ g = g$ car g prend ses valeurs dans $\operatorname{Im} f$ qui est la base de p.

Ceci achève de montrer que $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g = g \circ f$.

La matrice X de g dans $\mathcal{B}$ est un pseudo-inverse de A. Donc A possède un pseudo-inverse.

$$\boxed{A \text{ possède un pseudo-inverse si et seulement si } \mathbb{K}^n = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f}.$$

Exercice 6 **Tout matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins un polynôme annulateur non nul.**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est une famille de cardinal $n^2 + 1$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est un espace vectoriel de dimension n^2. Cette famille est donc nécessairement liée.

Ainsi on peut trouver $n^2 + 1$ éléments λ_0, λ_1, ..., λ_{n^2} de $\mathbb{K}$, non tous nuls et tels que :

$$\lambda_0\, I_n + \lambda_1\, A + \lambda_2\, A^2 + \cdots + \lambda_{n^2}\, A^{n^2} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Posons $P = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k\, X^k$. P est un élément non nul de $\mathbb{K}[X]$ (l'un au moins de ses coefficients n'est pas nul) tel que $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exercice 7 **Polynôme minimal**

A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si P est un polynôme annulateur non nul de A, de degré minimal, l'ensemble des polynômes annulateurs de A est l'ensemble des multiples de P.

2. A possède un polynôme annulateur unitaire et un seul tel que l'ensemble des polynômes annulateurs de A soit l'ensemble des multiples de ce polynôme.

---

1. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des polynomes annulateurs de A et $\mathcal{S}'$ l'ensemble des multiples de P. Montrons que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

Soit T un élément de $\mathcal{S}'$. Il exite un élément Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $T = QP$.

$T(A) = Q(A)\, P(A) = Q(A)\, 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors T appartient à $\mathcal{S}$. Ainsi $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$.

Réciproquement soit T un élément de $\mathcal{S}$. Notons Q et R le reste dans la division de T par P.

$T = QP + R$ et $\deg R < \deg P$.

$T(A) = Q(A)\, P(A) + R(A)$ et $T(A) = P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Alors $R(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Si R n'est pas nul, R est un polynôme annulateur non nul de A dont le degré est strictement inférieur à celui de P et P est un polynôme annulateur non nul de A, de degré minimal. Cela est contradictoire.

Par conséquent R est nul et T est un multiple de P donc appartient à $\mathcal{S}'$. Ainsi $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$.

Ceci achève de prouver que $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$.

2. Notons encore $\mathcal{S}^*$ l'ensemble des polynômes annulateurs non nuls de A. Nous savons que $\mathcal{S}^*$ n'est pas vide. Alors $\{\deg T; T \in \mathcal{S}^*\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$; elle possède un plus petit élément v. Il existe un élément V de $\mathcal{S}^*$ tel que $\deg V = v$.

V est un polynôme annulateur non nul de A de degré minimal donc $\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de V.

Soit a le coefficient du terme de plus haut degré de V. $W = \dfrac{1}{a} V$ est un polynôme annulateur non nul et unitaire de A, de degré minimal.

Alors, d'après ce qui précède, W est un polynôme unitaire et $\mathcal{S}$ est l'ensemble des multiples de W.

Soit $\widehat{W}$ un second polynôme unitaire tel que $\mathcal{S}$ soit l'ensemble des multiples de $\widehat{W}$.

W est un multiple de $\widehat{W}$ et $\widehat{W}$ est un multiple de W. Alors il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $\widehat{W} = \lambda W$.

$\widehat{W}$ et W étant deux polynômes unitaires on a nécessairement $\lambda = 1$ et ainsi $\widehat{W}$ et W sont égaux.

Exercice 8 **Rang d'une matrice**

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r non nul. Montrer qu'à deux petits abus près :

$$\exists (P,Q) \in Gl_p(\mathbb{K}) \times Gl_n(\mathbb{K}),\ Q^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

I_r est la matrice indentité de $\mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $O_{r,p-r}$, $O_{n-r,r}$ et $O_{n-r,p-r}$ sont les matrices nulles de $\mathcal{M}_{r,p-r}(\mathbb{K})$, $\mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n-r,p-r}(\mathbb{K})$.

Considérons un espace vectoriel E (resp. E') de dimension p (resp. n) et une base $\mathcal{B}$ de E (resp. une base $\mathcal{B}'$ de E').

Soit f l'application linéaire de E dans E' qui a pour matrice A relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

Supposons que A soit de rang r. f est également de rang r. Notons que $r = \operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{Min}(\dim E, \dim E') = \operatorname{Min}(p,n)$.

Soit F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$. F est de dimension r ($\dim F = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{rg} f = r$).

Soit $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$ une base de F et $(t_{r+1}, t_{r+2}, \ldots, t_p)$ une base de $\operatorname{Ker} f$.

Comme F et $\operatorname{Ker} f$ sont supplémentaires, $\mathcal{T} = (t_1, t_2, \ldots, t_p)$ est une base de E.

Remarque Si $r = p$, $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ donc $\operatorname{Ker} f$ ne possède pas de base mais $(t_1, t_2, \ldots, t_r) = (t_1, t_2, \ldots, t_p)$ est encore une base de E.

Posons $\forall k \in [\![1, r]\!],\ t'_k = f(t_k)$. $(t'_1, \ldots, t'_r)$ est une famille d'éléments de $\operatorname{Im} f$. Montrons que c'est une base de $\operatorname{Im} f$.

Il suffit de montrer que cette famille est libre car son cardinal r est la dimension de $\operatorname{Im} f$ ($\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = r$).

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ un élément de $\mathbb{K}^r$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, t'_k = 0_{E'}$.

$0_{E'} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, t'_k = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, f(t_k) = f\left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, t_k\right)$. Alors $\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k\, t_k$ est un élément de $\operatorname{Ker} f$ et de F qui sont supplémentaires.

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} \lambda_k\, t_k = 0_E$. Comme la famille $(t_1, \ldots, t_r)$ est libre : $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$.

Ceci achève de montrer que $(t'_1, \dots, t'_r)$ est une base de $\operatorname{Im} f$. C'est donc une famille libre de E' que l'on peut compléter en une base $\mathcal{T}' = (t'_1, \dots, t'_n)$ de E'.

Remarque Si $r = n$, $(t'_1, t'_2, \dots, t'_r) = (t'_1, t'_2, \dots, t'_n)$ est directement une base de E'.

$\mathcal{T} = (t_1, t_2, \dots, t_p)$ est une base de E et $\mathcal{T}' = (t'_1, \dots, t'_n)$ est une base de E'.

$\forall k \in [\![1, r]\!],\ f(t_k) = t'_k$ et $\forall k \in [\![r+1, p]\!],\ f(t_k) = 0_{E'}$.

Alors la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ est $M(f, \mathcal{T}, \mathcal{T}') = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{T}$ et Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{T}'$.

P est une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et Q est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus $M(f, \mathcal{T}, \mathcal{T}') = Q^{-1}\, M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}')\, P$. Par conséquent : $Q^{-1}\, A\, P = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$.

Exercice Envisager une réciproque. Utiliser ces résultats pour montrer que A et ${}^tA$ ont même rang.

Exercice 9 **Les matrices au service d'un grand classique d'analyse** ESSEC 1992

n est un élément de $[\![2, +\infty[\![$. f est une application de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

On pose $M_0 = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_n = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$. On se propose de montrer que, pour tout élément k de $[\![1, n-1]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée.

h_1, h_2, ..., h_{n-1} sont $n-1$ réels non nuls et deux à deux distincts.

Q1. Montrer que $H_{n-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{h_1}{1!} & \dfrac{h_1^2}{2!} & \cdots & \dfrac{h_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ \dfrac{h_2}{1!} & \dfrac{h_2^2}{2!} & \cdots & \dfrac{h_2^{n-1}}{(n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{h_{n-1}}{1!} & \dfrac{h_{n-1}^2}{2!} & \cdots & \dfrac{h_{n-1}^{n-1}}{(n-1)!} \end{pmatrix}$ est une matrice inversible de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Q2. Pour tout réel x on pose : $\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{pmatrix} = H_{n-1} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{n-1}(x) \end{pmatrix}$.

a) Soit x un réel et k un élément de $[\![1, n-1]\!]$. En majorant $|f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)|$ avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, établir que :

$$|F_k(x)| \leqslant 2M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!}\, M_n$$

b) En déduire que, pour tout élément k de $[\![1, n-1]\!]$, $f^{(k)}$ est bornée.

Pour montrer que H_{n-1} est inversible, montrons que $\forall U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}),\ H_{n-1}U = 0_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow U = 0_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})}$.

Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ tel que : $H_{n-1}U = 0_{\mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_i^k}{k!}\, u_k = 0$. h_1, h_2, ..., h_{n-1} étant non nul on a encore : $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_i^{k-1}}{k!}\, u_k = 0$.

Considérons alors le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{k!}\, X^{k-1}$.

D'après ce qui précède $\forall i \in [\![1, n-1]\!],\ P(h_i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_k}{k!}\, h_i^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_i^{k-1}}{k!}\, u_k = 0$.

P est alors un polynôme de degré au plus $n-2$ admettant au moins $n-1$ racines distinctes $h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_{n-1}$.

P est donc le polynôme nul. Ses coefficients sont nuls. $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \dfrac{u_k}{k!} = 0$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ u_k = 0$.

Finalement la matrice U est nulle ce qui achève de prouver que

$$\boxed{H_{n-1} \text{ est inversible}}.$$

Q2 Notons que $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{h_k^i}{i!}\, f^{(i)}(x)$.

a) Soient x un élément de $\mathbb{R}$ et k un élément de $[\![1, n-1]\!]$.

f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre $n-1$ on obtient :

$\left| f(x+h_k) - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x+h_k-x)^i}{i!}\, f^{(i)}(x) \right| \leqslant \dfrac{|x+h_k-x|^n}{n!} \displaystyle\operatorname*{Max}_{u\in[x,x+h_k]} |f^{(n)}(u)|$. Ainsi

$\left| f(x+h_k) - \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \frac{(h_k)^i}{i!}\, f^{(i)}(x) \right| \leqslant \dfrac{|h_k|^n}{n!} \displaystyle\operatorname*{Max}_{u\in[x,x+h_k]} |f^{(n)}(u)| \leqslant \dfrac{|h_k|^n}{n!}\, M_n$.

Alors $\left| f(x+h_k) - f(x) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(h_k)^i}{i!}\, f^{(i)}(x) \right| \leqslant \dfrac{|h_k|^n}{n!}\, M_n$ ou $|f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)| \leqslant \dfrac{|h_k|^n}{n!}\, M_n$.

$|F_k(x)| = \Big| f(x+h_k) - f(x) - \big(f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)\big) \Big| \leqslant |f(x+h_k)| + |f(x)| + |f(x+h_k) - f(x) - F_k(x)|$.

$|F_k(x)| \leqslant M_0 + M_0 + \dfrac{|h_k|^n}{n!}\, M_n = 2\, M_0 + \dfrac{|h_k|^n}{n!}\, M_n$.

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ |F_k(x)| \leqslant 2\, M_0 + \frac{|h_k|^n}{n!}\, M_n.}$$

b) H_{n-1} est inversible. Posons $H_{n-1}^{-1} = (t_{ij})$.

Pour tout réel x on a : $\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{pmatrix} = H_{n-1} \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{n-1}(x) \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \\ \vdots \\ f^{n-1}(x) \end{pmatrix} = H_{n-1}^{-1} \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \\ \vdots \\ F_{n-1}(x) \end{pmatrix}$.

Ainsi $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} t_{ki}\, F_i(x)$. Alors $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(k)}(x)| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |t_{ki}|\, |F_i(x)|$.

Donc $\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f^{(k)}(x)| \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |t_{ki}| \left(2\, M_0 + \frac{|h_i|^n}{n!}\, M_n \right)$. Finalement :

$$\boxed{\text{pour tout élément } k \text{ de } [\![1, n-1]\!],\ f^{(k)} \text{ est bornée}}.$$

Exercice 10 **Matrice à diagonale strictement dominante**.

$A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$$

Montrer que A est inversible (prendre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que AX=0 et considérer : $|x_{i_0}| = \text{Max}(|x_1|, |x_2| \cdots, |x_n|)$).

Pour montrer que A est inversible, montrons que $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Il existe un élément i_0 de $[\![1, n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \text{Max}(|x_1|, |x_2| \cdots, |x_n|)$.

$AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = 0$. En particulier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i_0k}\, x_k = 0$.

Alors $|a_{i_0i_0}|\, |x_{i_0}| = |a_{i_0i_0}\, x_{i_0}| = \left| - \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} a_{i_0k}\, x_k \right| = \left| \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} a_{i_0k}\, x_k \right| \leqslant \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |a_{i_0k}|\, |x_k| \leqslant |x_{i_0}| \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |a_{i_0k}|$.

Ainsi $\left(|a_{i_0i_0}| - \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |a_{i_0k}| \right) |x_{i_0}| \leqslant 0$. Comme par hypothèse $|a_{i_0i_0}| - \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |a_{ik}| > 0$, $|x_{i_0}| \leqslant 0$ donc $|x_{i_0}| = 0$.

Alors $\text{Max}(|x_1|, |x_2| \cdots, |x_n|) = 0$. Par conséquent $\forall k \in [\![1, n]\!],\ |x_k| = 0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0$.

Finalement la matrice X est nulle ce qui achève de prouver que A est inversible.

Exercice 11 **Ensemble des matrices qui commutent avec une matrice diagonale**.

D est une matrices diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont les éléments de la diagonale sont deux à deux distincts.

Q1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec D est le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q2. Montrer que $(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1})$ est une base de $\mathcal{S}$.

Q1 $D = (d_{ij})$. $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow d_{ij} = 0$ et $d_{ii} \neq d_{jj}$. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$A \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow AD = DA \Longleftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\, d_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} d_{ik}\, a_{kj} \Longleftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{ij}\, d_{jj} = d_{ii}\, a_{ij}$.

$A \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ a_{ij}\, (d_{jj} - d_{ii}) = 0$.

Notons que si i et j sont deux éléments de $[\![1, n]\!]$:

$a_{ij}\, (d_{jj} - d_{ii}) = 0 \Longleftrightarrow 0 = 0$ si $i = j$ et $a_{ij}\, (d_{jj} - d_{ii}) = 0 \Longleftrightarrow a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Alors $A \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0 \Longleftrightarrow A$ et diagonale.

$\boxed{\text{L'ensemble des matrices qui commutent avec } D \text{ est l'ensemble des matrices diagonales de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Q2 Le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}$ constitué des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est clairement de dimension n.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, D^k est un élément de $\mathcal{S}$ ($D^k D = D^{k+1} = DD^k$).

$(I_n, D, \ldots, D^{n-1})$ est donc une famille d'éléments de $\mathcal{S}$ et son cardinal n est la dimension de $\mathcal{S}$. Ainsi suffit-il de montrer que cette famille est libre pour pouvoir affirmer que c'est une base de $\mathcal{S}$.

Pour la suite posons $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$; mieux écrivons $D = \text{Diag}\,(d_1, d_2, \ldots, d_n)$.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ un élément de $\mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, D^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ D^k = \text{Diag}\,(d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k)$.

Donc $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, D^k = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \,\text{Diag}\,(d_1^k, d_2^k, \ldots, d_n^k) = \text{Diag}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, d_1^k, \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, d_2^k, \ldots, \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, d_n^k\right)$.

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, d_i^k = 0$. Posons $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \lambda_k\, X^k$; $\forall i \in [\![1, n]\!], P(d_i) = 0$.

Ainsi P est un polynôme de degré au plus $n-1$ admettant au moins n racines distinctes. P est le polynôme nul. Ses coefficients sont nuls. $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_k = 0$.

Ceci achève de montrer que

$$\boxed{(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1}) \text{ est une base de } \mathcal{S}}.$$

Exercice Montrer à la main que $(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1})$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}$ (on pourra utiliser l'interpolation de Lagrange).

Exercice 12 **Pratique du produit matriciel**.

$(E_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient p et q deux éléments de $[\![1, n]\!]$.

a) Calculer AE_{pq} et $E_{pq}A$.

b) Soient r et s deux éléments de $[\![1, n]\!]$. Calculer $E_{pq}\, E_{rs}$ (on peut utiliser a)).

Q2. Application 1 $\mathcal{C}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que $\mathcal{C}$ contient la droite vectorielle engendrée par I_n.

b) Utiliser Q1 a) pour montrer l'inclusion inverse.

Q3. Application 2 $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}$ est l'ensemble des formes linéaires f sur E vérifiant

$$\forall (A, B) \in E^2,\ f(AB) = f(BA).$$

a) f_0 est l'application qui à tout élément de E associe sa trace. Montrer que $\mathcal{S}$ contient la droite vectorielle engendrée par f_0.

b) Utiliser Q1 b) pour montrer l'inclusion inverse.

Dans cet exercice si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si i et j sont deux éléments de $[\![1, n]\!]$, nous noterons $L_i(M)$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de M et $C_j(M)$ sa $j^{\text{ème}}$ colonne.

Q1 a) Posons $E_{pq} = (e_{ij})$, $C = AE_{pq} = (c_{ij})$ et $D = E_{pq}A = (d_{ij})$.

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } (i, j) \neq (p, q) \\ 1 & \text{si } (i, j) = (p, q) \end{cases}.$$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, e_{kj} = a_{ip}\, e_{pj}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{ij} = \begin{cases} a_{ip} & \text{si } j = q \\ 0 & \text{si } j \neq q \end{cases}$. Ainsi $\forall j \in [\![1,n]\!],\ C_j(AE_{pq}) = C_j(C) = \begin{cases} C_p(A) & \text{si } j = q \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} & \text{si } j \neq q \end{cases}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ d_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_{ik}\, a_{kj} = e_{iq}\, a_{qj}$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ d_{ij} = \begin{cases} a_{qj} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{si } i \neq p \end{cases}$. Ainsi $\forall i \in [\![1,n]\!],\ L_i(E_{pq}A) = L_i(D) = \begin{cases} L_q(A) & \text{si } i = p \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} & \text{si } i \neq p \end{cases}$.

AE_{pq} est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf la $q^{\text{ème}}$ qui est la $p^{\text{ème}}$ colonne de A.

$E_{pq}A$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont toutes les lignes sont nulles sauf la $p^{\text{ème}}$ qui est la $q^{\text{ème}}$ ligne de A.

b) D'après ce qui précède $\forall i \in [\![1,n]\!],\ L_i(E_{pq}E_{rs}) = \begin{cases} L_q(E_{rs}) & \text{si } i = p \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} & \text{si } i \neq p \end{cases}$

• Supposons $r \neq q$. Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$.

Si i est distinct de p, $L_i(E_{pq}E_{rs})$ est nulle. Si $i = p$, $L_i(E_{pq}E_{rs}) = L_q(E_{rs})$ est encore nulle car q est distinct de r.

Finalement, pour $q \neq r$, la matrice $E_{pq}E_{rs}$ est la matrice nulle.

• Supposons $r = q$. Soit i un élément de $[\![1,n]\!]$.

Supposons $i = p$, $L_p(E_{pq}E_{rs}) = L_i(E_{pq}E_{rs}) = L_q(E_{rs}) = L_r(E_{rs})$. Ainsi tous les éléments de $L_p(E_{pq}E_{rs})$ sont nuls sauf celui de la $s^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1. Alors $L_p(E_{pq}E_{rs}) = L_p(E_{ps})$.

Si i est distinct de p, $L_i(E_{pq}E_{rs})$ est nulle comme $L_i(E_{ps}$.

Finalement $\forall i \in [\![1,n]\!],\ L_i(E_{pq}E_{rs}) = L_i(E_{ps})$. Donc $E_{pq}E_{rs} = E_{ps}$.

$$\boxed{E_{pq}E_{rs} = \begin{cases} E_{ps} & \text{si } q = r \\ 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})} & \text{si } q \neq r \end{cases}}.$$

Q2 a) $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), (\lambda\, I_n)M = M(\lambda\, I_n)$ Donc $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\, I_n \in \mathcal{C}$ ou $\mathrm{Vect}(I_n) \subset \mathcal{C}$.

b) Réciproquement soit A un élément de $\mathcal{C}$. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA$. En particulier $\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2,\ AE_{pq} = E_{pq}A$.

Soient p et q deux éléments <u>distincts</u> de $[\![1,n]\!]$.

Posons $A = (a_{ij})$, $C = AE_{pq} = (c_{ij})$ et $D = E_{pq}A = (d_{ij})$. D'après Q1 a) :

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{ij} = \begin{cases} a_{ip} & \text{si } j = q \\ 0 & \text{si } j \neq q \end{cases}$. $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ d_{ij} = \begin{cases} a_{qj} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{si } i \neq p \end{cases}$.

En particulier $c_{pq} = a_{pp}$, $c_{pp} = 0$, $d_{pp} = a_{qp}$ et $d_{pq} = a_{qq}$.

Or $C = AE_{pq} = E_{pq}A = D$ donc $a_{pp} = c_{pq} = d_{pq} = a_{qq}$ et $a_{qp} = d_{pp} = c_{pp} = 0$.

Ainsi $\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2,\ p \neq q \Rightarrow a_{pp} = a_{qq}$ et $a_{qp} = 0$. Alors $A = a_{11}\, I_n$. A appartient à $\mathrm{Vect}(I_n)$. Finalement

$$\boxed{\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\} = \mathrm{Vect}(I_n)}.$$

Q3 a) Il est de notoriété publique que $f_0 = \mathrm{tr}$ est une forme linéaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\forall (A,B) \in E^2,\ f_0(AB) = \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = f_0(BA)$. Ainsi f_0 est un élément de $\mathcal{S}$.

Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. $f=\lambda\, f_0$ est encore une forme linéaire sur E et $\forall (A,B)\in E^2,\ f(AB)=\lambda\, f_0(AB)=\lambda\, f_0(BA)=f(BA)$ donc $f=\lambda\, f_0$ appartient à $\mathcal{S}$. Par conséquent :

$$\boxed{\mathcal{S} \text{ contient } \mathrm{Vect}(f_0)=\mathrm{Vect}(\mathrm{tr})}.$$

b) Soit f un élément de $\mathcal{S}$. Montrons qu'il existe un élément λ de $\mathbb{K}$ tel que $f=\lambda\, f_0$.

$\forall (A,B)\in E^2,\ f(AB)=f(BA)$. En particulier $\forall (p,q)\in [\![1,n]\!]^2,\ f(E_{pq}E_{qq})=f(E_{qq}E_{pq})$

Alors $\forall (p,q)\in [\![1,n]\!]^2,\ f(E_{pq})=f(E_{qq}E_{pq})$ (car $E_{pq}E_{qq}=E_{pq}$ d'après Q1 b)).

Ce qui donne $\forall (p,q)\in [\![1,n]\!]^2,\ p\neq q \Rightarrow f(E_{pq})=f(E_{qq}E_{pq})=f(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})})=0$ (toujours d'après Q1 b)).

On a encore $\forall (p,q)\in [\![1,n]\!]^2,\ f(E_{pq}E_{qp})=f(E_{qp}E_{pq})$.

Ceci donne $\forall (p,q)\in [\![1,n]\!]^2,\ f(E_{pp})=f(E_{qq})$ (car $E_{pq}E_{qp}=E_{pp}$ et $E_{qp}E_{pq}=E_{qq}$ d'après Q1 b)).

La suite $\Big(f(E_{pp})_{p\in[\![1,n]\!]}$ est constante. Soit λ cette constante.

$\forall p\in [\![1,n]\!],\ f(E_{pp}=\lambda=\lambda\times 1=\lambda\ \mathrm{tr}(E_{pp})=(\lambda\, f_0)(E_{pp})$.

Soient p et q deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. $f(E_{pq}=0=\lambda\times 0=\lambda\ \mathrm{tr}(E_{pq})=(\lambda\, f_0)(E_{pq})$.

Finalement $\forall (p,q)\in [\![1,n]\!]^2,\ f(E_{pq}=(\lambda\, f_0)(E_{pq})$.

Les formes linéaires f et $\lambda\, f_0$ coïncident sur la base canonique de $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ elles sont donc égales. f appartient à $\mathrm{Vect}(f_0)$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{S}\subset \mathrm{Vect}(I_n)$.

$$\boxed{\{f\in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\mathbb{K})\ |\ \forall (A,B)\in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ f(AB)=f(BA)\}=\mathrm{Vect}(\mathrm{tr})}.$$

Exercice Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et un seul tel que $\forall M\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f(M)=\mathrm{tr}(AM)$.

Exercice 13 **Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice**.

Dans cet exercice si M est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si i est un élément de $[\![1,n]\!]$, nous noterons $L_i(M)$ la $i^{\text{ème}}$ ligne de M.

$(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q1. Soit $A=(a_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient p et q deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Calculer $E_{pq}A$.

Q2. i et j sont deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$ et λ est un éléments de $\mathbb{K}$. On note φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui même qui a une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe la matrice déduite de A par l'opération $L_i\leftarrow L_i+\lambda\, L_j$.

a) Montrer que $\varphi(I_n)=I_n+\lambda\, E_{ij}$.

b) Montrer que $\forall A\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \varphi(A)=\varphi(I_n)\, A$.

c) Montrer que $I_n+\lambda\, E_{ij}$ est inversible et d'inverse $I_n-\lambda\, E_{ij}$.

Q1 Posons $E_{pq}=(e_{ij})$ et $C=E_{pq}A=(c_{ij})$. $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ c_{ij}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_{ik}\, a_{kj}=e_{iq}\, a_{qj}$.

$\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ c_{ij}=\begin{cases} a_{qj} & \text{si } i=p \\ 0 & \text{si } i\neq p\end{cases}$. Ainsi $\forall i\in [\![1,n]\!],\ L_i(E_{pq}A)=L_i(C)=\begin{cases} L_q(A) & \text{si } i=p \\ 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} & \text{si } i\neq p\end{cases}$.

$$\boxed{E_{pq}A \text{ est la matrice de } \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ dont toutes les lignes sont nulles sauf la } p^{\text{ème}} \text{ qui est la } q^{\text{ème}} \text{ ligne de } A.}$$

$\boxed{\textbf{Q2}}$ a) Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. $L_k\big(I_n+\lambda\,E_{ij}\big)=L_k(I_n)+\lambda\,L_k(E_{ij})$.

Si k est différent de i, $L_k(E_{ij})$ est nulle et si k vaut i, $L_k(E_{ij})=L_i(E_{ij})=L_j(I_n)$.

Ainsi $L_k\big(I_n+\lambda\,E_{ij}\big)=\begin{cases} L_i(I_n)+\lambda\,L_j(I_n) & \text{si } k=i \\ L_k(I_n) & \text{si } k\neq i\end{cases}$. Ceci montre donc que $I_n+\lambda\,E_{ij}=\varphi(I_n)$.

b) Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $\varphi(I_n)\,A=(I_n+\lambda\,E_{ij})A=A+\lambda\,E_{ij}A$.

Soit k un élément de $[\![1,n]\!]$. $L_k\Big(\varphi(I_n)\,A\Big)=L_k\Big(A+\lambda\,E_{ij}A\Big)=L_k(A)+\lambda\,L_k(E_{ij}A)$.

D'après Q1, $L_k(E_{ij}A)$ est nulle si $k\neq i$ et coïncide avec la $j^{\text{ème}}$ ligne de A si $k=i$.

Alors $L_k\Big(\varphi(I_n)\,A\Big)=L_k\Big(A+\lambda\,E_{ij}A\Big)=\begin{cases} L_i(A)+\lambda\,L_j(A) & \text{si } k=i \\ L_k(A) & \text{si } k\neq i\end{cases}$.

Ainsi $\varphi(I_n)\,A=\varphi(A)$.

c) $(I_n+\lambda\,E_{ij})(I_n-\lambda\,E_{ij})=I_n^2-\lambda\,I_n\,E_{ij}+\lambda\,E_{ij}\,I_n-\lambda^2\,E_{ij}E_{ij}=I_n-\lambda^2\,E_{ij}E_{ij}=I_n$.

Ainsi $I_n+\lambda\,E_{ij}$ est inversible et d'inverse $I_n-\lambda\,E_{ij}$. Notons que cette matrice inverse se déduit de I_n par l'opération $L_i\leftarrow L_i-\lambda\,L_j$ normal non ?

Exercice On reprend les éléments de l'exercice précédent.

Q1. i et j sont deux éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. On note ψ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui même qui a une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associe la matrice déduite de A par l'opération $L_i\leftrightarrow L_j$.

a) Montrer que $\psi(I_n)=I_n-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}$.

b) Montrer que $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \psi(A)=\psi(I_n)\,A$.

c) Montrer que $\psi(I_n)$ est inversible et d'inverse elle même.

Q2. Traiter l'opération $L_i\leftarrow\lambda\,L_i$ $(\lambda\neq 0)$.

Q3. Traiter les opérations élémentaires sur les colonnes.

Q4. Et pour les éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$?
