Exercice 1 **Matrice de rang 1 et probabilités. ESCP 97**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la matrice $A = (P(X = i/Y = j))$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1.

---

* Supposons que X et Y sont indépendantes et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, notons $C_j(A)$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de A. $\text{rg}\, A = \dim \text{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A))$.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ P_{\{Y=j\}}(X=i) = \frac{P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})}{P(Y=j)} = \frac{P(X=i)\,P(Y=j)}{P(Y=j)} = P(X=i)$$

Alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(A) = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=n) \end{pmatrix}$. Posons $U = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=n) \end{pmatrix}$. $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $C_j(A) = U$.

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X=i) = 1$ donc $\exists i_0 \in [\![1,n]\!]$, $P(X=i_0) \neq 0$ donc $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\text{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = \text{Vect}(U)$ et $U \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $\dim \text{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = 1$. Le rang de A est 1.

* Réciproquement supposons que le rang de A est 1. $\exists C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $C \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$

tel que $\text{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = \text{Vect}(C)$ car $\dim \text{Vect}(C_1(A), C_2(A), \dots, C_n(A)) = \text{rg}\, A = 1$.

$\forall j \in [\![1,n]\!]$ $\exists \ell_j \in \mathbb{R}$, $C_j(A) = \ell_j C$. Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $P_{\{Y=j\}}(X=i) = \ell_j c_i$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\ell_j c_i = \dfrac{P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})}{P(Y=j)}$; $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $P(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = c_i \ell_j P(Y=j)$.

- $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(X=i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = c_i \sum_{j=1}^{n} \ell_j P(Y=j) \overset{!}{=} c_i \sum_{k=1}^{n} \ell_k P(Y=k)$. (1)
- $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $P(Y=j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \ell_j P(Y=j) \sum_{i=1}^{n} c_i \overset{!}{=} \ell_j P(Y=j) \sum_{k=1}^{n} c_k$. (2)
- $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (c_i \ell_j P(Y=j)) = \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} \ell_j P(Y=j)\Big)$. (3)

Alors $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $P(X=i)P(Y=j) \underset{(1)\text{ et }(2)}{=} c_i \ell_j P(Y=j) \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{n} \ell_k P(Y=k)\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k\Big)}_{=1} \underset{(3)}{=} c_i \ell_j P(Y=j)$.

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $P(X=i)P(Y=j) = P(\{X=i\}\cap\{Y=j\})$

X et Y sont indépendantes.

Exercice 2 **Exercice** **Matrice $\mathbf{I_n + x\,CL}$**

L est un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$et C un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Q1. $A = I_n + CL$. Montrer que A est inversible si et seulement si $LC \neq -1$.

On suppose que $LC \neq -1$. Trouver un élément x de $\mathbb{K}$ tel que : $(I_n + CL)^{-1} = I_n + xCL$

Q2. M est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Trouver une C.N.S. portant sur $LM^{-1}C$ pour que $N = M + CL$ soit inversible.

En cas d'inversibilité, exprimer N^{-1} en fonction de M^{-1}, C et L.

Q1 $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = 0 \iff X + C\underbrace{LX}_{\in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})} = 0 \iff X + (LX)C = 0 \iff X = -(LX)C$

• Supposons que $LC \neq -1$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$

Alors $X = -(LX)C$. En multipliant à gauche par L il vient $LX = -(LX)(LC)$.

Alors $LX(1 + LC) = 0_{\mathbb{K}}$. Comme $1 + LC \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $LX = 0_{\mathbb{K}}$.

Donc $X = -(LX)C = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. A est inversible.

• Supposons $LC = -1$. Nécessairement $L \neq 0_{\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})}$ et $C \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

Alors $AC = (I_n + CL)C = C + C(LC) = C + (LC)C = C - C = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$.

$AC = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$ et $C \neq 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. A n'est pas inversible.

Ainsi A est inversible si et seulement si $LC \neq -1$.

On suppose $LC \neq -1$. Soit x dans $\mathbb{K}$.

$A(I_n + xCL) = (I_n + CL)(I_n + xCL) = I_n + xCL + CL + CL(xCL)$

$A(I_n + xCL) = I_n + (x+1)CL + xC\underbrace{(LC)}_{\in \mathbb{K}}L = I_n + (x + 1 + xLC)\,CL$

Notons que $x + 1 + xLC = 0 \underset{LC \neq -1}{\iff} x = -\dfrac{1}{1+LC}$.

Donc si $x = -\dfrac{1}{1+LC}$: $A(I_n + xCL) = I_n$.

Alors plus de doute $A^{-1} = I_n - \dfrac{1}{1+LC}\,CL$.

Q2 M étant inversible : N inversible $\Leftrightarrow$ NM^{-1} est inversible. (*)

Alors N inversible $\Leftrightarrow$ NM^{-1} inversible $\Leftrightarrow$ $MM^{-1} + CLM^{-1}$ inversible $\Leftrightarrow$ $I_n + CLM^{-1}$ inversible

d'après Q1 $I_n + C(LM^{-1})$ inversible $\Leftrightarrow$ $LM^{-1}C \neq -1$.

<u>N est inversible si et seulement si $LM^{-1}C \neq -1$.</u>

Supposons N inversible. Alors $LM^{-1}C \neq -1$.

De plus NM^{-1} est inversible et $(NM^{-1})^{-1} = I_n - \dfrac{1}{1 + LM^{-1}C} CLM^{-1}$ d'après Q1.

Donc $MN^{-1} = I_n - \dfrac{1}{1+LM^{-1}C} CLM^{-1}$

Donc $N^{-1} = M^{-1} - \dfrac{1}{1+LM^{-1}C} M^{-1}CLM^{-1}$.

<u>Preuve de (*).</u> Notons que M et M^{-1} sont inversibles.

→ si N est inversible NM^{-1} est inversible comme produit de deux matrices inversibles

→ si NM^{-1} est inversible, $(NM^{-1})M$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles donc N est inversible.

Exercice 3 **Semblablité. QSP ESCP**

A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Posons $E=\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $E=\mathbb{R}^3$ de matrice A dans $\mathcal{B}$.

Posons $C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Pour montrer que C est semblable à A il suffit de trouver une base $\mathcal{B}'$ de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f)=C$.

* Commençons par une petite <u>analyse</u>. Supposons que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ soit une base de E telle que $M_{\mathcal{B}'}(f)=C$. Alors $f(e'_1)=f(e'_2)=0_E$ et $f(e'_3)=e'_1$.

  Alors • (e'_1,e'_2) est une famille libre de $\operatorname{Ker} f$.

  • $e'_1\in \operatorname{Im} f$ et $f(e'_3)=e'_1$

* <u>Construction de la base $\mathcal{B}'$</u>. $f^2=0_{\mathcal{L}(E)}$. $\forall x\in E,\ f(f(x))=0_E$; $\forall x\in E,\ f(x)\in\operatorname{Ker} f$.

  Ainsi $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Ker} f$. Alors $\dim \operatorname{Im} f\leq \dim\operatorname{Ker} f$.

  $f\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc $1\leq \dim\operatorname{Im} f$ et $\dim\operatorname{Ker} f\leq 2$.

Alors $1\leq \dim\operatorname{Im} f\leq \dim\operatorname{Ker} f\leq 2$. Comme $\dim\operatorname{Im} f+\dim\operatorname{Ker} f=3$, nécessairement $\dim\operatorname{Im} f=1$ et $\dim\operatorname{Ker} f=2$.

Soit e'_1 un élément non nul de $\operatorname{Im} f$. $\operatorname{Im} f\subset\operatorname{Ker} f$ donc (e'_1) est une famille libre de $\operatorname{Ker} f$. Complétons cette famille en une base (e'_1,e'_2) de $\operatorname{Ker} f$.

Notons que $e'_1\in\operatorname{Im} f$ donc $\exists e'_3\in E,\ f(e'_3)=e'_1$.

Nous avons donc $f(e'_1)=f(e'_2)=0_E$ et $f(e'_3)=e'_1$. Il reste plus à montrer que $\mathcal{B}'=(e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de E. Comme $\dim E=3$ il suffit de montrer que cette famille est libre. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\alpha e'_1+\beta e'_2+\gamma e'_3=0_E$.

$0_E=f(0_E)=\alpha f(e'_1)+\beta f(e'_2)+\gamma f(e'_3)=\gamma f(e'_3)=\gamma e'_1$ et $e'_1\neq 0_E$ ((e'_1) est libre). Ainsi $\gamma=0$. Alors $\alpha e'_1+\beta e'_2=0_E$. Comme (e'_1,e'_2) est libre : $\alpha=\beta=0$.

Ceci achève de montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E. De plus $M_{\mathcal{B}'}(f)=C$.

Ainsi $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ est semblable à A.

Exercice 4 **Trace d'une matrice. QSP**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $T(M) = M - \mathrm{tr}(M)A$ où $\mathrm{tr}(M)$ est la somme des éléments diagonaux de M.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que T soit bijective.

c) Caractériser T lorsque T n'est pas bijective.

---

a) • Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $\mathrm{tr}(M) \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc $T(M) = M - \mathrm{tr}(M)A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

<u>T est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.</u>

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$

$T(\lambda M+N) = \lambda M+N - \mathrm{tr}(\lambda M+N)A \overset{\text{linéarité de la trace}}{=} \lambda M+N - (\lambda \mathrm{tr}(M)+\mathrm{tr}(N))A$.

$T(\lambda M+N) = \lambda(M - \mathrm{tr}(M)A) + (N - \mathrm{tr}(N)A) = \lambda T(M) + T(N)$

<u>T est linéaire.</u>

Ainsi <u>T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.</u>

b) T est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) < +\infty$. Alors T est bijective si et seulement si T est injective ou si et seulement si $\mathrm{Ker}\, T = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$

• Soit $M \in \mathrm{Ker}\, T$. $M - \mathrm{tr}(M)A = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. $M = \mathrm{tr}(M)A$; $M \in \mathrm{Vect}(A)$.

Ainsi <u>$\mathrm{Ker}\, T \subset \mathrm{Vect}(A)$</u>

Par conséquent $\mathrm{Ker}\, T = \{0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}\}$ ou $\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Vect}(A)$ car $\mathrm{Vect}(A)$ est de dimension 1 ($A \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$). Dans le premier cas T est injective et dans le second elle ne l'est pas.

Comme $\mathrm{Ker}\, T \subset \mathrm{Vect}(A)$: $\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Vect}(A) \iff \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Ker}\, T \iff A \in \mathrm{Ker}\, T \iff T(A) = 0$

$\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Vect}(A) \iff T(A) = 0 \iff A - \mathrm{tr}(A)A = 0 \iff \mathrm{tr}(A) = 1$ $(A \neq 0)$.

Ainsi T est injective ssi $\mathrm{tr}(A) \neq 1$. <u>T est bijective si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 1$.</u>

c) Supposons que T_u n'est pas bijective. Alors $tr(A)=1$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

$T(T(M)) = T(M - tr(M)A) = T(M) - tr(M)T(A)$

$T(T(M)) = M - tr(M)A - tr(M)(\underbrace{A - tr(A)A}_{= 0_{M_n(\mathbb{R})}}) = M - tr(M)A = T(M)$.

$T \in \mathcal{L}(E)$ et $T \circ T = T$. <u>T est une projection.</u>

T est la projection sur $\operatorname{Im} T = \operatorname{Ker}(T - Id_{M_n(\mathbb{R})})$ parallèlement à $\operatorname{Ker} T$.

Rappelons que $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}(A)$. $\quad A \neq 0_{M_n(\mathbb{R})}$

$\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $T(M) = M \iff tr(M)A = 0_{M_n(\mathbb{R})} \iff tr(M) = 0 \iff M \in \operatorname{Ker} tr$.

<u>T est la projection sur $\operatorname{Ker} tr$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(A)$.</u>

Exercice 5 **Polynômes de matrices. QSP**

n et p sont deux éléments de $[\![2,+\infty[\![$. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On pose $E = \{P(A)\,;\, P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension.

---

* • $E \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

• $0_{\mathbb{R}[X]}(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in E$. $E \neq \emptyset$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(B,C) \in E^2$. $\exists (P,\varphi) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $B = P(A)$ et $C = \varphi(A)$.

$\lambda B + C = \lambda P(A) + \varphi(A) = (\lambda P + \varphi)(A)$ et $\lambda P + \varphi \in \mathbb{R}[X]$. Ainsi $\lambda B + C \in E$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (B,C) \in E^2,\ \lambda B + C \in E$.

E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

* Posons $E' = \mathrm{Vect}(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1})$.

Soit $B \in E'$. $\exists (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$, $B = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k A^k$. Posons $P = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k X^k$.

Alors $P \in \mathbb{R}[X]$ et $B = P(A)$ donc $B \in E$.

Ainsi $E' \subset E$.

Réciproquement soit $B \in E$. $\exists P \in \mathbb{R}[X]$, $B = P(A)$.

$\exists r \in \mathbb{N}, \exists (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k X^k$.

donc $B = P(A) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k A^k$.

1er cas. $r \leqslant p-1$. Alors $B \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^r) \subset \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1}) = E'$.

2e cas. $r \geqslant p$. $\forall k \in [\![p, +\infty[\![$, $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors $B = P(A) = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k A^k = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k A^k \in \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{p-1}) = E'$

donc $E \subset E'$.

Finalement $E = \mathrm{Vect}(I, A, \dots, A^{p-1})$.

$(I, A, A^2, \dots, A^{p-1})$ est une famille génératrice de E.

montrons que $(I, A, A^2, \dots, A^{p-1})$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{\ell=0}^{p-1} \lambda_\ell A^\ell = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

montrons à l'aide d'une récurrence finie que $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\lambda_k = 0$.

- $O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = A^{p-1} \times \sum_{\ell=0}^{p-1} \lambda_\ell A^\ell = \sum_{\ell=0}^{p-1} \lambda_\ell A^{\ell+p-1} = \lambda_0 A^{p-1}$

$A^{\ell+p-1} = 0$ si $\ell+p-1 \geq p-1$ donc si $\ell > 0$

$\lambda_0 A^{p-1} = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{p-1} \neq O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Ainsi $\lambda_0 = 0$

- Supposons que $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k$ pour $k \in [\![0, p-2]\!]$ et montrons que $\lambda_{k+1} = 0$.

Alors $\sum_{i=k+1}^{p-1} \lambda_i A^i = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ multiplions cette égalité par A^{p-2-k}

il vient $\sum_{i=k+1}^{p-1} \lambda_i A^{i+p-2-k} = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. Ainsi $\lambda_{k+1} A^{p-1} = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ car si $i > k+1$:

$i+p-2-k \geq p-1$ et ainsi $A^{i+p-2-k} = O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Comme $A^{p-1} \neq O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ il vient $\lambda_{k+1} = 0$. Ceci achève la récurrence.

Par conséquent $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1}$.

La famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{p-1})$ est libre. C'est donc une base de E.

Alors $\underline{\underline{\dim E = p}}$.

Exercice 6 **Polynôme d'endomorphisme**

Q1. $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose $a_0 \neq 0$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme B de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $AB - 1$ soit un multiple de X^{n+1} (on pourra écrire $B = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et étudier un système d'équations vérifié par les réels b_0, b_1, ..., b_n).

Trouver B lorsque $A = 1 - X$ et lorsque $A = 1 - X^n$ ($n > 0$).

Q2. E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que $A(f)$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$ (dans ce cas on indiquera le moyen de trouver l'inverse de $A(f)$).

Q3. Applications :

a) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P + P' + \cdots + P^{(n)} = X^n$$

b) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(X) + P'(X-1) + P''(X-2) = X^5$$

Q1 Soit $B = \sum_{\ell=0}^{n} b_\ell X^\ell$ un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

$$AB - 1 = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j X^j\right) - 1 = \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{k=\max(0,i-n)}^{\min(n,i)} a_k b_{i-k}\right) X^i - 1$$

$AB - 1$ multiple de X^{n+1}

$$\Updownarrow$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{k=\max(0,i-n)}^{\min(n,i)} a_k b_{i-k} = 0 \text{ et } a_0 b_0 - 1 = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = 0 \text{ et } a_0 b_0 = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{k=0}^{i} a_{i-k} b_k \text{ et } a_0 b_0 = 1.$$

Ainsi $AB - 1$ est un multiple de X^{n+1} ssi $(b_0, b_1, \dots, b_n)$ est solution d'un système linéaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues dont la matrice est

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & & & (0) \\ a_1 & a_0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

a_0 étant non nul cette matrice triangulaire inférieure est inversible donc le système est de Cramer.

Il admet donc une solution et une seule.

Donc $\exists!\, B \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $AB-1$ soit un multiple de X^{n+1}

$(1-X)(1+X+\cdots+X^n) = 1-X^{n+1}$

Donc $(1-X)(1+X+\cdots+X^n) - 1 = -X^{n+1}$ et $1+X+\cdots+X^n \in \mathbb{R}_n[X]$.

Si $A = 1-X$: $B = 1+X+\cdots+X^n$

$(1-X^n)(1+X^n) = 1-X^{2n}$

$(1-X^n)(1+X^n) - 1 = (-X^{n-1})X^{n+1}$ et $1+X^n \in \mathbb{R}_n[X]$.

Si $A = 1-X^n$: $B = 1+X^n$

Exercice.. Retrouver ces deux résultats en résolvant le système.

Q2 1er Cas.. $a_0 \neq 0$. Alors $\exists!\, B \in \mathbb{R}_n[X]$, tel que $AB-1$ soit un multiple de X^{n+1}!

$\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $AB-1 = QX^{n+1}$.

Alors $(AB)(f) - Id_E = (QX^{n+1})(f)$.

Donc $(AB)(f) - Id_E = Q(f) \circ f^{n+1} = Q(f) \circ 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors $(AB)(f) = Id_E$. On a également $(BA)(f) = Id_E$.

Ainsi $A(f) \circ B(f) = Id_E = (BA)(f) = B(f) \circ A(f)$.

Par conséquent $A(f)$ est inversible (et d'inverse $B(f)$).

2ème Cas.. $a_0 = 0$. $A(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k f^k = f \circ \sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1} \circ f$.

Posons $g = \sum_{k=1}^{n} a_k f^{k-1}$. $A(f) = g \circ f = f \circ g$.

Si f est injectif alors f^{n+1} est injectif (composée de $n+1$ endomorphismes injectifs). Or $f^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$! Ainsi f n'est pas injectif. $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$.

$\exists x_0 \in E$, $x_0 \neq 0_E$ et $f(x_0) = 0_E$.

Alors $x_0 \neq 0_E$ et $A(f)(x_0) = g(f(x_0)) = g(0_E) = 0_E$. Ker $A(f) \neq \{0_E\}$.

Ainsi $A(f)$ n'est pas injectif donc $A(f)$ n'est pas inversible.

<u>$A(f)$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.</u> <u>Notons que $a_0 = A(0)$.</u>

Q3 a) Notons que si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si $P + P' + \cdots + P^{(n)} = X^n$ alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Le problème consiste donc à trouver $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} P^{(k)} = X^n$.

Posons $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $d(P) = P'$. Posons aussi $E = \mathbb{R}_n[X]$.

$d \in \mathcal{L}(E)$ et $d^{n+1} = 0$. Posons $A = 1 + X + \cdots + X^n$.

$A(0) \neq 0$ donc $A(d)$ est inversible.

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$\sum_{k=1}^{n} P^{(k)} = X^n \Leftrightarrow A(d)(P) = X^n \Leftrightarrow P = (A(d))^{-1}(X^n)$.

Le problème n'a donc qu'une solution : $(A(d))^{-1}(X^n)$.

$(1-X)(1+X+\cdots+X^n) = 1 - X^{n+1} = (1+X+\cdots+X^n)(1-X)$

Alors $(Id_E - d) \circ (Id_E + d + \cdots + d^n) = Id_E - \underbrace{d^{n+1}}_{=0_{\mathcal{L}(E)}} = Id_E = (Id_E + d + \cdots + d^n) \circ (Id_E - d)$.

Ainsi $(A(d))^{-1} = (Id_E + d + \cdots + d^n)^{-1} = Id_E - d$. Donc $(A(d))^{-1}(X^n) = X^n - nX^{n-1}$.

Donc <u>$\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $P + P' + \cdots + P^{(n)} = X^n \Leftrightarrow P = X^n - nX^{n-1}$.</u>

b) Ici encore si P est solution : $P \in \mathbb{R}_5[X]$. Nous cherchons donc les solutions dans $\mathbb{R}_5[X]$. Posons $\forall P \in \mathbb{R}_5[X]$, $f(P) = P'(X-1)$. $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_5[X])$ et $f^{(6)} = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}_5[X])}$.

Posons $A = 1 + X + X^2$; $A(0) \neq 0$. Alors $A(f)$ est inversible.

Notons que $\forall P \in \mathbb{R}_5[X]$, $A(f)(P) = P + f(P) + f^2(P) = P + P'(X-1) + P''(X-2)$.

Alors $\forall P \in \mathbb{R}_5[X]$, $P(X) + P'(X-1) + P''(X-2) = X^5 \Leftrightarrow A(f)(P) = X^5 \Leftrightarrow P = (A(f))^{-1}(X^5)$.

Le problème admet une solution et une seule <u>$(A(f))^{-1}(X^5)$.</u>

Cherchons $(A(f))^{-1}$. Pour cela cherchons $B \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que $AB-1$ soit un multiple de X^6.

Soit $B = \sum_{\ell=0}^{5} a_\ell X^\ell \in \mathbb{R}_5[X]$

$AB-1 = (1+X+X^2)\left(\sum_{\ell=0}^{5} a_\ell X^\ell\right) - 1 = \sum_{\ell=0}^{5} a_\ell X^\ell + \sum_{\ell=0}^{5} a_\ell X^{\ell+1} + \sum_{\ell=0}^{5} a_\ell X^{\ell+2} - 1$

Alors $AB-1$ multiple de X^6

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 + a_0 = 0 \\ a_2 + a_1 + a_0 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_3 + a_2 + a_1 = 0 \\ a_4 + a_3 + a_2 = 0 \\ a_5 + a_4 + a_3 = 0 \end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_4 = -1 \\ a_5 = 0 \end{cases}$

$AB-1$ est multiple de X^5 si et seulement si $B = -X^4 + X^3 - X + 1$.

Posons $B = -X^4 + X^3 - X + 1$. D'après Q2 $B(f)$ est l'inverse de $A(f)$.

Alors la solution au problème est $B(f)(X^5)$.

$B(f)(X^5) = -f^4(X^5) + f^3(X^5) - f(X^5) + X^5$.

$\forall P \in \mathbb{R}_5[X]$, $f(P) = P'(X-1)$, $f^2(P) = P''(X-2)$, $f^3(P) = P'''(X-3)$ et $f^4(P) = P^{(4)}(X-4)$.

De plus $(X^5)' = 5X^4$, $(X^5)'' = 20X^3$, $(X^5)''' = 60X^2$, $(X^5)^{(4)} = 120X$.

Donc $B(f)(X^5) = -120(X-4) + 60(X-3)^2 - 5(X-1)^4 + X^5$

$B(f)(X^5) = X^5 - 5(X-1)^4 + 60(X-3)^2 - 120(X-4)$.

$\underline{\underline{B(f)(X^5) = X^5 - 5X^4 + 80X^3 - 570X^2 + 1520X - 1345}}$

R

Exercice 7 **Matrices. Résolution approchée d'un système linéaire. Méthode de Gauss-Seidel.**

ESCP 2004

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'objet de cet exercice est de chercher une solution approchée de l'équation $AY = B$ où $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est une matrice colonne fixée. On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, |a_i| > n - 1$.

Q1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = 0$, on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X = 0$, en déduire que A est inversible.

(On pourra écrire le système $AX = 0$ et utiliser une ligne L_j où j est tel que $|x_j| = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |x_i|$).

Q2. a) Montrer que l'équation $AY = B$ admet une solution et une seule que l'on notera $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = A - M$. Montrer que $Y = -D^{-1}MY + D^{-1}B$.

b) On définit la suite de vecteurs (X_m) par : $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $X_{m+1} = -D^{-1}MX_m + D^{-1}B$.

Exprimer $X_{m+1} - Y$ en fonction de D, M et $X_m - Y$.

c) On pose $X_m = \begin{pmatrix} x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix}$ et on définit la suite (u_m) par : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $u_m = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Max}} |x_i^m - y_i|$.

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $u_{m+1} \leqslant \dfrac{n-1}{\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\text{Min}} |a_i|} u_m$.

d) En déduire la convergence la suite (X_m) vers Y (c'est-à-dire, la convergence de la suite (x_i^m) vers y_i pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$).

Q1 Notons que nous sommes en terrain connu car A est une matrice à diagonale strictement dominante... Nous posons $\underline{A = (a_{ij})}$.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Soit $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_j| = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\max} |x_i|$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = 0$ car $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = 0$.

Donc $a_j x_j = a_{jj} x_j = -\displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{jk} x_k = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} x_k$.

Donc $|a_j||x_j| = |a_j x_j| = \left|-\displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |x_k| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |x_j| = (n-1)|x_j|$.

Ainsi $(|a_j|-(n-1))|x_j| \leq 0$. Or $|a_j|-(n-1)>0$ donc $|x_j|\leq 0$.

Alors $|x_j|=0$. Comme $|x_j| = \max\limits_{1\leq \ell\leq n}|x_\ell|$: $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $|x_\ell|=0$.

donc $\forall \ell \in [\![1,n]\!]$, $x_\ell = 0$. $X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$.

$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $AX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \Rightarrow X = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. A est inversible.

Q2 a) A est inversible. L'équation $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $AX=B$ admet une solution et une seule : $X = A^{-1}B$. Dans la suite on pose $Y = A^{-1}B$.

b) $D = A - M = \mathrm{Diag}(a_1,\dots,a_n)$. De plus $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $|a_i| > n-1 \geq 0$.

Alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $a_i \neq 0$. Ceci montre que D est inversible.

$AY = B$. $B = (D+M)Y$; $DY = B - MY$; $Y = D^{-1}B - D^{-1}MY$. $Y = -D^{-1}MY + D^{-1}B$.

Soit $m\in\mathbb{N}$. $X_{m+1} - Y = -D^{-1}MX_m + D^{-1}B + D^{-1}MY - D^{-1}B = -D^{-1}M(X_m - Y)$.

$\forall m \in \mathbb{N}$, $X_{m+1} - Y = -D^{-1}M(X_m - Y)$.

c) Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Soit $m\in\mathbb{N}$. Posons $H = (h_{ij}) = -D^{-1}M$.

$$x_i^{m+1} - y_i = \sum_{\ell=1}^{n} h_{i\ell}(x_\ell^m - y_\ell) \quad (\text{car } X_{m+1}-Y = -D^{-1}M(X_m - Y) = H(X_m - Y)).$$

$$|x_i^{m+1} - y_i| \leq \sum_{\ell=1}^{n} |h_{i\ell}|\,|x_\ell^m - y_\ell| \leq u_m \sum_{\ell=1}^{n} |h_{i\ell}|.$$

Alors $u_{m+1} = \max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i^{m+1}-y_i| \underset{u_m\geq 0}{\leq} u_m \max\limits_{1\leq i\leq n}\left(\sum\limits_{\ell=1}^{n}|h_{i\ell}|\right)$.

Déterminons $H = -D^{-1}M$. Posons $D^{-1} = (\delta_{ij})$ et $M = (m_{ij})$

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1/a_i & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \quad \text{et} \quad m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i=j \\ 1 & \text{sinon}\end{cases}.$$

$$\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ h_{ij} = -\sum_{\ell=1}^{n}\delta_{i\ell}m_{\ell j} = -\frac{1}{a_i}m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i=j \\ -\frac{1}{a_i} & \text{si } i\neq j\end{cases}.$$

Soit $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |h_{ik}| = \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell\neq i}}^{n} \left|-\frac{1}{a_i}\right| = \frac{n-1}{|a_i|} \leq \frac{n-1}{\min\limits_{1\leq \ell\leq n} |a_\ell|}$.

Donc $\displaystyle\max_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n} |h_{ik}| \leq \frac{n-1}{\min\limits_{1\leq \ell\leq n} |a_\ell|}$.

Alors $\forall m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle u_{m+1} \leq \frac{n-1}{\min\limits_{1\leq i\leq n} |a_i|} u_m$.

d) Posons $C = \dfrac{n-1}{\min\limits_{1\leq i\leq n} |a_i|}$. $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_{m+1} \leq C u_m$.

Une récurrence simple donne : $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_m \leq C^m u_0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_i| > n-1$ donc $\min\limits_{1\leq i\leq n} |a_i| > n-1$. Alors $0 \leq C < 1$.

Donc $\lim C^m = 0$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_m \leq C^m u_0$.

Par encadrement : $\lim\limits_{m\to+\infty} u_m = 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $0 \leq |x_i^m - y_i| \leq u_m$ et $\lim\limits_{m\to+\infty} u_m = 0$.

Par encadrement il vient $\lim\limits_{m\to+\infty} x_i^m = y_i$ pour tout i dans $[\![1,n]\!]$

Alors $(X_m)_{m\geq 0}$ converge vers Y.

Exercice 8 **Produit**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ ACB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Montrer que A est nulle ou B est nulle.

Posons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Soit $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$.

Soit $E_{pq} = (e_{ij})$ la matrice définie par $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) = (p,q) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors $AE_{pq}B = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. Posons $U = (u_{ij}) = E_{pq}B$ et $V = (v_{ij}) = AU$. $V = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$!

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $u_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ik} b_{kj} \overset{\downarrow}{=} e_{iq} b_{qj}$. $e_{ik} = 0$ si $k \neq q$

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $v_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} u_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_{kq} b_{qj} \overset{\downarrow}{=} a_{ip} e_{pq} b_{qj} = a_{ip} b_{qj}$ $e_{kq} = 0$ si $k \neq p$

Donc $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ip} b_{qj} = 0$.

Mieux $\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{ip} b_{qj} = 0$.

ou encore $\forall (i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$, $a_{ij} b_{k\ell} = 0$.

<u>Supposons A non nulle.</u> $\exists (i_0,j_0) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i_0j_0} \neq 0$.

Or $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i_0j_0} b_{k\ell} = 0$. Dans ces conditions $\forall (k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, $b_{k\ell} = 0$

Donc <u>B est nulle.</u>

Finalement A est nulle ou, A est non nulle et B est nulle.

Donc <u>A est nulle ou B est nulle</u>.

Exercice 9 **Polynômes de matrices**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $AB - BA = A$.

Q1. a) Exprimer de manière simple $A^kB - BA^k$ en fonction de A^k pour tout k dans $\mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$: $P(A)B - BP(A) = AP'(A)$.

Q2. On rappelle qu'il existe un polynôme non nul Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

a) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$: $A^kQ^{(k)}(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

b) En déduire qu'il existe un élément r de $\mathbb{N}$ tel que : $A^r = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Q1 a) $A^0B - BA^0 = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$. $AB - BA = A$. Notons que $AB = BA + A$.

$A^2B - BA^2 = A(BA+A) - BA^2 = ABA + A^2 - BA^2 = (BA+A)A + A^2 - BA^2 = 2A^2$...

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kB - BA^k = kA^k$.

→ c'est vrai pour $k=0$, 1 et 2.

→ Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

$$A^{k+1}B - BA^{k+1} \underset{\downarrow}{=} A(\underbrace{BA^k + kA^k}_{A^kB = BA^k + kA^k}) - BA^{k+1} = ABA^k + kA^{k+1} - BA^{k+1} \underset{AB = BA+A}{=} (BA+A)A^k + kA^{k+1} - BA^{k+1}.$$

$A^{k+1}B - BA^{k+1} = BA^{k+1} + A^{k+1} + kA^{k+1} - BA^{k+1} = (k+1)A^{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kB - BA^k = kA^k$.

b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. $\exists r \in \mathbb{N}$, $\exists (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^{r+1}$, $P = \sum_{k=0}^{r} a_k X^k$.

$P(A)B - BP(A) = \left(\sum_{k=0}^{r} a_k A^k\right)B - B\left(\sum_{k=0}^{r} a_k A^k\right) = \sum_{k=0}^{r} a_k (A^kB - BA^k) = \sum_{k=0}^{r} a_k (kA^k)$ Q1

$P(A)B - BP(A) = \sum_{k=1}^{r} k a_k A^k = A\left(\sum_{k=1}^{r} k a_k A^{k-1}\right) = AP'(A)$.

$\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)B - BP(A) = AP'(A)$. On a également $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $P(A)B - BP(A) = P'(A)A$.

Q2 a) Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^kQ^{(k)}(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$:

→ c'est clair pour $k=0$ car $A^0 = I_n$ et $Q^{(0)}(A) = Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

→ Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}$ et montrons la pour $k+1$.

D'après Q1b : $Q^{(k)}(A)B - BQ^{(k)}(A) = A(Q^{(k)})'(A) = AQ^{(k+1)}(A)$

Multiplions à gauche par A^k.

Alors $\underbrace{A^k \varphi^{(k)}(A)B}_{=O_{M_n(\mathbb{K})}} - A^k B\, \varphi^{(k)}(A) = A^{k+1} \varphi^{(k+1)}(A)$.

$A^kB - BA^k = kA^k$

Ainsi $A^{k+1} \varphi^{(k+1)}(A) = -A^k B\, \varphi^{(k)}(A) = -(BA^k + kA^k)\varphi^{(k)}(A) = -B\underbrace{A^k\varphi^{(k)}(A)}_{=O_{M_n(\mathbb{K})}} - k\underbrace{A^k\varphi^{(k)}(A)}_{O_{M_n(\mathbb{K})}}$

donc $A^{k+1}\varphi^{(k+1)}(A) = O_{M_n(\mathbb{K})}$. Ceci achève la récurrence.

$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \varphi^{(k)}(A) = O_{M_n(\mathbb{K})}$.

b) Rappelons que φ n'est pas le polynôme nul. Soit r sa degré et a_r le coefficient de X^r dans φ. $a_r \neq 0$ et $\varphi^{(r)} = r!\, a_r$.

Alors $O_{M_n(\mathbb{K})} = A^r \varphi^{(r)}(A) = A^r(r!\, a_r I_n) = r!\, a_r A^r$.

Or $r!\, a_r \neq 0$ donc $A^r = O_{M_n(\mathbb{K})}$.

Ainsi $\exists r \in \mathbb{N},\ A^r = O_{M_n(\mathbb{K})}$.

Proposons une deuxième preuve (très classique) de ce résultat à partir de Q1 a).

Posons $\forall M \in M_n(\mathbb{K}),\ f(M) = MB - BM$. f est clairement un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$ et $M_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. Alors f n'a qu'un nombre fini de valeurs propres.

Notons que $\forall k \in \mathbb{N},\ f(A^k) = A^kB - BA^k = kA^k$.

Supposons que $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \neq O_{M_n(\mathbb{K})}$. Alors $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \neq O_{M_n(\mathbb{K})}$ et $f(A^k) = kA^k$.

Dans ces conditions tous les éléments de $\mathbb{N}$ sont valeurs propres de f. Alors f admet une infinité de valeurs propres !

Il est donc impossible d'avoir : $\forall k \in \mathbb{N},\ A^k \neq O_{M_n(\mathbb{K})}$.

Ainsi $\exists r \in \mathbb{N},\ A^r = O_{M_n(\mathbb{K})}$.

Exercice 10 **Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$**

Q1. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Calculer la trace $\text{tr}(E_{pq}A)$ de $E_{pq}A$ où E_{pq} est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la $p^{\text{ème}}$ ligne et de la $q^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

b) Pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose : $f_A(M) = \text{tr}(MA)$. Montrer que f_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q2. Réciproquement soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une seule telle que : $f = f_A$.

Q1 a) Soit $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$. Posons $E_{pq} = (e_{ij})$ et $B = (b_{ij}) = E_{pq}A$.

$$\text{tr}(E_{pq}A) = \text{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} e_{ik}\, a_{ki} \underset{\uparrow}{=} a_{qp}.$$

$e_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,k)=(p,q) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\forall (p,q) \in [\![1,n]\!]^2,\ \text{tr}(E_{pq}A) = a_{qp}.$

b) • f_A est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $(M,N) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.

tr est linéaire

$f_A(\lambda M+N) = \text{tr}((\lambda M+N)A) = \text{tr}(\lambda MA + NA) = \lambda\, \text{tr}(MA) + \text{tr}(NA)$

$f_A(\lambda M+N) = \lambda f_A(M) + f_A(N).$

f_A est linéaire.

f_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q2 Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons par Analyse / Synthèse qu'il existe une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f = f_A$.

→ Analyse / Unicité Supposons qu'il existe $A = (a_{ij})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f = f_A$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{ij} \underset{\substack{\uparrow \\ Q1\,a)}}{=} \text{tr}(E_{ji}A) = f_A(E_{ji}) = f(E_{ji}).$

Ainsi $A = (f(E_{ji}))$. D'où l'unicité.

→ Synthèse / existence. Considérons la matrice $A = (f(E_{ji}))$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons que $f = f_A$. f et f_A étant deux formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour montrer qu'elles sont égales il suffit de montrer qu'elles coïncident sur la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ f_A(E_{ij}) = \text{Tr}(E_{ij}A) = f(E_{ij})$ d'après Q1 a). Donc $f = f_A$ d'où l'existence.

$\uparrow$ $A = (f(E_{ji}))$

$\forall f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}),\ \exists !\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ f = f_A.$

R

Exercice 11 **Inversibilité et inversion**

α et β sont deux réels. $M(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $n \in [\![2,+\infty[\![$.

$M(\alpha,\beta)$ est-elle inversible ? Si oui déterminer $M(\alpha,\beta)^{-1}$.

$*$ Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. $M(\alpha,\beta)X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \cdots + \beta x_n = 0 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \beta x_n = 0 \\ \cdots \\ \beta x_1 + \beta x_2 + \cdots + \beta x_{n-1} + \beta x_n = 0 \end{cases}$

$\forall k \in [\![2,n]\!]$, $L_k \leftarrow L_k - L_1$

$M(\alpha,\beta)X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \cdots + \beta x_n = 0 \\ (\beta-\alpha)x_1 + (\alpha-\beta)x_2 = 0 \\ (\beta-\alpha)x_1 + (\alpha-\beta)x_3 = 0 \\ \cdots \\ (\beta-\alpha)x_1 + (\alpha-\beta)x_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \cdots + \beta x_n = 0 \\ (\beta-\alpha)x_1 = (\beta-\alpha)x_2 = \cdots = (\beta-\alpha)x_n . \end{cases}$

__1er cas.. $\beta = \alpha$.__ $X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \alpha(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = 0$.

Posons $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. $V \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $M(\alpha,\beta)V = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors __$M(\alpha,\beta)$ n'est pas inversible.__

__2ième cas.. $\beta \neq \alpha$__ $M(\alpha,\beta)X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_n \\ 0 = \alpha x_1 + \beta x_1 + \cdots + \beta x_1 = (\alpha + (n-1)\beta)x_1 \end{cases}$

__a)__ $\alpha + (n-1)\beta = 0$

$M(\alpha,\beta)X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Considérons l'élément $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. $V \neq 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$ et $M(\alpha,\beta)V = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors __$M(\alpha,\beta)$ n'est pas inversible__ .

__b)__ $\alpha + (n-1)\beta \neq 0$

$M(\alpha,\beta)X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = \cdots = x_n \\ x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0_{M_{n,1}(\mathbb{R})}$.

Alors $M(\alpha,\beta)$ est inversible

Finalement __$M(\alpha,\beta)$ est inversible si et seulement si $\beta \neq \alpha$ et $\alpha + (n-1)\beta \neq 0$.__

Supposons $\Pi(\alpha,\beta)$ inversible. Alors $\beta \neq \alpha$ et $\alpha+(n-1)\beta = 0$.

Soit $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $\Pi(\alpha,\beta)X = Y$.

Alors $\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 + \dots + \beta x_n = y_1 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \dots + \beta x_n = y_2 \\ \dots \\ \beta x_1 + \dots + \beta x_{n-1} + \alpha x_n = y_n \end{cases}$. $L_1+L_2+\dots+L_n$ donne :

$$(\alpha+(n-1)\beta)(x_1+x_2+\dots+x_n) = y_1+y_2+\dots+y_n.$$

Alors $x_1+x_2+\dots+x_n = a(y_1+y_2+\dots+y_n)$ où $a = \dfrac{1}{\alpha+(n-1)\beta}$.

Soit $k \in [\![1,n]\!]$. L_k donne $\beta(x_1+x_2+\dots+x_n) - \beta x_k + \alpha x_k = y_k$.

Alors $x_k = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left[y_k - \beta(x_1+\dots+x_n)\right] = \dfrac{1}{\alpha-\beta}\left[y_k - \beta a(y_1+y_2+\dots+y_n)\right]$

Donc $x_k = \dfrac{\beta a}{\alpha-\beta}\left[\left(\dfrac{1}{\beta a}-1\right)y_k - \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} y_i\right] = \dfrac{1-\beta a}{\alpha-\beta}\, y_k - \dfrac{\beta a}{\alpha-\beta}\displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} y_i$.

Posons $\alpha' = \dfrac{1-\beta a}{\alpha-\beta}$ et $\beta' = -\dfrac{\beta a}{\alpha-\beta}$.

Alors $\begin{cases} x_1 = \alpha' y_1 + \beta' y_2 + \dots + \beta' y_n \\ x_2 = \beta' y_1 + \alpha' y_2 + \beta' y_3 + \dots + \beta' y_n \\ \dots \\ x_n = \beta' y_1 + \dots + \beta' y_{n-1} + \alpha' y_n \end{cases}$. Donc $(\Pi(\alpha,\beta))^{-1} = \Pi(\alpha',\beta')$.

$$\alpha' = \frac{1}{\alpha-\beta}[1-\beta a] = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[1 - \frac{\beta}{\alpha+(n-1)\beta}\right] = \frac{1}{\alpha-\beta}\,\frac{\alpha+(n-1)\beta-\beta}{\alpha+(n-1)\beta} = \frac{\alpha+(n-2)\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha+(n-1)\beta)}.$$

$\beta' = -\dfrac{\beta a}{\alpha-\beta} = \dfrac{-\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha+(n-1)\beta)}$. Alors $(\Pi(\alpha,\beta))^{-1} = \Pi\left(\dfrac{\alpha+(n-2)\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha+(n-1)\beta)}, \dfrac{-\beta}{(\alpha-\beta)(\alpha+(n-1)\beta)}\right)$.

<u>Exercice</u>. – Retrouver $(\Pi(\alpha,\beta))^{-1}$ en écrivant $\Pi(\alpha,\beta) = (\alpha-\beta)I_n + \beta J_n$ où J_n est la matrice de $M_n(K)$ dont tous les coefficients valent 1.

En remarquant que $J_n^2 = nJ_n$ on pourra établir que :

$$(\Pi(\alpha,\beta))^2 - (2\alpha-2\beta+n\beta)\,\Pi(\alpha,\beta) - (\alpha-\beta)(\beta-\alpha-n\beta)\, I_n = 0_{M_n(K)}.$$

Exercice 12 **Rang**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible.

Montrer que B, AB et BA ont même rang.

Posons $E = \mathbb{K}^n$. Soit f (resp. g) l'endomorphisme de E de matrice A (resp. B) dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $E = \mathbb{K}^n$. f est un automorphisme de E car A est inversible.

- $\text{rg}\, BA = \text{rg}(g \circ f) = \dim \text{Im}(g \circ f) = \dim g(f(E)) \underset{f(E)=E}{=} \dim g(E) = \dim \text{Im}\, g = \text{rg}\, g = \text{rg}\, B$.

$\underline{\text{rg}\, BA = \text{rg}\, B}$.

- Soit $x \in E$. $x \in \text{Ker}(f \circ g) \iff f(g(x)) = 0_E \overset{\text{Ker} f = \{0_E\}}{\iff} g(x) = 0_E \iff x \in \text{Ker}\, g$.

Ainsi $\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker}\, g$. En utilisant le théorème du rang il vient :

$\text{rg}(f \circ g) = \dim E - \dim \text{Ker}(f \circ g) = \dim E - \dim \text{Ker}\, g = \text{rg}\, g$.

Ainsi $\text{rg}(AB) = \text{rg}(f \circ g) = \text{rg}\, g = \text{rg}\, B$.

$\underline{\text{rg}(AB) = \text{rg}\, B}$.

Exercice 13 **Matrice nilpotente .** QSP

a est un réel strictement positif. p est un élément de $\mathbb{N}^*$.

Q1. P est la partie régulière du développement limité en 0 à l'ordre p de $f : x \to \sqrt{a+x}$.

Montrer que $P^2 - a - X$ est un multiple de X^{p+1}.

Q2. M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^{p+1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Montrer qu'il existe un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = a\, I_n + M$

Q1 Notons que $\forall x \in]-a,+\infty[$, $a+x>0$. $x \mapsto a+x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par composition f est de classe C^∞ sur $]-a,+\infty[$. Cela suffit pour dire que f admet un développement limité à l'ordre p au voisinage de 0.

$\deg P \leqslant p$ donc $\deg P^2 \leqslant 2p$.

$\exists (a_0, a_1, \dots, a_{2p}) \in \mathbb{R}^{2p+1}$, $P^2 = \sum_{k=0}^{2p} a_k X^k$.

$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^p)$. Les opérations sur les développements limités permettent de dire que $(f(x))^2 \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p)$.

Alors $x + a \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p)$. Or $x+a \underset{x\to 0}{=} a + x + o(x^p)$ car $p \in \mathbb{N}^*$.

L'unicité de la partie régulière d'un développement limité montre alors que $a_0 = a$, $a_1 = 1$ et $\forall k \in [\![2,p]\!]$, $a_k = 0$.

Donc $P^2 - a - X = \sum_{k=0}^{2p} a_k X^k - a - X = \underbrace{a_0}_{a} + \underbrace{a_1}_{1} X + \sum_{k=2}^{p} \underbrace{a_k}_{=0} X^k + \sum_{k=p+1}^{2p} a_k X^k - a - X$

Ainsi $P^2 - a - X = \sum_{k=p+1}^{2p} a_k X^k = X^{p+1} \sum_{k=p+1}^{2p} a_k X^{k-(p+1)}$. $P^2 - a - X$ est un multiple de X^{p+1}.

Q2 $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$, $P^2 - a - X = Q\, X^{p+1}$.

Alors $P^2(M) - a I_n - M = Q(M) M^{p+1} = Q(M)\, 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Donc $(P(M))^2 = P^2(M) = a I_n + M$. Posons $A = P(M)$.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A^2 = a I_n + M$. $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^2 = a I_n + M$.

Exercice 14 Matrices inversibles. QSP

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $n \neq p$. Montrer que AB et BA ne sont pas simultanément inversibles.

Posons $E = \mathbb{K}^p$ et $E' = \mathbb{K}^n$. Soit $\hat{\mathcal{B}}$ (resp. $\hat{\mathcal{B}}'$) la base canonique de $E = \mathbb{K}^p$ (resp. $E' = \mathbb{K}^n$).

Soit f l'application linéaire de E dans E' de matrice A relativement aux bases $\hat{\mathcal{B}}$ et $\hat{\mathcal{B}}'$.

Soit g l'application linéaire de E' dans E de matrice B relativement aux bases $\hat{\mathcal{B}}'$ et $\hat{\mathcal{B}}$.

$g \circ f$ est un endomorphisme de E de matrice BA relativement à la base $\hat{\mathcal{B}}$.

$f \circ g$ est un endomorphisme de E' de matrice AB relativement à la base $\hat{\mathcal{B}}'$.

Supposons que les matrices AB et BA sont toutes les deux inversibles.

Alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des automorphismes respectivement de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}^p$ ou de E' et de E.

- $f \circ g$ est bijective. $E' = f(g(E'))$ car $f \circ g$ est surjective et $\mathrm{Ker}(f \circ g) = \{0_{E'}\}$ car $f \circ g$ est injective.

$g(E') \subset E$ donc $E' = f(g(E')) \subset f(E) \subset E'$. Alors $f(E) = E'$; <u>f est surjective.</u>

Soit $x \in \mathrm{Ker}\, g$. $g(x) = 0_E$; $f(g(x)) = 0_{E'}$; $x \in \mathrm{Ker}(f \circ g) = \{0_{E'}\}$; $x = 0_{E'}$.

Ainsi $\mathrm{Ker}\, g = \{0_{E'}\}$. <u>$g$ est injective.</u>

- De même $g \circ f$ bijective donne <u>f injective et g surjective.</u>

Alors f et g sont bijectives. f est un isomorphisme de E sur E' et g est un isomorphisme de E' sur E.

Ainsi $\dim E = \dim E'$. Donc $p = n$. Cela contredit l'hypothèse.

Par conséquent <u>AB et BA ne sont pas simultanément inversibles dans le cas où $n \neq p$.</u>

<u>Exercice..</u> Montrer que si $n = p$: AB inversible $\Leftrightarrow$ BA inversible.

Exercice 15 **Exponentielle d'une matrice.**

p appartient à $\mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et si M appartient à E, pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient de M situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de E. $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge si, pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$, la suite de terme général $[M_n]_{i,j}$ converge. En cas de convergence la limite de la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est la matrice de E, $M = \left(\lim_{n\to+\infty}[M_n]_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$; on dit encore que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers M.

On admet que si $(M_n)_{n\geqslant 0}$ et $(N_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites déléments de E qui convergent vers M et N et si T est une matrice de E, les suites $(M_n+N_n)_{n\geqslant 0}$, $(M_n N_n)_{n\geqslant 0}$, $(T M_n)_{n\geqslant 0}$ et $(M_n T)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement vers $M+N$, MN , TM et MT.

Q1. A est un élément de E. m_A est le maximum de la valeur absolue des coefficients de A.

a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \; \left|[A^k]_{i,j}\right| \leqslant p^{k-1}\, m_A^k$.

b) En déduire que la suite de terme général $S_n(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k$ converge. Nous noterons e^A sa limite.

Q2. On suppose que A et B sont deux matrices de E qui commutent.

a) Montrer que B et e^A commutent. Montrer que e^A et e^B commutent

b) Utiliser le produit de Cauchy pour montrer que $e^{A+B} = e^A\, e^B$

Q1 a) Montrons ce résultat par récurrence sur k.

$*$ $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $|[A^1]_{i,j}| = |[A]_{i,j}| \leqslant m_A = p^{1-1} m_A^1$.

La propriété est vraie pour $k=1$.

$*$ Supposons la propriété vraie pour k dans $\mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $k+1$.

Soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. $A^{k+1} = A^k \times A$.

$$|[A^{k+1}]_{i,j}| = \left|\sum_{r=1}^{p} [A^k]_{i,r}[A]_{r,j}\right| \leqslant \sum_{r=1}^{p} |[A^k]_{i,r}|\,|[A]_{r,j}| \underset{HR}{\leqslant} \sum_{r=1}^{p} p^{k-1} m_A^k \times m_A.$$

$$|[A^{k+1}]_{i,j}| \leqslant \sum_{r=1}^{p} p^{k-1} m_A^{k+1} = p \times p^{k-1} m_A^{k+1} = p^k m_A^{k+1} = p^{(k+1)-1} m_A^{k+1}.$$

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $|[A^{k+1}]_{i,j}| \leqslant p^{(k+1)-1} m_A^{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

b) Pour montrer que la suite de terme général $S_n(A)$ converge il convient de montrer que pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ la suite de terme général $[S_n(A)]_{i,j}$ converge ou que pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}[A^k]_{i,j}$ ou encore que pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]$ la série de terme général $\frac{1}{k!}[A^k]_{i,j}$ converge.

$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $\forall \ell \in \mathbb{N}^*$, $\left| \dfrac{[A^\ell]_{i,j}}{\ell!} \right| \leq \dfrac{1}{\ell!} p^{\ell-1} m_A^\ell = \dfrac{1}{p} \dfrac{(p m_A)^\ell}{\ell!}$.

De plus la série de terme général $\dfrac{1}{p}\dfrac{(pm_A)^\ell}{\ell!}$ converge. Les règles de comparaison aux séries à termes positifs montrent que, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la série de terme général $\left|\dfrac{[A^\ell]_{i,j}}{\ell!}\right|$ converge.

<u>Donc pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, la série de terme général $\dfrac{[A^\ell]_{i,j}}{\ell!}$ absolument convergente donc convergente.</u>

Ainsi <u>la suite de terme général $S_n(A)$ converge</u>. Nous notons e^A sa limite.

<u>Remarque</u> - $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$, $[e^A]_{i,j} = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{[A^\ell]_{i,j}}{\ell!}$.

(Q2) a] $\forall n \in \mathbb{N}$, $B S_n(A) = B\left(\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} B A^\ell \underset{(*)}{=} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} A^\ell B = S_n(A) B$

(*) Comme $AB=BA$ une récurrence simple donne $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $BA^\ell = A^\ell B$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $B S_n(A) = S_n(A) B$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(A) = e^A$

Les résultats admis (et très simples à retrouver) donnent alors <u>$Be^A = e^A B$</u>.

Une récurrence simple donne aussi $\forall \ell \in \mathbb{N}$, $B^\ell e^A = e^A B^\ell$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n(B) e^A = \left(\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} B^\ell\right) e^A = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}(B^\ell e^A) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!}(e^A B^\ell) = e^A \sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{\ell!} B^\ell$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n(B) e^A = e^A S_n(B)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(B) = e^B$.

Ainsi $e^B e^A = e^A e^B$. <u>e^A et e^B commutent.</u>

▲ tout ça ici. Il faut bien comprendre ce que sont les termes généraux de $e^A e^B$ et de e^{A+B}

---

b) **rappel.** Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\omega_n = \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell v_{n-\ell}$

si les séries de termes généraux u_n et v_n sont absolument convergentes alors la série de terme général ω_n est absolument convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Montrer que $e^A e^B = e^{A+B}$.

cela revient à montrer que $\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2$ $[e^A e^B]_{i,j} = [e^{A+B}]_{i,j}$

soit $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$. $[e^A e^B]_{i,j} = \sum_{r=1}^{p} [e^A]_{i,r} [e^B]_{r,j}$

▲ $[e^A e^B]_{i,j} = \sum_{r=1}^{p}\left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[A^n]_{i,r}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[B^n]_{r,j}}{n!}\right)\right]$ $(A+B)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} A^\ell B^{n-\ell}$ car $AB = BA$

▲ Notons également que $[e^{A+B}]_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[(A+B)^n]_{i,j}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} [A^\ell B^{n-\ell}]_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \sum_{r=1}^{p} [A^\ell]_{i,r} [B^{n-\ell}]_{r,j}$

soit $r \in [\![1,p]\!]$.

La question 1 permet de dire que les séries de termes généraux $\frac{[A^n]_{i,r}}{n!}$ et $\frac{[B^n]_{r,j}}{n!}$ sont absolument convergentes. Le rappel précédent montre alors que la série de terme général $\sum_{\ell=0}^{n} \frac{[A^\ell]_{i,r}}{\ell!} \frac{[B^{n-\ell}]_{r,j}}{(n-\ell)!}$ est absolument convergente

et que : $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{[A^\ell]_{i,r}}{\ell!} \frac{[B^{n-\ell}]_{r,j}}{(n-\ell)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[A^n]_{i,r}}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[B^n]_{r,j}}{n!}$.

Or $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{[A^\ell]_{i,r}}{\ell!} \frac{[B^{n-\ell}]_{r,j}}{(n-\ell)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} [A^\ell]_{i,r} [B^{n-\ell}]_{r,j}\right)$

Alors $[e^A e^B]_{i,j} = \sum_{r=1}^{p}\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[A^n]_{i,r}}{n!} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[B^n]_{r,j}}{n!}\right] = \sum_{r=1}^{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} [A^\ell]_{i,r} [B^{n-\ell}]_{r,j}\right)$

donc $[e^A e^B]_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^{p}\left(\frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} [A^\ell]_{i,r} [B^{n-\ell}]_{r,j}\right)$ (licite car toutes les séries convergent).

$[e^A e^B]_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \sum_{r=1}^{p} [A^\ell]_{i,r} [B^{n-\ell}]_{r,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} [A^\ell \times B^{n-\ell}]_{i,j}$

$[e^A e^B]_{i,j} = \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} A^\ell B^{n-\ell}\right]_{i,j} \overset{AB=BA}{=} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n\right]_{i,j} = [e^{A+B}]_{i,j}$ cqfd.

<u>$\forall (A,B) \in M_p(\mathbb{R}) \times M_p(\mathbb{R})$, $AB = BA \Rightarrow e^A e^B = e^{A+B}$.</u>

R

Exercice 16 **Rang. HEC 2001**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si r est un élément de $[\![1,n]\!]$, on note J_r la matrice diagonale dont les r premiers éléments de la diagonale valent 1 et les suivants 0.

φ est une application **non constante** de E dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (A,B) \in E^2,\ \varphi(AB) = \varphi(A)\,\varphi(B)$.

Q1. Préciser $\varphi(0_E)$ et $\varphi(J_n)$. Que dire de $\varphi(A)$ si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si A est nilpotente ?

Q2. Montrer que si A est une matrice inversible de E, $\varphi(A)$ est un réel non nul.

Q3. On se propose d'établir la réciproque du résultat précédent.

a) Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et g un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f, $g \circ f$ et $f \circ g$ ont même rang.

b) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de rang r non nul. Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soit J_r.

c) Montrer que si A est une matrice de E de rang r non nul : $\varphi(A) = 0$ si et seulement si $\varphi(J_r) = 0$.

d) Montrer que si r est un élément de $[\![1,n-1]\!]$ alors $\varphi(J_r) = 0$. Conclure.

Q1 $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \varphi(A\,0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \varphi(A)\,\varphi(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (1-\varphi(A)) \times \varphi(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = 0$.

Si $\varphi(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) \neq 0$ alors $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ 1-\varphi(A) = 0$ et ainsi φ est constante.

Donc $\underline{\varphi(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = 0}$.

Notons que $J_n = I_n$!

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A) = \varphi(AJ_n) = \varphi(A)\,\varphi(J_n)$.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (1-\varphi(J_n))\,\varphi(A) = 0$

Si $\varphi(J_n) \neq 1$: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A) = 0$ et φ est constante.

Alors $\underline{\varphi(J_n) = 1}$. (*) voir plus bas.

Q2 Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$1 = \varphi(J_n) = \varphi(AA^{-1}) = \varphi(A)\,\varphi(A^{-1})$. Nécessairement $\varphi(A) \neq 0$.

$\underline{\forall A \in GL_n(\mathbb{R}),\ \varphi(A) \neq 0}$.

Suite Q1 (*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons A nilpotente. $\exists r \in \mathbb{N}^*,\ A^r = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Alors $0 = \varphi(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \varphi(A^r) = (\varphi(A))^r$ donc $\varphi(A) = 0$.

$\underline{\text{Si } A \text{ est une matrice nilpotente de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) :\ \varphi(A) = 0.}$

Q3) a) • $g(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$; $f(g(\mathbb{R}^n)) = f(\mathbb{R}^n)$; $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im} f$; $\underline{\mathrm{rg}(f \circ g) = \mathrm{rg} f}$.

• soit $x \in \mathbb{R}^n$. $g(f(x)) = 0_{\mathbb{R}^n} \underset{\ker g = \{0_{\mathbb{R}^n}\}}{\Leftrightarrow} f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow x \in \ker f$. $\ker(g \circ f) = \ker f$.

Alors $\mathrm{rg}(g \circ f) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \ker(g \circ f) = \dim \mathbb{R}^n - \dim \ker f = \mathrm{rg} f$; $\underline{\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg} f}$.

Ainsi $\underline{\mathrm{rg} f = \mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f \circ g)}$.

b) $\underline{1^{er} \text{ cas}}$: $r = n$. Alors f est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. Comme f est un automorphisme de E,

$\mathcal{B}' = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est une base de E.

De plus $M(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = I_n = J_n = J_r$. C'est le résultat voulu donc pour $r = n$.

$\underline{2^{eme} \text{ cas}}$: $r < n$. Soit H un supplémentaire de $\ker f$.

$\dim H = \dim E - \dim \ker f = \mathrm{rg} f = r$. Notons que $\dim \ker f = n - r \geqslant 1$.

Soit $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ une base de H et $(e_{r+1}, e_{r+2}, \dots, e_n)$ une base de $\ker f$.

$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E car $E = H \oplus \ker f$.

Posons $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $e'_i = f(e_i)$. Montrons que $(e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$ est une famille libre de E.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$, tel que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e'_i = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Alors $f\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i e'_i = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Donc $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \in \ker f$. Or $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \in H$

Donc $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i \in \ker f \cap H = \{0_E\}$. $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i = 0_E$. Comme $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est libre : $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$.

Ceci achève de montrer que $(e'_1, e'_2, \dots, e'_r)$ est libre. Alors on peut compléter cette famille en une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de E.

$\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ et $\mathcal{C}=(e'_1,e'_2,\dots,e'_n)$ sont deux bases de E.

De plus $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $f(e_i)=e'_i$ et $\forall i\in[\![r+1,n]\!]$, $f(e_i)=0_E$.

Alors $M(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=J_r$.

Il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de E telles que la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soit J_r.

c) Soit A une matrice de $E=M_n(\mathbb{R})$ de rang non nul r.

Soit $\mathcal{B}'$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et f l'endomorphisme de matrice A dans $\mathcal{B}'$.

$\operatorname{rg} f=\operatorname{rg} A=r$. Il existe alors deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $M(f,\mathcal{B},\mathcal{C})=J_r$. Notons P (resp. Q) la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (resp. de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}'$). La formule de changement de base donne

$$A=M_{\mathcal{B}'}(f)=Q^{-1}M(f,\mathcal{B},\mathcal{C})P=Q^{-1}J_rP.$$

Alors $\varphi(A)=\varphi(Q^{-1})\varphi(J_r)\varphi(P)$. De plus $\varphi(Q^{-1})\neq 0$ et $\varphi(P)\neq 0$ car Q^{-1} et P sont inversibles.

Alors $\varphi(A)=0 \iff \varphi(J_r)=0$.

d) Rappelons que $\varphi(0_{M_n(\mathbb{R})})=0$ et $\varphi(J_n)=1$.

- $\forall k\in[\![2,n]\!]$, $J_k J_{k-1}=J_{k-1}$.

  $\forall k\in[\![2,n]\!]$, $\varphi(J_k)\varphi(J_{k-1})=\varphi(J_{k-1})$.

Alors $\forall k\in[\![2,n]\!]$, $\varphi(J_k)=0 \Rightarrow \varphi(J_{k-1})=0$.

Ainsi $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $\varphi(J_k)=0 \Rightarrow \varphi(J_1)=\varphi(J_2)=\dots=\varphi(J_k)=0$.

Donc si $\varphi(J_{r-1})=0$: $\forall k\in[\![1,r-1]\!]$, $\varphi(J_{r-1})=0$.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_1)=0_E$, $f(e_2)=e_1$, $f(e_3)=e_2,\dots,$ $f(e_n)=e_{n-1}$.

Il est assez facile de montrer que $f^n=0_{\mathcal{L}(E)}$

1) On montre par récurrence si $i\in[\![2,n]\!]$, $\forall k\in[\![0,i-1]\!]$, $f^k(e_i)=e_{i-k}$

2) Alors $\forall i\in[\![2,n]\!]$, $f^n(e_i)=f^{n-(i-1)}(f^{i-1}(e_i))=f^{n-i+1}(e_1)=f^{n-i}(f(e_1))=f^{n-i}(0_E)=0_E$.

$\mathrm{Im}\, f=\mathrm{Vect}(f(e_1),f(e_2),\dots,f(e_n))=\mathrm{Vect}(e_1,e_2,\dots,e_{n-1})$.

Ainsi dim $\mathrm{Im}\, f=n-1$. rg $f=n-1$. Soit A_0 la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

$A_0^n=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ donc A_0 est nilpotente et ainsi $\varphi(A_0)=0$.

Comme rg $A_0=n-1$ d'après c) $\varphi(J_{n-1})=0$.

D'après ce que nous avons vu plus haut $\forall k\in[\![1,n-1]\!]$, $\varphi(J_k)=0$.

Soit alors A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non inversible.

Si $A=0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, $\varphi(A)=0$.
Supposons $A\neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et notons r le rang de A. $r\in[\![1,n-1]\!]$

Comme $\varphi(J_r)=0$: $\varphi(A)=0$.

Donc A non inversible $\Rightarrow \varphi(A)=0$, ou $\varphi(A)\neq 0 \Rightarrow A$ est inversible.

Nous avons vu plus haut que si $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si A est inversible : $\varphi(A)\neq 0$

Conclusion : $\forall A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inversible $\Leftrightarrow \varphi(A)\neq 0$.