MATRICES 2

Exercice 1 Matrice de rang 1 et probabilités. ESCP 97

n est un élément de $\mathbb{N}^*$. X et Y sont deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ à valeurs dans $[\![1, n]\!]$.

Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si la matrice $A = (P(X = i/Y = j))$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1.

Exercice 2 Matrice $\mathbf{I_n + x\,CL}$

L est un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$et C un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Q1. $A = I_n + CL$. Montrer que A est inversible si et seulement si $LC \neq -1$.

On suppose que $LC \neq -1$. Trouver un élément x de $\mathbb{K}$ tel que : $(I_n + CL)^{-1} = I_n + xCL$

Q2. M est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Trouver une C.N.S. portant sur $LM^{-1}C$ pour que $N = M + CL$ soit inversible.

En cas d'inversibilité, exprimer N^{-1} en fonction de M^{-1}, C et L.

Exercice 3 Semblablité. QSP ESCP

A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 Trace d'une matrice. QSP

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A un élément non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et T définie sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $T(M) = M - \mathrm{tr}(M)A$ où $\mathrm{tr}(M)$ est la somme des éléments diagonaux de M.

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{tr}(A)$ pour que T soit bijective.

c) Caractériser T lorsque T n'est pas bijective.

Exercice 5 Polynômes de matrices. QSP

n et p sont deux éléments de $[\![2, +\infty[\![$. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $A^{p-1} \neq 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

On pose $E = \{P(A)\,;\, P \in \mathbb{R}[X]\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et trouver sa dimension.

Exercice 6 Polynôme d'endomorphisme

Q1. $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. On suppose $a_0 \neq 0$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme B de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $AB - 1$ soit un multiple de X^{n+1} (on pourra écrire $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et étudier un système d'équations vérifié par les réels b_0, b_1, ..., b_n).

Trouver B lorsque $A = 1 - X$ et lorsque $A = 1 - X^n$ $(n > 0)$.

Q2. E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{n+1} = 0_{\mathcal{L}(E)}$. $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que $A(f)$ est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$ (dans ce cas on indiquera le moyen de trouver l'inverse de $A(f)$).

Q3. Applications :

a) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P + P' + \cdots + P^{(n)} = X^n$$

b) Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P(X) + P'(X-1) + P''(X-2) = X^5$$

Exercice 7 **Matrices. Résolution approchée d'un système linéaire. Méthode de Gauss-Seidel.**

ESCP 2004

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'objet de cet exercice est de chercher une solution approchée de l'équation $AY = B$ où $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est une matrice colonne fixée. On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, |a_i| > n - 1$.

Q1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = 0$, on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X = 0$, en déduire que A est inversible.

(On pourra écrire le système $AX = 0$ et utiliser une ligne L_j où j est tel que $|x_j| = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\operatorname{Max}} |x_i|$).

Q2. a) Montrer que l'équation $AY = B$ admet une solution et une seule que l'on notera $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = A - M$. Montrer que $Y = -D^{-1}MY + D^{-1}B$.

b) On définit la suite de vecteurs (X_m) par : $X_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, $X_{m+1} = -D^{-1}MX_m + D^{-1}B$.

Exprimer $X_{m+1} - Y$ en fonction de D, M et $X_m - Y$.

c) On pose $X_m = \begin{pmatrix} x_1^m \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix}$ et on définit la suite (u_m) par : $\forall\, m \in \mathbb{N}^*$, $u_m = \underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\operatorname{Max}} |x_i^m - y_i|$.

Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $u_{m+1} \leqslant \dfrac{n-1}{\underset{1 \leqslant i \leqslant n}{\operatorname{Min}} |a_i|} u_m$.

d) En déduire la convergence la suite (X_m) vers Y (c'est-à-dire, la convergence de la suite (x_i^m) vers y_i pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$).

Exercice 8 **Produit matricielle**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $\forall C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ ACB = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Montrer que A est nulle ou B est nulle.

Exercice 9 **Polynômes de matrices**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que : $AB - BA = A$.

Q1. a) Exprimer de manière simple $A^kB - BA^k$ en fonction de A^k pour tout k dans $\mathbb{N}$.

b) Montrer que pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$: $P(A)B - BP(A) = AP'(A)$.

Q2. On rappelle qu'il existe un polynôme non nul Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que : $Q(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

a) Montrer que pour tout k dans $\mathbb{N}$: $A^kQ^{(k)}(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

b) En déduire qu'il existe un élément r de $\mathbb{N}$ tel que : $A^r = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Exercice 10 **Formes linéaires sur $\mathcal{M}_\mathbf{n}(\mathbb{K})$**

Q1. $A = (a_{ij})$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Calculer la trace $\mathrm{tr}(E_{pq}A)$ de $E_{pq}A$ où E_{pq} est l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à l'intersection de la $p^{\text{ème}}$ ligne et de la $q^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

b) Pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose : $f_A(M) = \mathrm{tr}(MA)$. Montrer que f_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q2. Réciproquement soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une seule telle que : $f = f_A$.

Exercice 11 **Inversibilité et inversion**

α et β sont deux réels. $n \in [\![2, +\infty[\![$. $M(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \cdots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$M(\alpha,\beta)$ est-elle inversible ? Si oui déterminer $M(\alpha,\beta)^{-1}$.

Exercice 12 **Rang**

A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A est inversible.

Montrer que B, AB et BA ont même rang.

Exercice 13 **Matrice nilpotente. QSP**

a est un réel strictement positif. p est un élément de $\mathbb{N}^*$.

Q1. P est la partie régulière du développement limité en 0 à l'ordre p de $f : x \to \sqrt{a+x}$.

Montrer que $P^2 - a - X$ est un multiple de X^{p+1}.

Q2. M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^{p+1} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

Montrer qu'il existe un élément A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^2 = a\,I_n + M$

Exercice 14 **Matrices inversibles. QSP**

$A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $n \neq p$. Montrer que AB et BA ne sont pas simultanément inversibles.

Exercice 15 **Exponentielle d'une matrice.**

p appartient à $\mathbb{N}^*$, $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et si M appartient à E, pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$, on note $[M]_{i,j}$ le coefficient de M situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Soit $(M_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de E. $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge si, pour tout (i,j) dans $[\![1,p]\!]^2$, la suite de terme général $[M_n]_{i,j}$ converge. En cas de convergence la limite de la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est la matrice de E, $M = \big(\lim\limits_{n\to+\infty}[M_n]_{i,j}\big)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$; on dit encore que la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers M.

On admet que si $(M_n)_{n\geqslant 0}$ et $(N_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites déléments de E qui convergent vers M et N et si T est une matrice de E, les suites $(M_n+N_n)_{n\geqslant 0}$, $(M_n\,N_n)_{n\geqslant 0}$, $(T\,M_n)_{n\geqslant 0}$ et $(M_n\,T)_{n\geqslant 0}$ convergent respectivement vers $M+N$, $M\,N$, $T\,M$ et $M\,T$.

Q1. A est un élément de E. m_A est le maximum de la valeur absolue des coefficients de A.

a) Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}^*, \forall (i,j)\in[\![1,p]\!]^2\ \big|[A^k]_{i,j}\big| \leqslant p^{k-1}\,m_A^k$.

b) En déduire que la suite de terme général $S_n(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\,A^k$ converge. Nous noterons e^A sa limite.

Q2. On suppose que A et B sont deux matrices de E qui commutent.

a) Montrer que B et e^A commutent. Montrer que e^A et e^B commutent

b) Utiliser le produit de Cauchy pour montrer que $e^{A+B} = e^A\,e^B$

Exercice 16 **Rang. HEC 2001**

n est un élément de $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si r est un élément de $[\![1,n]\!]$, on note J_r la matrice diagonale dont les r premiers éléments de la diagonale valent 1 et les suivants 0.

φ est une application **non constante** de E dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall (A,B)\in E^2,\ \varphi(AB) = \varphi(A)\,\varphi(B)$.

Q1. Préciser $\varphi(0_E)$ et $\varphi(J_n)$. Que dire de $\varphi(A)$ si A est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Q2. Montrer que si A est une matrice inversible de E, $\varphi(A)$ est un réel non nul.

Q3. On se propose d'établir la réciproque du résultat précédent.

a) Soient f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et g un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f, $g\circ f$ et $f\circ g$ ont même rang.

b) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ de rang r non nul. Montrer qu'il existe deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ telles que la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ soit J_r.

c) Montrer que si A est une matrice de E de rang r non nul : $\varphi(A) = 0$ si et seulement si $\varphi(J_r) = 0$.

d) Montrer que si r est un élément de $[\![1,n-1]\!]$ alors $\varphi(J_r) = 0$. Conclure.
