EDHEC 1995

PROBLEME

p et n désignent deux entiers naturels non nuls .

Partie I

On pose : $u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t}$, $v_n = \sum_{p=1}^{n} u_p$.

1a Prouver que pour tout p supérieur ou égal à 1 : $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$

1b En déduire que la suite $(v_n)_{n\in N^*}$ est croissante puis prouver qu'elle converge et que sa limite γ est élément de $[0,1]$. On note maintenant : $r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$.

2a Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 1 : $u_p = \frac{1}{p}\int_0^1 \frac{x}{p+x}dx$.

2b En déduire que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $\frac{1}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) \leq u_p \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p})$.

2c A l'aide de cette dernière inégalité , établir que : $\frac{1}{2(n+1)} \leq r_n \leq \frac{1}{2n}$

3 Déterminer un entier n tel que v_n soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près .

Partie II

Dans cette partie , k est un entier supérieur ou égal à 1 .

On pose , pour tout réel t strictement positif : $f_0(t) = \dfrac{1}{t}$ et $f_k(t) = \dfrac{1}{t(t+1)\dots(t+k)}$

1 Montrer que $f_{k-1}(t) - f_{k-1}(t+1) = k.f_k(t)$.

2 En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{n!}{k.(n+k)!}$

Partie III

On note P_k le polynôme défini par :

$P_1(t) = t$ et , pour tout k supérieur ou égal à 2 , $P_k(t) = t(1-t)(2-t)\dots(k-1-t)$.

On pose d'autre part : $a_k = \int_0^1 P_k(t)dt$.

1a Vérifier que, pour tout x positif : $\dfrac{1}{p+x} = \dfrac{1}{p+1} + \dfrac{1}{p+1} \times \dfrac{1-x}{p+x}$

1b En déduire que $u_p = \dfrac{1}{2p(p+1)} + \dfrac{1}{p(p+1)} \displaystyle\int_0^1 \frac{P_2(x)}{p+x}dx$.

2a Montrer que pour tout k entier supérieur ou égal à 1 , et pour tout réel x positif :

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{P_k(x)}{p+k} + \frac{P_{k+1}(x)}{(p+k)(p+x)}$$

2b En déduire , par récurrence sur k , que:

$$u_p = \frac{a_1}{p(p+1)} + \frac{a_2}{p(p+1)(p+2)} + \dots + \frac{a_k}{p(p+1)(p+2)\dots(p+k)} + \frac{1}{p(p+1)\dots(p+k)} \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}dx$$

2c Montrer que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 : $0 \le \displaystyle\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}dx \le \frac{a_{k+1}}{p-1}$

2d En déduire , en utilisant la partie II , que pour tout entier k supérieur ou égal à 1 et pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$r_n = \frac{a_1}{n+1} + \frac{a_2}{2(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{a_k}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} + r_{n,k}$$

avec $0 \le r_{n,k} \le \dfrac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$

2e Construire une suite $(v_{n,k})_{n\in N}$, de limite γ telle que : $0 \le \gamma - v_{n,k} \le \dfrac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$

3a Calculer a_1, a_2, a_3, a_4 .

3b Déterminer un entier n_0 tel que $v_{n_0,3}$ soit une valeur approchée de γ à 10^{-5} près .

3c Ecrire , en Turbo-Pascal , un algorithme permettant le calcul de v_{n_0} , puis de $v_{n_0,3}$.

3d Donner la valeur de γ à 10^{-5} près .

PARTIE I

PROBLEME

Q1 a) $p \in \mathbb{N}^*$. $\forall t \in [p, p+1]$, $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$. En intégrant on obtient :

$$\frac{1}{p+1} = \int_p^{p+1} \frac{dt}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{p} = \frac{1}{p}$$

donc : $-\frac{1}{p+1} \geqslant -\int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geqslant -\frac{1}{p}$; et : $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \geqslant \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geqslant 0$

Finalement : $0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \sum_{p=1}^{n+1} u_p - \sum_{p=1}^{n} u_p = u_{n+1} \geqslant 0$; $(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \leq \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1$

$(v_n)_{n \geq 1}$ est croissante et majorée par 1, $(v_n)_{n \geq 1}$ converge.

Notons γ la limite de $(v_n)_{n \geq 1}$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq 1$ donc $\gamma \in [0, 1]$.

Q2 a) $p \in \mathbb{N}^*$. $u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \underset{x = t-p}{=} \frac{1}{p} - \int_0^1 \frac{dx}{x+p} = \frac{1}{p} \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{x+p} = \frac{1}{p} \int_0^1 \underbrace{\left(1 - \frac{p}{x+p}\right)}_{\frac{x}{x+p}} dx$

donc $u_p = \frac{1}{p} \int_0^1 \frac{x}{x+p}\, dx$.

b) $\forall x \in [0, 1]$, $p \leq x + p \leq p+1$

$\forall x \in [0, 1]$, $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{x+p} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{p-1}$

$\forall x \in [0, 1]$, $\frac{x}{p+1} \leq \frac{x}{x+p} \leq \frac{x}{p-1}$. Intégrons

$$\frac{1}{p+1} \int_0^1 x\, dx \leq \int_0^1 \frac{x}{x+p}\, dx = p\, u_p \leq \frac{1}{p-1} \int_0^1 x\, dx$$

donc $\frac{1}{p} \frac{1}{p+1} \frac{1}{2} \leq u_p \leq \frac{1}{p} \frac{1}{p-1} \frac{1}{2}$

ou encore : $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right] \leq u_p \leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}\right]$.

c) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. $n+1\geqslant 2$ et $\forall p\in[\![n+1,+\infty[\![$, $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right]\leqslant u_p\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right]$

Soit $q\in\mathbb{N}$ et $q\geqslant n+1$

$$\sum_{p=n+1}^{q}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)\leqslant\sum_{p=n+1}^{q}u_p\leqslant\sum_{p=n+1}^{q}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right]\ ; \text{ donc :}$$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{q+1}\right)\leqslant\sum_{p=n+1}^{q}u_p\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)$. En faisant tendre q vers $+\infty$ il vient :

$$\frac{1}{2(n+1)}\leqslant r_n\leqslant\frac{1}{2n}.$$

(Q3) $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $r_n=\gamma-v_n$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2(n+1)}\leqslant\gamma-v_n\leqslant\frac{1}{2n}$.

v_n est une valeur approchée par défaut de γ à $\frac{1}{2n}$ près et $\frac{1}{2n}\leqslant 10^{-5}\Leftrightarrow n\geqslant 50000$

Pour $n=50\,000$, <u>v_n est une valeur approchée</u> (par défaut) de γ à 10^{-5} près.

<u>Remarques</u> 1.. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\sum_{p=1}^{n}\int_p^{p+1}\frac{dt}{t}=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\sum_{p=1}^{n}[\ln(p+1)-\ln(p)]$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-(\ln(n+1)-\ln 1)$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad v_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}-\ln(n+1).$$

2.. $v_{50\,000}\simeq 0{,}577\,115\,652\,66$

3.. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2(n+1)}\geqslant v_n-\gamma\geqslant-\frac{1}{2n}$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}\geqslant v_n+\frac{1}{2n}-\gamma\geqslant 0$

Donc $v_n+\frac{1}{2n}$ est une valeur approchée de γ à $\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n+1)}=\frac{1}{2n(n+1)}$ près par excès

Notons que : $\frac{1}{2n(n+1)}\leqslant 10^{-5}\Leftrightarrow n\geqslant 224$... belle accélération

Donc $v_{224}+\frac{1}{448}$ est une valeur approchée de γ à 10^{-5} près par excès

$v_{224}+\frac{1}{448}\simeq 0{,}577\ 223\ 938\ 80$. Notons pour finir que $v_n+\frac{1}{2(n+1)}$ est une valeur approchée par défaut de γ à $\frac{1}{2n(n+1)}$ près

PARTIE II

Q1 Pour $k=1$: $f_{k-1}(t)-f_{k-1}(t+1)=\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}=\frac{1}{t(t+1)}=f_1(t)=1\times f_k(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$.

Soit $t\in\mathbb{R}_+^*$.

Soit $k\in\mathbb{N}$ et $k\geq 2$. $f_{k-1}(t)-f_{k-1}(t+1)=\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(t+i)}-\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(t+1+i)}=\frac{1}{\prod_{i=0}^{k-1}(t+i)}-\underbrace{\frac{1}{\prod_{i=1}^{k}(t+i)}}_{i\to i-1}$

$$f_{k-1}(t)-f_{k-1}(t+1)=\frac{1}{\prod_{i=0}^{k}(t+i)}\left[t+k-t\right]=k\,f_k(t)$$

Finalement : $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R}_+^*,\quad f_{k-1}(t)-f_{k-1}(t+1)=k\,f_k(t).$

Q2 $k\in\mathbb{N}^*$. Soit $n\in\mathbb{N}$

$$\forall q\in[\![n+1,+\infty[\![,\ \sum_{p=n+1}^{q}f_k(p)=\frac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{q}k\,f_k(p)=\frac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{q}\left(f_{k-1}(p)-f_{k-1}(p+1)\right)$$

$$\forall q\in[\![n+1,+\infty[\![,\ \sum_{p=n+1}^{q}f_k(p)=\frac{1}{k}\left[f_{k-1}(n+1)-f_{k-1}(q+1)\right]$$

$$\lim_{q\to+\infty}f_{k-1}(q+1)=\lim_{q\to+\infty}\frac{1}{(q+1)(q+2)\cdots(q+1+k-1)}=0$$

Donc $\displaystyle\lim_{q\to+\infty}\sum_{p=n+1}^{q}f_k(p)=\frac{1}{k}f_{k-1}(n+1)=\frac{1}{k}\times\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+1+k-1)}=\frac{1}{k}\,\frac{n!}{1\times2\times3\times\cdots\times(n+k)}$

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la série de terme général $f_k(p)$ converge et

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}f_k(p)=\frac{n!}{k\,(n+k)!}\quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

PARTIE III

Q1 a) $p\in\mathbb{N}^*$. $\forall x\in\mathbb{R}_+$, $\frac{1}{p+x}=\frac{p+1}{(p+1)(p+x)}=\frac{p+x+1-x}{(p+1)(p+x)}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+1}\,\frac{1-x}{p+x}$.

b) $p\in\mathbb{N}^*$. $u_p=\frac{1}{p}\int_0^1\frac{x\,dx}{p+x}=\frac{1}{p}\int_0^1\frac{x}{p+1}\,dx+\frac{1}{p}\int_0^1\frac{x(1-x)}{(p+1)(p+x)}\,dx$

$u_p=\frac{1}{p}\,\frac{1}{p+1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\frac{1}{p(p+1)}\int_0^1\frac{P_2(x)}{p+x}\,dx$. $\quad u_p=\frac{1}{2p(p+1)}+\frac{1}{p(p+1)}\int_0^1\frac{P_2(x)}{p+x}\,dx$.

Q2) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{x(1-x)\cdots(k-1-x)}{p+x} = \frac{1}{p+k}\,\frac{x(1-x)\cdots(k-1-x)(p+k)}{p+x}$$

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{1}{p+k}\,\frac{x(1-x)\cdots(k-1-x)\,(p+x+k-x)}{p+x}$$

$$\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{1}{p+k}\,\frac{x(1-x)\cdots(k-1-x)\cancel{(p+x)}}{\cancel{p+x}} + \frac{1}{p+k}\,\frac{x(1-x)\cdots(k-1-x)(k-x)}{p+x}$$

$$\boxed{\frac{P_k(x)}{p+x} = \frac{P_k(x)}{p+k} + \frac{P_{k+1}(x)}{(p+k)(p+x)}}.$$

b) Montrons l'égalité par récurrence que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_p = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} + \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k)}\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx .$$

- D'après Q1 b) : $u_p = \dfrac{1}{2p(p+1)} + \dfrac{1}{p(p+1)}\displaystyle\int_0^1 \frac{P_2(x)}{p+x}\,dx$

or $a_1 = \displaystyle\int_0^1 P_1(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ donc $u_p = \dfrac{a_1}{p(p+1)} + \dfrac{1}{p(p+1)}\displaystyle\int_0^1 \frac{P_2(x)}{p+x}\,dx$; c'est la propriété pour $k=1$

- Supposons la propriété vraie pour $k-1$ ($k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$) et montrons-la pour k

L'hypothèse de récurrence donne : $u_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} + \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k-1)}\int_0^1 \frac{P_k(x)}{p+x}\,dx$

or $\displaystyle\int_0^1 \frac{P_k(x)}{p+x}\,dx \underset{\text{Q1 c)}}{=} \frac{1}{p+k}\int_0^1 P_k(x)\,dx + \frac{1}{p+k}\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx$, par conséquent

$$u_p = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} + \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k-1)}\,\frac{1}{p+k}\,a_k + \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k-1)} \times \frac{1}{p+k}\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx$$

$$u_p = \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} + \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k)}\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx$$, ceci achève la récurrence.

Finalement : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $$\boxed{u_p = \frac{a_1}{p(p+1)} + \frac{a_2}{p(p+1)(p+2)} + \cdots + \frac{a_k}{p(p+1)\cdots(p+k)} + \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k)}\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx}$$

c) Soit $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq \frac{x(1-x)(2-x)\cdots(k-1-x)}{p+x} = \frac{P_{k+1}(x)}{p+x} \leq \frac{1}{p} P_{k+1}(x) \leq \frac{1}{p-1} P_{k+1}(x)$$

Par intégration il vient : $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx \leq \frac{1}{p-1}\int_0^1 P_{k+1}(x)$

Donc $\forall p \in [\![2,+\infty[\![$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx \leq \frac{a_{k+1}}{p-1}$.

d) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $\displaystyle u_p - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} = \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k)} \int_0^1 \frac{P_{k+1}(x)}{p+x}\,dx$

Donc $\displaystyle 0 \leq u_p - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} \leq \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k)} \times \frac{a_{k+1}}{p-1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \in [\![n+2,+\infty[\![$. Sommons l'encadrement précédent pour p variant de $n+1$ à q.

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{q} u_p - \sum_{p=n+1}^{q} \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{p(p+1)\cdots(p+i)} \leq \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{(p-1)p(p+1)\cdots(p+k)}\, a_{k+1}$$

$$0 \leq \sum_{p=n+1}^{q} u_p - \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+i)} \leq a_{k+1} \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{(p-1)p(p+1)\cdots(p+k)} \qquad (H)$$

Rappelons que $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{q} u_p = r_n$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{q\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+i)} = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_i(p) = \frac{n!}{i\,(n+i)!} = \frac{1}{i}\,\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}.$$

$$\sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{(p-1)(p)(p+1)\cdots(p+k)} = \sum_{p=n}^{q-1} \frac{1}{p(p+1)\cdots(p+k+1)} = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k+1)} + \sum_{p=n+1}^{q-1} f_{k+1}(p)$$

Donc $$\lim_{q\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{(p-1)p(p+1)\cdots(p+k)} = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k+1)} + \frac{n!}{(k+1)\,(n+k+1)!} = \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k+1)} + \frac{1}{(k+1)(n+1)\cdots(n+k+1)}$$

$$\lim_{q\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{q} \frac{1}{(p-1)p(p+1)\cdots(p+k)} = \frac{k+1+n}{(k+1)\,n(n+1)(n+2)\cdots(n+k+1)} = \frac{1}{(k+1)\,n(n+1)\cdots(n+k)}$$

En faisant tendre q vers $+\infty$ dans (H) il vient :

$$0 \leq r_n - \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{1}{i(n+1)(n+2)\cdots(n+i)} \leq a_{k+1} \frac{1}{(k+1)\,n(n+1)\cdots(n+k)}.$$

Posons alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$r_{n,k} = r_n - \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{i(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}$$

Alors : $r_n = \dfrac{a_1}{n+1} + \dfrac{a_2}{2(n+1)(n+2)} + \cdots + \dfrac{a_k}{k(n+1)(n+2)\cdots(n+k)} + r_{n,k}$. avec :

$$0 \leq r_{n,k} \leq \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)}$$

e) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$: $v_{n,k} = v_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{i(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}$

$$\gamma = v_n + r_n = v_n + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{i(n+1)(n+2)\cdots(n+i)} + r_{n,k} = v_{n,k} + r_{n,k}$$

Donc $\gamma - v_{n,k} = r_{n,k}$; par conséquent :

$$0 \leq \gamma - v_{n,k} \leq \frac{a_{k+1}}{(k+1)n(n+1)\cdots(n+k)} \quad \text{avec } v_{n,k} = v_n + \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{i(n+1)(n+2)\cdots(n+i)}.$$

Q3 a) Nous avons déjà vu que $a_1 = \frac{1}{2}$.

$$a_2 = \int_0^1 P_2(t)\,dt = \int_0^1 t(1-t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$a_3 = \int_0^1 P_3(t)\,dt = \int_0^1 t(1-t)(2-t)\,dt = \int_0^1 (t^3 - 3t^2 + 2t)\,dt = \left[\frac{t^4}{4} - t^3 + t^2\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{4}.$$

$$a_4 = \int_0^1 P_4(t)\,dt = \int_0^1 (t^3 - 3t^2 + 2t)(3-t)\,dt = \int_0^1 (-t^4 + 6t^3 - 11t^2 + 6t)\,dt = \left[-\frac{t^5}{5} + \frac{3}{2}t^4 - \frac{11t^3}{3} + 3t^2\right]_0^1$$

$$a_4 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{2} - \frac{11}{3} + 3 = \frac{1}{30}[-6 + 45 - 110 + 90] = \frac{19}{30}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \; ; \; a_2 = \frac{1}{6} \; ; \; a_3 = \frac{1}{4} \; ; \; a_4 = \frac{19}{30}.$$

b) $v_{n,3} = v_n + \dfrac{a_1}{n+1} + \dfrac{a_2}{2(n+1)(n+2)} + \dfrac{a_3}{3(n+1)(n+2)(n+3)} = v_n + \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{12(n+1)(n+2)} + \dfrac{1}{12(n+1)(n+2)(n+3)}$

et $0 \leq \gamma - v_{n,3} \leq \dfrac{a_4}{4n(n+1)(n+2)(n+3)} = \dfrac{19}{120n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

$v_{n,3}$ est une valeur approchée par défaut de γ à $\dfrac{19}{120n(n+1)(n+2)(n+3)}$ près.

cette dernière suite est décroissante, converge vers 0 vaut sensiblement $1{,}3 \times 10^{-5}$ pour $n = 9$ et $9{,}2 \times 10^{-6}$ pour $n = 10$.

Donc $\underline{\underline{\gamma_{10,3} \text{ est une valeur approchée de } \gamma \text{ à } 10^{-5} \text{ près.}}}$

c) Rappelons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^{n} \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \ln(n+1)$

...