EDHEC 2004

Problème

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier naturel.

Partie 1

On note E_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe C^n sur $[0, 1]$.
En particulier, E_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$.
On note N l'ensemble des fonctions f de E_2 vérifiant de plus $f(0) = f(1) = 0$.
On considère l'application u de N dans E_0 qui, à toute fonction f de N associe sa dérivée seconde, notée f''.

1) Montrer que N est un sous-espace vectoriel de E_2.

2) Montrer que u est une application linéaire injective.

3) Soit g un élément de E_0. Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $G(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|\, g(t)\,dt$.

a. Justifier que G est élément de E_1 et montrer que :

$$\forall x\in[0, 1],\ G'(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x g(t)\,dt \ - \ \int_x^1 g(t)\,dt \right).$$

b. En déduire que G est élément de E_2 et déterminer G''.

c. Pour tout x de $[0, 1]$, on pose $H(x) = G(x) + ax + b$. Déterminer les réels a et b (sous forme d'intégrales) pour que H appartienne à N.

d. Déterminer $u(H)$ puis en déduire que u est surjective.

e. Que peut-on déduire des questions 2) et 3d) ?

4) Vérifier que, pour tout x élément de $[0,1]$:

$$(u^{-1})(g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|\, g(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,g(t)\,dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,g(t)\,dt.$$

Partie 2

On note P_n l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. Pour tout entier naturel k et pour tout réel x, on pose $e_k(x) = x^k$, avec bien sûr $e_0(x) = 1$, et on rappelle que $\mathcal{B} = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est une base de P_n.
On note N_n le sous-espace vectoriel de P_n constitué des fonctions polynomiales P de degré inférieur ou égal à n et telles que $P(0) = P(1) = 0$.
Pour tout entier naturel k et pour tout réel x on pose $f_k(x) = x^{k+1}(x-1)$.

1) Montrer que $C = (f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est une base de N_{n+2}.

On considère l'application linéaire v de N_{n+2} dans P_n qui, à toute fonction P de N_{n+2} associe sa dérivée seconde, notée P''.

2) a. Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n\}$, déterminer $v(f_k)$ en fonction de certains des vecteurs de $\mathcal{B}$, puis en déduire la matrice A de v relativement aux bases C et $\mathcal{B}$.

b. En déduire que v est un isomorphisme de N_{n+2} sur P_n.

c. Simplifier, pour tout réel x et pour tout entier naturel k, la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} f_j(x)$.

d. Justifier que le résultat de la quatrième question de la partie 1 peut s'appliquer ici, puis déterminer, en utilisant le résultat de la question 2c), la matrice A^{-1}.

e. Vérifier cette dernière, dans le cas où $n = 2$ (les calculs devront figurer sur la copie).

3) On considère l'application w qui à tout élément P de P_n associe $w(P)$, où $w(P)$ est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)\,P(x)$.

a. Montrer que w est un endomorphisme de P_n.

b. Pour tout k de $\{0, 1, \ldots, n\}$, déterminer $w(e_k)$.

c. En déduire que la matrice de w dans $\mathcal{B}$ n'est autre que la matrice A de la question 2a).

d. L'endomorphisme w est-il diagonalisable ? Est-ce un automorphisme de P_n ?

e. Dans le cas $n = 2$, déterminer les sous-espaces propres de w.

PROBLÈME

Partie 1

1) • Par définition N est un sous-ensemble de E_2.

• 0_{E_2} s'annule en 0 et 1 donc est un élément de N ; N n'est pas vide.

• Soient f et g deux éléments de N et soit λ un réel.

$f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$ donc $(\lambda f + g)(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$ et $(\lambda f + g)(1) = \lambda f(1) + g(1) = 0$.

$\lambda f + g$ est un élément de N. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{N \text{ est un sous-espace vectoriel de } E_2.}$$

2) Soient f et g deux éléments de N et soit λ un réel.

$u(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'' = \lambda f'' + g'' = \lambda u(f) + u(g)$; u est une application linéaire de N dans E_0.

Soit f un élément de $\operatorname{Ker} u$. Alors f'' est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$ donc f' est constante sur $[0, 1]$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0, 1],\ f'(x) = \alpha$; donc $\exists \beta \in \mathbb{R},\ \forall x \in [0, 1],\ f(x) = \alpha\, x + \beta$.

Comme $f(0) = f(1) = 0$, $\beta = \alpha + \beta = 0$. Ceci donne $\alpha = \beta = 0$ et $u = 0_N$.

Le noyau de u est réduit à $\{0_N\}$ donc u est injective.

$$\boxed{u \text{ est une application linéaire injective.}}$$

3) a. Montrons que G est dérivable sur $[0, 1]$. Soit x un élément de $[0, 1]$.

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x (x - t)\, g(t)\, \mathrm{d}t + \int_x^1 (t - x)\, g(t)\, \mathrm{d}t\right).$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(x \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t - \int_0^x t\, g(t)\, \mathrm{d}t + \int_x^1 t\, g(t)\, \mathrm{d}t - x \int_x^1 g(t)\, \mathrm{d}t\right).$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\left(x \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t - \int_0^x t\, g(t)\, \mathrm{d}t - \int_1^x t\, g(t)\, \mathrm{d}t + x \int_1^x g(t)\, \mathrm{d}t\right).$$

g est continue sur $[0, 1]$ donc $x \to \int_0^x g(t)\, \mathrm{d}t$ (resp. $x \to \int_1^x g(t)\, \mathrm{d}t$) est dérivable sur $[0, 1]$ car c'est la primitive de g sur $[0, 1]$ qui prend la valeur 0 en 0 (resp. 1).

$t \to t\, g(t)$ est continue sur $[0, 1]$ donc $x \to \int_0^x t\, g(t)\, \mathrm{d}t$ (resp. $x \to \int_1^x t\, g(t)\, \mathrm{d}t$) est dérivable sur $[0, 1]$ car c'est la primitive de $t \to t\, g(t)$ sur $[0, 1]$ qui prend la valeur 0 en 0 (resp. 1).

Notons que $x \to x$ est également dérivable sur $[0, 1]$. Ce qui précède permet alors de dire que G est dérivable sur $[0, 1]$ et que :

$\forall x \in [0,1],\ G'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + x\,g(x) - x\,g(x) - x\,g(x) + \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t + x\,g(x)\right).$

$\forall x \in [0,1],\ G'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ ou $\forall x \in [0,1],\ G'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right).$

Observons que G' est sur $[0,1]$ la somme de deux primitives de g. Donc G' est dérivable sur $[0,1]$ ce qui suffit très largement pour dire que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Ainsi

$$\boxed{G \text{ est élément de } E_1 \text{ et } \forall x \in [0,1],\ G'(x) = \frac{1}{2}\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right).}$$

b. Nous venons de voir que G' est dérivable sur $[0,1]$.

De plus $\forall x \in [0,1],\ G''(x) = \dfrac{1}{2}\big(g(x) + g(x)\big)$ car $\forall x \in [0,1],\ G'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$

Finalement $G'' = g$ et ainsi G'' est continue sur $[0,1]$ donc G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Résumons :

$$\boxed{G \text{ est élément de } E_2 \text{ et } G'' = g.}$$

c. G et $x \to ax+b$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ donc H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

Ainsi $H \in N \iff H(0) = H(1) = 0 \iff G(0) + b = G(1) + a + b = 0 \iff a = G(0) - G(1)$ et $b = -G(0)$.

Notons que $G(0) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t$, $G(1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ et $G(0) - G(1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (2\,t-1)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$

$$\boxed{H : x \to G(x) + ax + b \text{ appartient à } N \text{ si et seulement si } a = \frac{1}{2}\int_0^1 (2\,t-1)\,g(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } b = -\frac{1}{2}\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Remarque *Dans la suite nous supposerons que* $a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 (2\,t-1)\,g(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $b = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t$ *donc que* H *appartient à* N.

Ainsi $\forall x \in [0,1],\ H(x) = G(x) + ax + b = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|\,g(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.$

d. H appartient à N et $u(H) = H'' = G'' = g$. $\boxed{u(H) = g.}$

Nous avons donc montré que pour tout élément g de E_0, il existe un élément H de N tel que $u(H) = g$. Ainsi :

$$\boxed{u \text{ est une application surjective de } N \text{ sur } E_0.}$$

e. De 2) et 3 d) il résulte que u est une application linéaire bijective de N sur E_0.

$$\boxed{u \text{ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de } N \text{ sur } E_0.}$$

4) Soit g un élément de E_0. La question 3) nous a montré que l'antécédent de g par u dans N est la fonction H définie par $\forall x \in [0,1],\ H(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|\,g(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2}\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t - \dfrac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,g(t)\,\mathrm{d}t$. Alors

$$\boxed{\forall g \in E_0,\ \forall x \in [0,1],\ u^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|\,g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,g(t)\,\mathrm{d}t - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Partie 2

1) • $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est de toute évidence une famille d'éléments de N_{n+2}.

• Soit P un élément de P_{n+2}.

$P \in N_{n+2} \iff P(0) = P(1) = 0 \iff \exists Q \in P_n,\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = x(x-1)\,Q(x)$

$$P \in N_{n+2} \iff \exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x(x-1)\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k.$$

$$P \in N_{n+2} \iff \exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^{k+1}(x-1).$$

$$P \in N_{n+2} \iff \exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},\ P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, f_k \iff P \in \mathrm{Vect}(f_0, f_1, \ldots, f_n).$$

$(f_0, f_1 \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de N_{n+2}.

• Montrons que cette famille est libre.

Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} a_k\, f_k = 0_{N_{n+2}}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} a_k\, f_k(x) = 0$. $\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{n} a_k\, x(x-1)\, e_k(x) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1\},\ \sum_{k=0}^{n} a_k\ e_k(x) = 0$.

$\sum_{k=0}^{n} a_k\, e_k$ est alors un élément de P_n admettant une infinité de zéros, c'est donc la fonction nulle de P_n.

Alors $\sum_{k=0}^{n} a_k\, e_k = 0_{P_n}$. Comme $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ est libre : $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Ceci achève de montrer que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{C} = (f_0, f_1, \ldots, f_n) \text{ est une base de } N_{n+2}.}$$

2) a. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = x^{k+2} - x^{k+1}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f_k''(x) = (k+2)(k+1)\, x^k - (k+1)k\, x^{k-1}$.

Ainsi $v(f_k) = (k+2)(k+1)\, e_k - (k+1)k\, e_{k-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_0(x) = x^2 - x$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f_0''(x) = 2$. Ainsi $v(f_0) = 2\, e_0$.

$$\boxed{v(f_0) = 2\, e_0 \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ v(f_k) = (k+2)(k+1)\, e_k - (k+1)k\, e_{k-1}.}$$

La matrice de v relativement aux bases $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} d_0 & -d_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -d_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$

avec $\forall k \in [\![0, n]\!],\ d_k = (k+2)(k+1)$.

b. La matrice A est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ sans zéro sur sa diagonale ; elle est donc inversible.

Ainsi v est une application linéaire bijective de N_{n+2} sur P_n.

$$\boxed{v \text{ est un isomorphisme de } N_{n+2} \text{ sur } P_n.}$$

c. Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$ et x un réel.

$$\sum_{j=0}^{k} f_j(x) = \sum_{j=0}^{k} (x^{j+2} - x^{j+1}) = \sum_{j=0}^{k} x^{j+2} - \sum_{j=0}^{k} x^{j+1} = \sum_{j=1}^{k+1} x^{j+1} - \sum_{j=0}^{k} x^{j+1} = x^{k+2} - x.$$

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{j=0}^{k} f_j(x) = x^{k+2} - x.}$$

d. Le résultat de la question P1 2 c) peut s'appliquer pour déterminer v^{-1} dans la mesure où :

- la restriction d'un élément de N_{n+2} (resp. P_n) à $[0,1]$ est un élément de N (resp E_0) ;
- deux fonctions polynômiales réelles qui coïncident sur $[0,1]$ sont égales.

Déterminons A^{-1} en utilisant le résultat de la question 2) c. Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{j=0}^{k} f_j(x) = x^{k+2} - x \text{ donc } \forall x \in \mathbb{R}, \left(\sum_{j=0}^{k} f_j\right)''(x) = (k+2)(k+1)\, x^k.$$

Par conséquent : $v\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{k} f_j\right) = (k+2)(k+1)\, e_k$.

Ceci qui donne encore $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} f_j = v^{-1}\big((k+2)(k+1)\, e_k\big) = (k+2)(k+1)\, v^{-1}(e_k)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![0,n]\!],\ v^{-1}(e_k) = \frac{1}{(k+2)(k+1)} \sum_{j=0}^{k} f_j} \qquad \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\times1} & \frac{1}{3\times2} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} \\ 0 & \frac{1}{3\times2} & \cdots & \frac{1}{(n+2)(n+1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{(n+2)(n+1)} \end{pmatrix}}$$

Remarque Un calcul assez simple donne :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall x \in [0,1],\ \frac{1}{2}\int_0^1 |x-t|\, t^k\, dt - \frac{1}{2}\int_0^1 t\, t^k\, dt - \frac{x}{2}\int_0^1 (1-2t)\, t^k\, dt = \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(x^{k+2} - x\right).$$

Il permet de retouver le résultat précédent en utilisant la question 4 de la partie 1.

e. Supposons $n=2$. Alors $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$AX = Y \iff \begin{cases} 2x - 2y = x' \\ 6y - 6z = y' \\ 12z = z' \end{cases} \iff \begin{cases} z = \frac{1}{12} z' \\ y = \frac{1}{6} y' + z = \frac{1}{6} y' + \frac{1}{12} z' \\ x = \frac{1}{2} x' + y = \frac{1}{2} x' + \frac{1}{6} y' + \frac{1}{12} z' \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2} x' + \frac{1}{6} y' + \frac{1}{12} z' \\ y = \frac{1}{6} y' + \frac{1}{12} z' \\ z = \frac{1}{12} z' \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Alors } A \text{ est invresible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}.}$$

Remarque *On pouvait se contenter de vérifier que :* $A \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = I_3 \ldots$

3) a. Soit φ l'application qui à tout élément P de P_n associe l'application $\varphi(P)$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(P)(x) = (x^2 - x)\, P(x)$.

φ est clairement une application linéaire de P_n dans N_{n+2}. Remarquons alors que $w = v \circ \varphi$.

w est alors la composée d'une application linéaire de P_n dans N_{n+2} avec une application linéaire de N_{n+2} dans P_n. Alors w est une application linéaire de P_n dans P_n.

$$\boxed{w \text{ est un endomorphisme de } P_n.}$$

b. Soit k un élément de $[\![1, n]\!]$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 - x)\, e_k(x) = x^{k+2} - x^{k+1}$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ w(e_k)(x) = (k+2)(k+1)\, x^k - (k+1)k\, x^{k-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ w(e_k)(x) = \Big((k+2)(k+1)\, e_k - (k+1)k\, e_{k-1}\Big)(x)$. Alors $w(e_k) = (k+2)(k+1)e_k - (k+1)k\, e_{k-1}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 - x)\, e_0(x) = x^2 - x$ donc $\forall x \in \mathbb{R},\ w(e_0)(x) = 2 = 2\, e_0(x)$. $w(e_0) = 2\, e_0$.

$$\boxed{w(e_0) = 2\, e_0 \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!],\ w(e_k) = (k+2)(k+1)e_k - (k+1)k\, e_{k-1}.}$$

c. $\boxed{\text{La matrice de } w \text{ dans } \mathcal{B} \text{ est clairement } A\,!}$

d. La matrice A de w dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure , donc l'ensemble des valeurs propres de w et de A est l'ensemble des éléments de la diagonale de A.

Alors $\mathrm{Sp}\, w = \mathrm{Sp}\, A = \{(k+2)(k+1) ; k \in [\![0, n]\!]\}$. Posons $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \lambda_k = (k+2)(k+1)$.

$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+3)(k+2) - (k+2)(k+1) = 2\,(k+2) > 0$. Alors $\lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.

w est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension $n+1$ qui admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes donc

$$\boxed{w \text{ est diagonalisable.}}$$

Nous avons déjà vu que A est inversible ainsi w est un endomorphisme bijectif de P_n.

$$\boxed{w \text{ est un automorphisme de } P_n.}$$

e. $n = 2$. La matrice de w dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de w et de A sont : 2, 6 et 12. Les trois sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

Notons que $w(e_0) = 2\,e_0$ donc :

$$\boxed{\text{le sous-espace propre de } w \text{ associé à la valeur propre 2 est la droite vectorielle engendrée par } e_0.}$$

Soit $P = x\,e_0 + y\,e_1 + z\,e_2$ un élément de P_2.

$$w(P) = 6\,P \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y = 6\,x \\ 6y - 6z = 6\,y \\ 12z = 6\,z \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2\,x \\ z = 0 \end{cases} \quad ;$$

$$\boxed{\text{le sous-espace propre de } w \text{ associé à la valeur propre 6 est la droite vectorielle engendrée par } e_0 - 2\,e_1.}$$

$$w(P) = 12\,P \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - 2y = 12\,x \\ 6y - 6z = 12\,y \\ 12z = 12\,z \end{cases} \iff \begin{cases} y = -5\,x \\ z = -y = 5\,x \end{cases} \quad ;$$

$$\boxed{\text{le sous-espace propre de } w \text{ associé à la valeur propre 12 est la droite vectorielle engendrée par } e_0 - 5\,e_1 + 5\,e_2.}$$
