LYON 1997

PREMIER PROBLÈME

Q1 f, g et h sont des éléments de E et λ est un réel.

* $\phi(f,\lambda g+h)=\int_0^1 f(t)(\lambda g+h)(t)dt=\lambda\int_0^1 f(t)g(t)+\int_0^1 f(t)h(t)dt=\lambda\phi(f,g)+\phi(f,h)$.

* $\phi(g,f)=\int_0^1 g(t)f(t)dt=\int_0^1 f(t)g(t)dt=\phi(f,g)$.

* $\phi(f,f)=\int_0^1 f^2(t)dt\geq 0$.

Supposons $\phi(f,f)=0$; $\int_0^1 f^2(t)dt=0$. f^2 est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$ donc f^2 est nulle sur $[0,1]$. f est nulle sur $[0,1]$.

Résumons.
$\forall(f,g,h)\in E^3$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\phi(f,\lambda g+h)=\lambda\phi(f,g)+\phi(f,h)$.
$\forall(f,g)\in E^2$, $\phi(g,f)=\phi(f,g)$
$\forall f\in E$, $\phi(f,f)\geq 0$
$\forall f\in E$, $\phi(f,f)=0\Rightarrow f=0_E$

ϕ est un produit scalaire sur E.

Q2. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. $\phi(e_i,e_j)=\int_0^1 t^{i-1}t^{j-1}dt=\int_0^1 t^{i+j-2}dt\overset{i+j-1\neq 0}{=}\left[\frac{t^{i+j-1}}{i+j-1}\right]_0^1=\frac{1}{i+j-1}$.

Remarque.. H_n est la matrice de la restriction à E_n du produit scalaire ϕ dans la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$.

Q3 a) $H_2=\begin{pmatrix}1&1/2\\1/2&1/3\end{pmatrix}$. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de

$$H_2-\lambda I_2=\begin{pmatrix}1-\lambda&1/2\\1/2&1/3-\lambda\end{pmatrix};\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\begin{pmatrix}1/2&1/3-\lambda\\1-\lambda&1/2\end{pmatrix}};\underset{L_1\leftarrow 2L_1}{\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}-2\lambda\\1-\lambda&1/2\end{pmatrix}};\underset{L_2\leftarrow L_2+(\lambda-1)L_1}{\begin{pmatrix}1&\frac{2}{3}-2\lambda\\0&\frac{1}{2}+(\lambda-1)(\frac{2}{3}-2\lambda)\end{pmatrix}}.$$

Par conséquent $H_2-\lambda I_2$ est non inversible si et seulement si :

$$0=\frac{1}{2}+(\lambda-1)\left(\frac{2}{3}-2\lambda\right)=-2\lambda^2+\frac{8}{3}\lambda+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=-2\left(\lambda^2-\frac{4}{3}\lambda+\frac{1}{12}\right)=-2\left[\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}+\frac{1}{12}\right]$$

donc λ est valeur propre de H_2 si et seulement si $0=-2\left[\left(\lambda-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{13}{36}\right]=-2\left(\lambda-\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(\lambda-\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)$

Par conséquent H_2 admet deux valeurs propres distinctes : $\frac{4+\sqrt{13}}{6}$ et $\frac{4-\sqrt{13}}{6}$.

b) oui ! Voir plus haut ou plus bas !

c) 0 n'est pas valeur propre de H_2 donc H_2 est inversible.

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux éléments de $M_{2,1}(\mathbb{R})$ tels que : $H_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = x' \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = y' \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y = 2x' \\ \frac{3}{2}x + y = 3y' \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x = 2x' - 3y' \\ y = 2x' - 2x = 2x' - 8x' + 12y' = -6x' + 12y' \end{cases}$

$\begin{cases} x = 4x' - 6y' \\ y = -6x' + 12y' \end{cases}$; par conséquent $H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$.

Q4 H_n est diagonalisable car H_n est une matrice symétrique et à coefficients réels.

Q5 **a)** Posons $B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = H_n B$. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1} b_j$.

$${}^tA H_n B = \sum_{i=1}^{n} a_i b'_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1} b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \phi(e_i, e_j)$$

${}^tA H_n B = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j e_j\right) = \phi(P, Q)$ ce qui n'est pas une grosse surprise !

${}^tA H_n B = \phi(P, Q)$.

b) Soit λ une valeur propre (nécessairement réelle) de H_n.

$\exists U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que : $U \neq 0$ et $H_n U = \lambda U$. Posons $Q = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$.

Comme U n'est pas nul Q ne l'est pas davantage et donc :

$0 < \phi(Q, Q) = {}^tU H_n U = {}^tU(\lambda U) = \lambda\, {}^tUU = \lambda \sum_{i=1}^{n} u_i^2$.

$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$ et $\lambda \sum_{i=1}^{n} u_i^2 > 0$ donc $\lambda > 0$.

Les valeurs propres de H_n sont toutes (réelles et) strictement positives.

Remarque.. Ce qui n'est pas un scoop puisque H_n est la matrice d'un produit scalaire ... donc H_n est symétrique et définie positive !

Exercice.. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E_n et $H_n \in M_n(\mathbb{R})$.

Pour u et v éléments de E_n de matrices X et Y dans $\mathcal{B}$ on pose $\varphi(u,v) = {}^tX H_n Y$

Notons que φ est un produit scalaire sur E_n ssi H_n est symétrique et définie positive ; c'est à dire ssi H_n est symétrique et ses valeurs propres sont strictement positives.

c) H_n est inversible car 0 n'est pas valeur propre de H_n.

Q6 a) Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$$\varphi(e_i, P_0 - f) = \varphi(e_i, P_0) - \varphi(e_i, f) = \varphi\Big(e_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\Big) - \beta_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi(e_i, e_j) - \beta_i$$

$A_0 = H_n^{-1} B$ donc $B = H_n A_0$; par conséquent $\beta_i = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j)\, \alpha_j$

Finalement : $\varphi(e_i, P_0 - f) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_i, e_j)\alpha_j - \beta_i = 0$.

$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \varphi(e_i, P_0 - f) = 0.$

b) Soit $Q \in E_n$. $\exists (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $Q = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$

$$\varphi(Q, P_0 - f) = \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i e_i, P_0 - f\Big) = \sum_{i=1}^{n} b_i\, \varphi(e_i, P_0 - f) = 0 \text{ d'après a).}$$

$\forall Q \in E_n, \ \varphi(Q, P_0 - f) = 0.$

Remarque.- Ne le cachons pas, $\begin{cases} 1°.. \ P_0 \in E_n \\ 2°.. \ \forall Q \in E_n, \ \varphi(Q, P_0 - f) = 0 \end{cases}$, donc P_0 n'est autre que la projection orthogonale de f sur E_n. c), d) et e) sont alors clairs non ? Mais réinventons la roue...

c) Soit P un élément de E_n. $P - P_0 \in E_n$ donc d'après b) $P - P_0$ et $P_0 - f$ sont orthogonaux. Pythagore donne alors :

$$\|P - f\|^2 = \|P - P_0 + P_0 - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2$$

$\forall P \in E_n, \ \|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2.$

$\forall P \in E_n, \ \|P - f\|^2 - \|P_0 - f\|^2 = \|P - P_0\|^2$

donc $\forall P \in E_n - \{P_0\}, \quad \|P - f\|^2 > \|P_0 - f\|^2.$

Par conséquent $\forall P \in E_n - \{P_0\}$, $d(P) > d(P_0)$.
Donc <u>d admet un minimum et ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.</u>

c) $P_0 - f$ et P_0 sont orthogonaux car $P_0 \in E_n$.
Pythagore donne : $\|f\|^2 = \|P_0 - f + P_0\|^2 = \|P_0 - f\|^2 + \|P_0\|^2$.

Finalement : <u>$\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.</u>

Q6) Posons $\beta_0 = \phi(e_0, f)$ et $\beta_1 = \phi(e_1, f)$.
d'après ce qui précède $P_0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ avec $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = H_2^{-1}\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$ et
$d(P_0) = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.
Ne reste plus qu'à calculer $\beta_0, \beta_1, \alpha_0, \alpha_1$, $\|f\|^2$ et $\|P_0\|^2$.

$$\beta_1 = \phi(e_0, f) = \int_0^1 1\times|t-1/3|\,dt = -\int_0^{1/3}(t-1/3)\,dt + \int_{1/3}^1 (t-1/3)\,dt = -\left[\frac{(t-1/3)^2}{2}\right]_0^{1/3} + \left[\frac{(t-1/3)^2}{2}\right]_{1/3}^1$$

$$\beta_1 = \frac{(0-1/3)^2}{2} + \frac{(1-1/3)^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}\right) = \frac{5}{18}.$$

A méditer !! $x \mapsto |x|^3$ est une primitive de $x \mapsto x|x|$!

$$\beta_2 = \phi(e_1, f) = \int_0^1 t\,|t-1/3|\,dt = \int_0^1 (t-1/3)|t-1/3|\,dt + \frac{1}{3}\int_0^1 |t-1/3|\,dt = \left[\frac{|t-1/3|^3}{3}\right]_0^1 + \frac{1}{3}\times\frac{5}{18}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left|\frac{-1}{3}\right|^3\right] + \frac{5}{54} = \frac{1}{3}\left[\frac{7}{27}\right] + \frac{5}{54} = \frac{1}{162}\left[14+15\right] = \frac{29}{162}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{18}\\ \frac{29}{162}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{10}{9} - \frac{29}{27}\\ -\frac{5}{3} + \frac{58}{27}\end{pmatrix} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix}1\\ 13\end{pmatrix}$$

<u>$P_0 = \frac{1}{27} + \frac{13}{27}X$.</u> $\quad \|P_0\|^2 = \int_0^1 \left(\frac{1}{27} + \frac{13}{27}t\right)^2 dt = \frac{27}{13}\left[\frac{\left(\frac{1}{27}+\frac{13}{27}t\right)^3}{3}\right]_0^1$

$$\|P_0\|^2 = \frac{9}{13}\left[\left(\frac{14}{27}\right)^3 - \left(\frac{1}{27}\right)^3\right] = \frac{9}{13}\,\frac{2743}{19683} = \frac{211}{2187}.$$

$$\|f\|^2 = \int_0^1 |t-1/3|^2\,dt = \frac{1}{3}\left[(t-1/3)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) = \frac{9}{81} = \frac{1}{9}.$$

$d(P_0) = \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{211}{2187}} = \sqrt{\frac{32}{2187}} = \sqrt{\frac{2^5}{3^7}} = \frac{4}{27}\sqrt{3/2}$. <u>$d(P_0) = \frac{4}{27}\sqrt{\frac{3}{2}}$.</u>

<u>$d(P_0) \simeq 0,181\ 443\ 68$</u>

LYON 1998 Parties I et II

PARTIE I : Etude d'un produit scalaire.

Dans toute la suite nous nous autoriserons à noter E_k l'espace vectoriel des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à k, et ceci pour tout k dans $\mathbb{N}$...

Q1 **a)** Montrons tout d'abord que si Q est un élément de E : $\lim_{t\to+\infty}\left(Q(t)\,e^{-t}\right)=0$. Si $Q=O_E$ ceci est une évidence. Supposons dès lors que Q est un élément non nul de E et considérons son terme de plus haut degré a_pX^p. Nous avons alors $Q(t)\,e^{-t}\sim a_p\,t^p\,e^{-t}$ au voisinage de $+\infty$ et par croissance comparée $\lim_{t\to+\infty}\left(a_p\,t^p\,e^{-t}\right)=0$; le résultat s'en déduit sans problème.

Ainsi $\boxed{\text{si } Q \text{ est un élément de } E : \lim_{t\to+\infty}\left(Q(t)\;e^{-t}\right)=0}$.

Soit P un élément de E. Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. $u : t\to P(t)\,e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et donc localement intégrable sur cet intervalle.

Comme X^2P est un élément de E, d'après ce qui précède $\lim_{t\to+\infty}\left(t^2\,P(t)\,e^{-t}\right)=0$ ou $\lim_{t\to+\infty}\left(t^2\,u(t)\right)=0$.

Il existe donc un réel A, strictement positif, tel que pour tout élément t de $[A,+\infty[$: $|t^2\,u(t)|\leqslant 1$.

On a alors pour tout élément t de $[A,+\infty[$: $0\leqslant|u(t)|\leqslant\dfrac{1}{t^2}$.

La convergence de $\int_A^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent la convergence de $\int_A^{+\infty}|u(t)|\,\mathrm{d}t$ donc l'absolue convergence de $\int_A^{+\infty}u(t)\,\mathrm{d}t$ et ainsi sa convergence.

Comme $\int_0^A u(t)\,\mathrm{d}t$ existe : $\int_0^{+\infty}u(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout élément } P \text{ de } E,\ \displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ converge}}$.

b) Cela peut se faire de manière immédiate en utilisant la partie du programme concernant la fonction Γ. En effet pour tout élément k de $\mathbb{N}$: $I_{k+1}=\Gamma(k+2)=(k+1)\Gamma(k+1)=(k+1)I_k$ et $I_k=\Gamma(k+1)=(k+1-1)!=k!$.
Suivons la logique du texte et retrouvons ces deux résultats. La question précédente montre que I_k existe pour tout élément k de $\mathbb{N}$ ($t\to t^k$ appartient à E).
Fixons k dans $\mathbb{N}$. Soit A un élément de $]0,+\infty[$. Une intégration par parties élémentaire donne :

$$\int_0^A t^{k+1}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t=[t^{k+1}(-e^{-t})]_0^A-\int_0^A(k+1)t^k(-e^{-t})\,\mathrm{d}t=-A^{k+1}\,e^{-A}+(k+1)\int_0^A t^k\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\lim_{A\to+\infty}\left(A^{k+1}\,e^{-A}\right)=0$ il vient en faisant tendre A vers $+\infty$: $I_{k+1}=(k+1)I_k$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$: $\dfrac{I_{k+1}}{(k+1)!}=\dfrac{(k+1)I_k}{(k+1)!}=\dfrac{I_k}{k!}$. La suite $(I_k/k!)_{k\geqslant 0}$ est donc constante.

De plus son premier terme est $I_0=\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t}\,\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{-t}\,\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}(-e^{-A}+1)=1$. Par conséquent, pour tout élément k de $\mathbb{N}$: $\dfrac{I_k}{k!}=1$ ou $I_k=k!$.

$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N},\ I_{k+1}=(k+1)I_k \text{ et } I_k=k!}$.

$\boxed{\textbf{Q2}}$ **a)** Remarquons pour commencer que si P et Q sont deux éléments de E_n leur produit est un élément de E ; ainsi, d'après la première question, $\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge. $<.,.>$ est bien alors une application de $E_n \times E_n$ dans $\mathbb{R}$. Montrons qu'il sagit d'un produit scalaire.

- Si P et Q sont deux éléments de E_n, $<P,Q>= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} Q(t)\,P(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = <Q,P>$.
  <u>$<.,.>$ est symétrique</u>.

- Soient P, Q, R trois éléments de E_n et λ un réel.

  $<\lambda P+Q,R>= \displaystyle\int_0^{+\infty} (\lambda P+Q)(t)\,R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} P(t)\,R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} Q(t)\,R(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ (car toutes les intégrales convergent).

  Donc $<\lambda P+Q,R>= \lambda <P,R> + <Q,R>$. <u>$<.,.>$ est linéaire à gauche</u>.

- Soit P un élément de E_n. $<P,P>= \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $t \to \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}$ est une fonction positive ou nulle sur $[0+\infty[$ donc $<P,P>$ est positif ou nul.

  Supposons que $<P,P>=0$. Fixons un élément B dans $\mathbb{R}^{+*}$. $0 \leqslant \displaystyle\int_0^B \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$

  Ceci donne alors : $\displaystyle\int_0^B \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$. Ainsi la fonction $t \to \big(P(t)\big)^2\,e^{-t}$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,B]$. Cette fonction est donc nulle sur $[0,B]$ et nécessairement : $\forall t \in [0,B],\ P(t)=0$. La fonction polynôme P a alors une infinité de racines ; c'est donc la fonction nulle. Ainsi $<P,P>=0$ donne $P=0_{E_n}$.
  <u>$<.,.>$ est définie positive</u>.

Les trois points précédents suffisent pour dire que $\boxed{<.,.> \text{ est un produit scalaire sur } E_n}$.

<u>Remarques</u> 1. Dans la suite nous noterons $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

2. En posant : $\forall (P,Q) \in E^2,\ \varphi(P,Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ on obtient un produit scalaire sur E.

3. On peut, de la même manière, définir encore un produit scalaire sur l'espace vectoriel (à démontrer...) des fonctions numériques f, continues sur $[0,+\infty[$ et telles que $\int_0^{+\infty} \big(f(t)\big)^2\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Soient i et j deux éléments de $[\![0,n]\!]$. $<X^i,X^j>= \displaystyle\int_0^{+\infty} t^i\,t^j\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{i+j}\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = I_{i+j} = (i+j)!$.

$\boxed{\text{Si } i \text{ et } j \text{ sont deux éléments de } [\![0,n]\!] : <X^i,X^j>=(i+j)!}$.

$\boxed{\textbf{Q3}}$ **a)** • La seule fonction polynôme unitaire de degré 0 est X^0, il est donc raisonnable de poser $Q_0 = X^0 = 1$.

• Soit P une fonction polynôme unitaire de degré 1. Il existe un réel a tel que : $P = X + a$.
$<P,Q_0>=<X+a,1>=<X^1,X^0>+a<X^0,X^0>=(1+0)!+a(0+0)!=1+a$. P est donc orthogonale à Q_0 si et seulement si $a=-1$. En posant : $Q_1 = X-1$, nous obtenons une fonction polynôme unitaire de degré 1 orthogonale à Q_0.

• Soit P une fonction polynôme unitaire de degré 2. Il existe deux réels b et c tels que : $P = X^2 + bQ_1 + cQ_0$ ((Q_0,Q_1) est clairement une base de E_1). Cherchons alors b et c pour que P soit orthogonale à Q_0 et Q_1. Rappelons que Q_0 et Q_1 sont othogonaux !
$<P,Q_0>=<X^2,Q_0>+b<Q_1,Q_0>+c<Q_0,Q_0>=<X^2,X^0>+c<X^0,X^0>=(2+0)!+c(0+0)!=2+c$.

$<P,Q_1>=<X^2,Q_1>+b<Q_1,Q_1>+c<Q_0,Q_1>=<X^2,X-1>+b<X-1,X-1>$.
$<P,Q_1>=<X^2,X>-<X^2,X^0>+b(<X,X>-2<X,X^0>+<X^0,X^0>)$.
$<P,Q_1>=(2+1)!-(2+0)!+b\big((1+1)!-2(1+0)!+(0+0)!\big)=4+b$.

Ainsi $P = X^2 + bQ_1 + cQ_0$ est orthogonale à Q_0 et Q_1 si et seulement si $c = -2$ et $b = -4$. Il est alors grand temps de poser $Q_2 = X^2 - 4Q_1 - 2Q_0 = X^2 - 4(X-1) - 2 = X^2 - 4X + 2$. Q_2 est une fonction polynôme unitaire de degré 2 orthogonale à Q_0 et Q_1.

$\boxed{(Q_0, Q_1, Q_2) = (1, X-1, X^2-4X+2) \text{ est une famille orthogonale de fonctions polynômes telle que pour tout } k \text{ dans } [\![0,2]\!],\ Q_k \text{ soit unitaire et de degré } k.}$

Remarques 1. Notons que non seulement nous avons trouvé une famille (Q_0, Q_1, Q_2) solution du problème posé mais nous avons également montré l'unicité de cette famille.
2. D'ailleurs il n'est pas difficile de montrer qu'il existe une famille orthogonale $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ de fonctions polynômes, et une seule, telle que pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, Q_k soit unitaire et de degré k (polynômes de Laguerre).
$Q_0 = 1$ et pour tout k dans $[\![1,n]\!]$, Q_k est l'unique fonction polynôme unitaire appartenant à la droite vectorielle constituée par l'orthogonale de E_{k-1} dans E_k. Nous en reparlerons dans la partie II...
A titre d'exercice on pourra montrer que, pour tout élément k de $[\![0,n]\!]$,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ Q_k(x) = (-1)^k\, e^x\, \frac{d^k}{dx^k}\big(x^k\, e^{-x}\big) \quad \text{et} \quad \|Q_k\| = k!$$

Voir, à ce sujet, les parties I et II du problème d'Edhec 98.

b) Soit u et v deux réels. Posons dès maintenant $H(u,v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t$.

$H(u,v) = \|X^2 + uX + v\|^2 = \|X^2 - 4X + 2 + (u+4)(X-1) + u + v + 2\|^2 = \|Q_2 + (u+4)Q_1 + (u+v+2)Q_0\|^2$.
$H(u,v) = \|Q_2\|^2 + \|(u+4)Q_1 + (u+v+2)Q_0\|^2$ car Q_2 et $(u+4)Q_1 + (u+v+2)Q_0$ sont orthogonaux.
$H(u,v) = \|Q_2\|^2 + \|(u+4)Q_1\|^2 + \|(u+v+2)Q_0\|^2$ car $(u+4)Q_1$ et $(u+v+2)Q_0$ sont orthogonaux.
$H(u,v) = \|Q_2\|^2 + (u+4)^2\|Q_1\|^2 + (u+v+2)^2\|Q_0\|^2$.

$$\boxed{\text{On a donc } \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ \int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = \|Q_2\|^2 + (u+4)^2\|Q_1\|^2 + (u+v+2)^2\|Q_0\|^2.}$$

c) Notons que si u et v sont deux réels : $(u+4)^2$ et $(u+v+2)^2$ sont simultanément nuls si et seulement si $u = -4$ et $v = 2$.
Ainsi : $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ H(u,v) = \|Q_2\|^2 + (u+4)^2\|Q_1\|^2 + (u+v+2)^2\|Q_0\|^2 \geqslant \|Q_2\|^2 = H(-4,2)$. Donc $\|Q_2\|^2$ est le minimum de H. Rappelons que $Q_2 = X^2 - 4Q_1 - 2Q_0$.
$\|Q_2\|^2 = < Q_2, Q_2 > = < Q_2, X^2 - 4Q_1 - 2Q_0 > = < Q_2, X^2 > -4 < Q_2, Q_1 > -2 < Q_2, Q_0 > = < Q_2, X^2 >$.
$\|Q_2\|^2 = < X^2 - 4X + 2, X^2 > = < X^2, X^2 > -4 < X, X^2 > +2 < 1, X^2 > = 4! - 4 \times 3! + 2 \times 2! = 4$.

$\boxed{H \text{ admet un minimum qui vaut 4 et qui est atteint en } (-4,2).}$

Remarques 1. Notons que H atteint son minimum en le seul point $(-4,2)$.
2. Le cours permet facilement de traiter le problème précédent sans utiliser les indications du texte. En effet :

$$\underset{(u,v)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} H(u,v) = \underset{(u,v)\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \|X^2 + uX + v\|^2 = \underset{(u',v')\in\mathbb{R}^2}{\text{Min}} \|X^2 - (u'X + v')\|^2 = \underset{P\in E_1}{\text{Min}} \|X^2 - P\|^2$$

Tout est clair, $\underset{P\in E_1}{\text{Min}} \|X^2 - P\|^2$ existe et vaut $\|X^2 - S\|^2$ où S est la projection orthogonale de X^2 sur E_1. On montre alors sans problème que $S = 4Q_1 + 2Q_0 = 4X - 2$ et que $\|X^2 - S\|^2 = 4$.
3. $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2,\ H(u,v) = 2u^2 + v^2 + 2uv + 12u + 4v + 24$. On peut donc encore retrouver le résultat de c) en utilisant le cours sur les fonctions numériques de plusieurs variables.
4. Retenons encore que le c) nous apprend que Q_2 est la fonction polynôme unitaire de degré 2 de norme (au carré) minimum. En fait ceci caractérise Q_2.
Plus généralement si nous revenons à la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n)$ évoquée dans la remarque 2 de Q3 a), Q_k est La fonction polynôme unitaire de degré k de norme minimum.

PARTIE II : Construction d'une base orthogonale.

Q1 Soit P un élément de E_n. P'' (resp. P') est une fonction polynôme de degré au plus $n-2$ (resp. au plus $n-1$) donc XP'' (resp. $(1-X)P'$) est une fonction polynôme de degré au plus $n-1$ (resp. au plus n). Ainsi XP'' et $(1-X)P'$ sont deux éléments de E_n et donc $XP''+(1-X)P'$ aussi.
Φ est une application de E_n dans E_n.
Soient P et Q deux éléments de E_n et λ un réel.
$\Phi(\lambda P+Q) = X(\lambda P+Q)''(X)+(1-X)(\lambda P+Q)'(X) = X\big(\lambda P''(X)+Q''(X)\big)+(1-X)\big(\lambda P'(X)+Q'(X)\big)$.
$\Phi(\lambda P+Q) = \lambda\big(XP''(X)+(1-X)P'(X)\big)+\big(XQ''(X)+(1-X)Q'(X)\big) = \lambda\Phi(P)+\Phi(Q)$.
Φ est linéaire. $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } E_n}$.

$\Phi(X^0)=0_{E_n}$. $\Phi(X^1)=1-X$. Si k est un élément de $[\![2,n]\!]$, $\Phi(X^k) = Xk(k-1)X^{k-2}+(1-X)kX^{k-1} = k^2X^{k-1}-kX^k$.

Ceci donne encore : $\boxed{\Phi(X^0)=O_{E_n} \text{ et pour tout élément } k \text{ de } [\![1,n]\!] : \Phi(X^k)=k^2X^{k-1}-kX^k}$.

Par conséquent la matrice de Φ dans la base canonique $(1,X,X^2,\dots,X^n)$ de E_n est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

Q2 Commençons par remarquer que le premier point de a) est franchement inutile car la matrice M est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres, ainsi que celles de Φ, sont les éléments de sa diagonale c'est à dire : 0, -1, -2, ..., -n. Mais pourquoi faire simple ...
a) Fixons k dans $[\![0,n]\!]$ et notons Φ_k l'endomorphisme $\Phi+kId_{E_n}$ de E_n.
Si $k=0$, la famille $\big(\Phi(X^j)+kX^j\big)_{0\leqslant j\leqslant k} = \big(\Phi_k(X^j)\big)_{0\leqslant j\leqslant k}$ est réduite au vecteur nul donc elle est liée.
Supposons alors k non nul.

Si $j=0$: $\Phi_k(X^j)=kX^0$ est un élément de E_{k-1}.

Si j est dans $[\![1,k-1]\!]$, $\Phi_k(X^j)=\Phi(X^j)+kX^j = j^2X^{j-1}+(k-j)X^j$ est encore un élément de E_{k-1}.

Si $j=k$, $\Phi_k(X^j)=k^2X^{k-1}$ est toujours un élément de E_{k-1}.

Ainsi $\big(\Phi(X^j)+kX^j\big)_{0\leqslant j\leqslant k} = \big(\Phi_k(X^j)\big)_{0\leqslant j\leqslant k}$ est une famille de $k+1$ éléments de E_{k-1} qui est un espace vectoriel de dimension k. Cette famille est donc nécessairement liée.

$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } [\![0,n]\!],\ \big(\Phi(X^j)+kX^j\big)_{0\leqslant j\leqslant k} \text{ est une famille liée de } E_n}$.

Reprenons k dans $[\![0,n]\!]$. $\big(\Phi(X^j)+kX^j\big)_{0\leqslant j\leqslant k} = \big(\Phi_k(X^j)\big)_{0\leqslant j\leqslant k}$ est une famille liée donc on peut trouver $k+1$ réels a_0, a_1, ..., a_k, non tous nuls, tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_j\Phi_k(X^j)=0_{E_n}$ ou tel que $\displaystyle\Phi_k\Big(\sum_{j=0}^{k} a_jX^j\Big)=0_{E_n}$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} a_jX^j$ est un élément non nul du noyau de $\Phi_k=\Phi-(-k)Id_{E_n}$. Ce noyau n'étant pas réduit au vecteur nul, $-k$ est valeur propre de Φ.

$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } [\![0,n]\!],\ -k \text{ est valeur propre de } \Phi}$.

b) Φ admet au moins $n+1$ valeurs propres distinctes -1, -2, ...,$-n$. Comme c'est un endomorphisme de l'espace vectoriel E_n qui est de dimension $n+1$, Φ admet exactement $n+1$ valeurs propres distinctes et donc $\boxed{\Phi \text{ est diagonalisable}}$.

c) D'après ce qui précède, Φ admet $n+1$ sous-espaces propres distincts dont la somme des dimensions est $n+1$. Dans ces conditions chacun de ces sous-espaces propres ne peut donc être que de dimension 1.

Soit k un élément de $[\![0,n]\!]$ et S_k un vecteur propre de Φ associé à la valeur propre $-k$. S_k engendre le sous-espace propre $SEP(\Phi,-k)$ correspondant. Montrons alors l'existence et l'unicité de P_k et pour cela commençons par noter $\alpha_p X^p$ le terme de plus haut degré de S_k.
Unicité Supposons que P_k existe. P_k est un élément de $SEP(\Phi,-k) = \mathrm{Vect}(S_k)$, donc il existe un réel λ tel que $P_k = \lambda S_k$.
Comme P_k est unitaire : $1 = \lambda\alpha_p$ et ainsi $P_k = (1/\alpha_p)S_k$. D'où l'unicité de P_k.
Existence. Posons $P_k = (1/\alpha_p)S_k$. P_k est un élément de $\mathrm{Vect}(S_k) = SEP(\Phi,-k)$ donc vérifie $\Phi(P_k) = -kP_k$; de plus son terme de plus haut degré est : $(1/\alpha_p)\alpha_p X^p = X^p$. Ainsi P_k est unitaire.

$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ dans } [\![0,n]\!], \text{ il existe une unique fonction polynôme unitaire } P_k \text{ vérifiant } \Phi(P_k) = -kP_k}$.

d) Soit k dans $[\![0,n]\!]$. Notons p le degré de P_k. Le coefficient de X^p dans $-kP_k$ est $-k$. Le coefficient de X^p dans $\Phi(P_k) = XP_k'' + (1-X)P_k'$ est $-p$ (c'est en fait le coefficient de X^p dans $-XP_k'$). Comme $\Phi(P_k) = -kP_k$ on obtient : $-p = -k$ et donc $p = k$!

$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ dans } [\![0,n]\!],\ P_k \text{ est de degré } k}$.

e) $Q_0 = 1$ est une fonction polynôme unitaire et $\Phi(Q_0) = 0 = -(0)Q_0$ donc $\boxed{Q_0 = P_0}$.

Q_1 est une fonction polynôme unitaire et $\Phi(Q_1) = \Phi(X-1) = X0_{E_n} + (1-X)\times 1 = (-1)Q_1$ donc $\boxed{Q_1 = P_1}$.

$Q_2 = X^2 - 4X + 2$ est une fonction polynôme unitaire et $\Phi(Q_2) = \Phi(X^2 - 4X + 2) = X \times 2 + (1-X)(2X-4) = -2X^2 + 8X - 4 = -2Q_2$ donc $\boxed{Q_2 = P_2}$.

Q3 a) Soient P et Q deux éléments de E_n.
Posons pour tout élément t de $[0,+\infty[$, $v(t) = t\,P'(t)\,e^{-t}$. v est dérivable et, pour tout élément t de $[0,+\infty[$: $v'(t) = \big[P'(t) + tP''(t) + tP'(t)(-1)\big]e^{-t} = \big[tP''(t) + (1-t)P'(t)\big]e^{-t} = \Phi(P)(t)\,e^{-t}$. v' étant continue sur $[0,+\infty[$, v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. Q est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. Dès lors fixons A dans $\mathbb{R}^{+*}$ et intégrons par parties.

$$\int_0^A \Phi(P)(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^A v'(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t = [v(t)\,Q(t)]_0^A - \int_0^A v(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t.$$

$$\int_0^A \Phi(P)(t)\,Q(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = v(A)\,Q(A) - v(0)\,Q(0) - \int_0^A tP'(t)\,Q'(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Remarquons alors que :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Phi(P)(t)\,Q(t)\ e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $< \Phi(P), Q >$;
- $v(0)Q(0) = 0$ car $v(0) = 0$;
- $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \big(v(t)Q(t)\big) = \lim_{A\to+\infty} \big(tP'(t)Q(t)\ e^{-t}\big) = 0$ car XP'Q est un élément de E.

En faisant tendre A vers $+\infty$ l'intégration par parties précédente fournit :

$$\boxed{< \Phi(P), Q > = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\ e^{-t}\,\mathrm{d}t}.$$

b) Soit P et Q deux éléments de E_n.

$$< \Phi(P), Q > = -\int_0^{+\infty} tP'(t)\,Q'(t)\ e^{-t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)\ e^{-t}\,\mathrm{d}t = < \Phi(Q), P > = < P, \Phi(Q) >.$$

$\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme symétrique de } E_n}$.

c) Φ est un endomorphisme symétrique de E_n donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux. Ainsi $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une famille orthogonale de E_n ; les vecteurs de cette famille orthogonale étant non nuls, cette famille est libre.

$(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre orthogonale de $n+1$ éléments de E_n qui est de dimension $n+1$, par conséquent $\boxed{(P_0, P_1, \dots, P_n) \text{ est une base orthogonale de } E_n}$.

Remarques 1. $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ base de E_n pouvait s'obtenir directement en remarquant que $E_n = \bigoplus_{k=0}^{n} \text{Vect}(P_k)$ (Q2).

2. Notons que, pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, $(P_0, P_1, \dots, P_k)$ est une base orthogonale de E_k et même que $P_k = Q_k$.
3. On peut montrer que, pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, P_k admet k racines réelles distinctes appartenant toutes à l'intervalle $]0, +\infty[$ (voir encore à ce sujet la partie III du problème d'Edhec 98). Cette remarque permettra aux lecteurs plus exigeants de généraliser les résultats de la partie III.

LYON 2000 Premier problème

Partie I

1. a. S est une matrice symétrique et réelle donc $\boxed{S \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

b. Faisons simple. ${}^tPP = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

$${}^tPP = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3+3 & \sqrt{3}-\sqrt{3} & \sqrt{6}-\sqrt{6} \\ \sqrt{3}-\sqrt{3} & 1+1+4 & \sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2} \\ \sqrt{6}-\sqrt{6} & \sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2} & 2+2+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = I_3.$$

Ainsi P est inversible et $P^{-1} = {}^tP$ (P est une matrice orthogonale).

• Supposons que D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$.

$D = I_3 D I_3 = {}^tPPD{}^tPP = {}^tPSP$. D'où l'unicité de D.

• Dès lors posons $D = {}^tPSP$ et vérifions que D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = PD{}^tP$.

$$D = {}^tPSP = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & 3 & 9\sqrt{2} \\ -3\sqrt{3} & 3 & 9\sqrt{2} \\ 0 & -6 & 9\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 54 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. $D = {}^tPSP$ est bien une matrice diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

De plus $PD{}^tP = P{}^tPSP{}^tP = I_3 S I_3 = S$.

$$\boxed{\text{Il existe une matrice diagonale } D \text{ de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ et une seule telle que } S = PD{}^tP.\ D = {}^tPSP = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}}.$$

<u>Remarque</u> *On peut encore obtenir le résultat demandé en posant* $X_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $X_3 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ *et en vérifiant que* (X_1, X_2, X_3) *est une base orthonormale de* $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *constituée de vecteurs propres de* S *respectivement associés aux valeurs propres* 3, 3 *et* 9.

2. a. $M - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(M-2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$(M-2I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$. $\boxed{(M-2I_3)^3 = I_3}$.

b. Raisonnons par l'absurde. Supposons que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Remarquons alors que $H = (X-2)^3 - 1 = (X-3)(X^2-3X+3)$ est un polynôme annulateur de M ayant pour unique racine réelle 3. Alors 3 est la seule valeur propre réelle possible de M. Mais M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, donc 3 est la seule valeur propre réelle de M et le sous-espace propre associé est égal à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. La dimension de ce sous-espace propre est donc 3 et aussi $3 - \text{rg}(M - 3I_3)$ non ? Ainsi $\text{rg}(M - 3I_3) = 0$; $M - 3I_3$ est alors la matrice nulle. M vaut donc $3I_3$ ce qui contrarie légèrement la définition initiale de M.

$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

<u>Remarque</u> *Le sous-espace propre de M associé à la valeur propre 3 est la droite vectorielle engendrée par* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Notons que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ (il est aisé de vérifier qu'elle possède trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}$: 3, $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$).

c. $^tMM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. $\boxed{^tMM = S}$.

<u>Remarque</u> *Dès lors il n'est pas très surprenant que S soit symétrique et à valeurs propres positives ou nulles...*

Partie II

1. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$ de matrices X et Y dans la base $\mathcal{B}$.

$g(y)$ et $f(x)$ ont pour matrices ^tAY et AX dans la base $\mathcal{B}$.

Alors $< g(y), x >= {}^t({}^tAY)X = {}^tY^t({}^tA)X = {}^tYAX =< y, f(x) >$.

$\boxed{\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ < g(y), x >=< y, f(x) >}$.

Reprenons un élément x dans $\mathbb{R}^n$ et appliquons ce qui précède avec $y = f(x)$.

Il vient : $< g(f(x)), x >=< f(x), f(x) >= \|f(x)\|^2$. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n,\ < (g \circ f)(x), x >= \|f(x)\|^2}$.

2. $g \circ f$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ comme composée de deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Appliquons deux fois Q1.

$< (g \circ f)(x), y >=< g(f(x)), y >=< f(x), f(y) >$.

$< x, (g \circ f)(y) >=< g(f(y)), x >=< f(y), f(x) >=< f(x), f(y) >$.

Ainsi : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ < (g \circ f)(x), y >=< x, (g \circ f)(y) >$.

$\boxed{g \circ f \text{ est un endomorphisme symétrique de } \mathbb{R}^n}$.

<u>Remarque</u> *On peut aussi obtenir ce résultat par des considérations matricielles. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de $g \circ f$ dans cette base est ^tAA donc est une matrice symétrique car $^t({}^tAA) = {}^tA^t({}^tA) = {}^tAA$. Ceci suffit pour conclure.*

3. $g \circ f$ étant un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, $\boxed{g \circ f \text{ est diagonalisable}}$.

Soit λ une valeur propre de $g \circ f$. Il existe un élément non nul x de $\mathbb{R}^n$ tel que $(g \circ f)(x) = \lambda x$.

$\|f(x)\|^2 =< (g \circ f)(x), x >=< \lambda x, x >= \lambda < x, x >= \lambda\ \|x\|^2$. Alors $\lambda = \dfrac{\|f(x)\|^2}{\|x\|^2}$ puisque x n'est pas nul.

λ est positif ou nul comme quotient d'un réel positif ou nul par un réel strictement positif.

$\boxed{\text{Les valeurs propres de } g \circ f \text{ sont positives ou nulles}}$.

4. $g \circ f$ étant un endomorphisme symétrique de l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, le cours permet de dire que : $\boxed{\text{il existe une base orthonormale } \mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n) \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ constituée de vecteurs propres de } g \circ f}$.

5. Soit λ_1, λ_2, ..., λ_n les valeurs propres de $g \circ f$ associées aux vecteurs propres e'_1, e'_2, ..., e'_n.

Q est la matrice de passage de la base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ à la base orthonormale $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ donc $Q^{-1} = {}^tQ$. Notons encore que ${}^tAA$ est la matrice de $g \circ f$ dans $\mathcal{B}$.

Alors la matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}'$ est : $Q^{-1\,t}AAQ = {}^tQ^tAAQ$.

Mais, pour tout élément i de $\in [\![1, n]\!]$, $(g \circ f)(e'_i) = \lambda_i \; e'_i$.

Alors ${}^tQ^tAAQ$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Il est grand temps de traiter le problème... dans toute sa plénitude.

Soient μ_1, μ_2, ..., μ_n n réels positifs ou nuls et Δ la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$.

${}^tAA = Q(\Delta^2)^tQ \Longleftrightarrow {}^tQ^tAAQ = {}^tQQ(\Delta^2)^tQQ \Longleftrightarrow {}^tQ^tAAQ = \Delta^2$.

$${}^tAA = Q(\Delta^2)^tQ \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} {\mu_1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {\mu_2}^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & {\mu_n}^2 \end{pmatrix}$$

${}^tAA = Q(\Delta^2)^tQ \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i^2 = \lambda_i$.

λ_1, ..., λ_n, μ_1, ..., μ_n étant des réels positifs ou nuls on a : ${}^tAA = Q(\Delta^2)^tQ \Longleftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Il existe un **<u>unique</u>** n-uplet $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ de réels positifs ou nuls tel que la matrice diagonale

$\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tAA = Q(\Delta^2)^tQ$. $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i = \sqrt{\lambda_i}}$.

6. Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. $<(g\circ f)(e'_i),e'_j>=<f(e'_i),f(e'_j)>$.

Donc $<f(e'_i),f(e'_j)>=<(g\circ f)(e'_i),e'_j>=<\lambda_i\ e'_i,e'_j>=\lambda_i\ <e'_i,e'_j>$.

Rappelons que $(e'_1,e'_2,\ldots,e'_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Donc si i n'est pas égal à j : $<f(e'_i),f(e'_j)>=\lambda_i\ <e'_i,e'_j>=0$.

De plus : $\|f(e'_j)\|^2=<f(e'_j),f(e'_j)>=\lambda_j\ <e'_j,e'_j>=\lambda_j\ \|e'_j\|^2=\lambda_j$. Alors $\|f(e'_j)\|=\sqrt{\lambda_j}=\mu_j$.

$\boxed{\Big(f(e'_1),f(e'_2),\ldots,f(e'_n)\Big) \text{ est une famille orthogonale et pour tout élément } j \text{ de } [\![1,n]\!],\ \|f(e'_j)\|=\mu_j}$.

7. a. A est inversible donc ${}^tA$ également. ${}^tAA$ est alors inversible comme produit de deux matrices inversibles. Par conséquent les valeurs propres de ${}^tAA$ donc de $g\circ f$ sont non nulles. Ainsi λ_1, ..., λ_n sont des réels non nuls.

Comme $\mu_i=\sqrt{\lambda_i}$, pour tout élément i de $[\![1,n]\!]$, $\boxed{\text{les nombres réels } \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_n \text{ sont tous non nuls}}$.

7. b. Soient i et j deux éléments de $[\![1,n]\!]$. $<\dfrac{1}{\mu_i}\ f(e'_i),\dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j)>=\dfrac{1}{\mu_i\mu_j}<f(e'_i),f(e'_j)>$.

Si i et j sont distincts, $<\dfrac{1}{\mu_i}\ f(e'_i),\dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j)>=0$ car la famille $\Big(f(e'_1),f(e'_2),\ldots,f(e'_n)\Big)$ est orthogonale.

$<\dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j),\dfrac{1}{\mu_j}\ f(e'_j)>=\dfrac{1}{\mu_j^2}<f(e'_j),f(e'_j)>=\dfrac{1}{\mu_j^2}\ \|f(e'_j)\|^2=1$ car $\|f(e'_j)\|=\mu_j$.

Finalement la famille $\Big(\dfrac{1}{\mu_1}\ f(e'_1),\dfrac{1}{\mu_2}\ f(e'_2),\ldots,\dfrac{1}{\mu_n}\ f(e'_n)\Big)$ est orthonormale. Elle est donc libre.

$\Big(\dfrac{1}{\mu_1}\ f(e'_1),\dfrac{1}{\mu_2}\ f(e'_2),\ldots,\dfrac{1}{\mu_n}\ f(e'_n)\Big)$ est une famille libre de n éléments de $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension n.
C'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi $\boxed{\mathcal{C}=\Big(\dfrac{1}{\mu_1}\ f(e'_1),\dfrac{1}{\mu_2}\ f(e'_2),\ldots,\dfrac{1}{\mu_n}\ f(e'_n)\Big) \text{ est une base orthonormale de } \mathbb{R}^n}$.

7. c. C'est très simple pourvu que l'on sache son cours. Un petit rappel s'impose.

E est un espace vectoriel de dimension non nulle p. $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_1$ sont deux bases de E et Pas$(\mathcal{U},\mathcal{U}_1)$ est la matrice de passage de $\mathcal{U}$ à $\mathcal{U}_1$.
E' est un espace vectoriel de dimension non nulle n. $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}'_1$ sont deux bases de E' et Pas$(\mathcal{U}',\mathcal{U}'_1)$ est la matrice de passage de $\mathcal{U}'$ à $\mathcal{U}'_1$.
f est une application linéaire de E dans E'. Alors :

$$\boxed{M(f,\mathcal{U}_1,\mathcal{U}'_1)=(\mathrm{Pas}(\mathcal{U}',\mathcal{U}'_1))^{-1}\ M(f,\mathcal{U},\mathcal{U}')\ \mathrm{Pas}(\mathcal{U},\mathcal{U}_1)}.$$

Appliquons. $A=M(f,\mathcal{B},\mathcal{B})=(\mathrm{Pas}(\mathcal{C},\mathcal{B}))^{-1}\ M(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})\ \mathrm{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B})$.

Or $(\mathrm{Pas}(\mathcal{C},\mathcal{B}))^{-1}=\mathrm{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{C})=R$ et $\mathrm{Pas}(\mathcal{B}',\mathcal{B})=(\mathrm{Pas}(\mathcal{B},\mathcal{B}'))^{-1}=Q^{-1}={}^tQ$. Alors $A=R\ M(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})\ {}^tQ$.

Cherchons : $M(f,\mathcal{B}',\mathcal{C})$. Observons que : $\forall i\in[\![1,n]\!],\ f(e'_i)=\mu_i\Big(\dfrac{1}{\mu_i}\ f(e'_i)\Big)$.

Ainsi la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}$ est : $\Delta=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n\end{pmatrix}$.

Finalement $\boxed{A=R\Delta{}^tQ}$.

Partie III

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice ${}^tM$ dans $\mathcal{B}$. La matrice de $g \circ f$ dans $\mathcal{B}$ est ${}^tMM = S$.

Posons $e_1' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\big(\sqrt{3}\, e_1 - \sqrt{3}\, e_2\big)$, $e_2' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\big(e_1 + e_2 - 2e_3\big)$ et $e_3' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\big(\sqrt{2}\, e_1 + \sqrt{2}\, e_2 + \sqrt{2}\, e_3\big)$.

Des calculs élémentaires montrent que (e_1', e_2', e_3') est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^3$. C'est donc une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. Alors $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Notons que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ n'est autre que la matrice P. Or nous avons vu que :

$S = PD^tP = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

Alors $D = P^{-1}SP$ n'est autre que la matrice de $g \circ f$ dans la base $\mathcal{B}'$ et ainsi $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de $g \circ f$ respectivement associés aux valeurs propres 3, 3 et 9.

Nous pouvons alors appliquer la partie II car la matrice M est inversible (3 est sa seule valeur propre réelle).

Ainsi $M = R\Delta^tQ$ où Q est matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ (donc $Q = P$), $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et R est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C} = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, f(e_1'), \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, f(e_2'), \dfrac{1}{3}\, f(e_3')\Big)$.

Déterminons R.

$e_1' = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\big(\sqrt{3}\, e_1 - \sqrt{3}\, e_2\big)$ et $M \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{3}/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{6} \\ -\sqrt{3}/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{6} \\ -2\sqrt{3}/\sqrt{6} \\ \sqrt{3}/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Donc $f(e_1') = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\,(e_1 - 2e_2 + e_3)$ et $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, f(e_1') = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,(e_1 - 2e_2 + e_3)$

On obtient de la même manière $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\, f(e_2') = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_3)$ et $\dfrac{1}{3}\, f(e_3') = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(e_1 + e_2 + e_3)$.

Ainsi $\mathcal{C} = \Big(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\,(e_1 - 2e_2 + e_3), \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1 - e_3), \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,(e_1 + e_2 + e_3)\Big)$ et $R = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Finalement

$$\boxed{M = R\Delta^tQ \text{ avec } R = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix},\ \Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}.$$

LYON 2002 Second problème

PARTIE I : Etude d'un exemple

1. Soit λ un réel et soient P, Q et R trois éléments de E.

• $\varphi(\lambda P + Q, R) = \big(\lambda P + Q\big)(0)\, R(0) + \big(\lambda P + Q\big)(1)\, R(1) + \big(\lambda P + Q\big)(-1)\, R(-1)$.

$\varphi(\lambda P + Q, R) = \big(\lambda P(0) + Q(0)\big)\, R(0) + \big(\lambda P(1) + Q(1)\big)\, R(1) + \big(\lambda P(-1) + Q(-1)\big)\, R(-1)$.

$\varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda\big[P(0)\, R(0) + P(1)\, R(1) + P(-1)\, R(-1)\big] + \big[Q(0)\, R(0) + Q(1)\, R(1) + Q(-1)\, R(-1)\big]$.

$\varphi(\lambda P + Q, R) = \lambda\, \varphi(P, R) + \varphi(Q, R)$.

• $\varphi(P, Q) = P(0)\, Q(0) + P(1)\, Q(1) + P(-1)\, Q(-1) = Q(0)\, P(0) + Q(1)\, P(1) + Q(-1)\, P(-1) = \varphi(Q, P)$.

• $\varphi(P, P) = \big(P(0)\big)^2 + \big(P(1)\big)^2 + \big(P(-1)\big)^2 \geqslant 0$.

• Supposons que $\varphi(P, P) = 0$. Alors $\big(P(0)\big)^2 + \big(P(1)\big)^2 + \big(P(-1)\big)^2 = 0$.

Donc $\big(P(0)\big)^2 = \big(P(1)\big)^2 = \big(P(-1)\big)^2 = 0$.

Ce qui donne $P(0) = P(1) = P(-1) = 0$. P est alors un polynôme de degré au plus 2 qui a trois zéros distincts. P est donc le polynôme nul.

Ainsi $\varphi(P, P) = 0 \Rightarrow P = 0_E$.

Les quatre points précédents indiquent alors que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2. a. Soit P un élément de $E = \mathbb{R}_2[X]$. La formule de Taylor donne $P(X) = P(0) + P'(0)\, X + \dfrac{P''(0)}{2} X^2$.

Alors $P(1) - P(-1) = P(0) + P'(0) + \dfrac{P''(0)}{2} - \left(P(0) - P'(0) + \dfrac{P''(0)}{2}\right) = 2\, P'(0)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall P \in E,\ 2\, P'(0) - P(1) + P(-1) = 0.}$$

2. b. Soit P un élément de E. $U(P) = 2\, P'(0)\, X^2 - \big(P(1) + P(-1)\big)\, X$.

$U(P)(0) = 0$, $U(P)(1) = 2\, P'(0) - \big(P(1) + P(-1)\big) = -2\, P(-1)$ (d'après a.) et $U(P)(-1) = 2\, P'(0) + \big(P(1) + P(-1)\big) = 2\, P(1)$ (toujours d'après a.). Alors :

$\varphi\big(u(P), P\big) = u(P)(0)\, P(0) + u(P)(1)\, P(1) + u(P)(-1)\, P(-1) = 0 \times P(0) - 2\, P(-1)\, P(1) + 2\, P(1)\, P(-1) = 0$.

$$\boxed{\forall P \in E,\ \varphi\big(u(P), P\big) = 0.\ u \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } E.}$$

3. a. $P_1 = \dfrac{1}{2}\,\big(X^2 + X\big)$. $P_1' = X + \dfrac{1}{2}\cdot$ $P_1'(0) = \dfrac{1}{2}$, $P_1(1) = 1$ et $P_1(-1) = 0$.

Alors $u(P_1) = 2\, P_1'(0)\, X^2 - \big(P_1(1) + P_1(-1)\big)\, X = X^2 - X$. Notons que $\big(X^2 - X\big)' = 2X - 1$

Plus rapidement : $u^2(P_1) = u(X^2 - X) = 2(-1)\, X^2 - (0 + 2)\, X = -2(X^2 + X) = -4\, P_1$.

Alors P_1 est un élément non nul de E tel que $u^2(P_1) = -4\, P_1$.

$$\boxed{P_1 \text{ est un vecteur propre de } u^2 \text{ associé à la valeur propre } -4.}$$

u est antisymétrique donc P_1 et $u(P_1)$ sont orthogonaux. P_1 et $\dfrac{1}{2}\,u(P_1)$ le sont également. Ainsi (P_1, P_2) est une famille orthogonale de E.

De plus $\|P_1\|^2 = \varphi(P_1, P_1) = \big(P_1(0)\big)^2 + \big(P_1(1)\big)^2 + \big(P_1(-1)\big)^2 = 0^2 + 1^2 + 0^2$. $\|P_1\| = 1$.

$u(P_1) = X^2 - X$. $P_2 = \frac{1}{2}\,X^2 - \frac{1}{2}\,X$. $P_2(0) = 0$, $P_2(1) = 0$ et $P_2(-1) = 1$.

Alors $\|P_2\|^2 = \big(P_2(0)\big)^2 + \big(P_2(1)\big)^2 + \big(P_2(-1)\big)^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$. $\|P_2\| = 1$.

$\varphi(P_1, P_2) = 0$, $\|P_1\| = 1$ et $\|P_1\| = 1$. Finalement :

$$\boxed{(P_1, P_2) \text{ est une famille orthonormale de } E.}$$

b. Soit P un élément de E.

$P \in \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow 2\,P'(0)\,X^2 - \big(P(1) + P(-1)\big)\,X = 0_E \Longleftrightarrow 2\,P'(0) = P(1) + P(-1) = 0$.

Rappelons que $2P'(0) = P(1) - P(-1)$

$P \in \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow P(1) - P(-1) = P(1) + P(-1) = 0 \Longleftrightarrow P(1) = P(-1) = 0 \Longleftrightarrow (X-1)(X-1)$ divise P.

Comme P est un polynôme de degré au plus 2 : $P \in \operatorname{Ker} u \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ P = \lambda\,(X^2 - 1)$.

$$\boxed{\operatorname{Ker} u \text{ est la droite vectorielle de } E \text{ engendrée par } X^2 - 1.}$$

Posons $P_3 = X^2 - 1$. $\|P_3\|^2 = \big(P_3(0)\big)^2 + \big(P_3(1)\big)^2 + \big(P_3(-1)\big)^2 = (-1)^2 + 0^2 + 0^2$. $\|P_3\| = 1$.

$\varphi(P_1, P_3) = P_1(0)\,P_3(0) + P_1(1)\,P_3(1) + P_1(-1)\,P_3(-1) = 0 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 0$

$\varphi(P_2, P_3) = P_2(0)\,P_3(0) + P_2(1)\,P_3(1) + P_2(-1)\,P_3(-1) = 0 \times (-1) + 0 \times 0 + 1 \times 0 = 0$.

Alors (P_1, P_2, P_3) est une famille orthonormale, donc libre, de trois éléments de E qui est un espace vectoriel de dimension 3. Ainsi (P_1, P_2, P_3) est une base orthonormale de E.

Rappelons que $u(P_1) = 2P_2$, $u(P_2) = \frac{1}{2}\,u^2(P_1) = \frac{1}{2}\,(-4\,P_1) = -2P_1$ et $u(P_3) = 0_E$. Finalement :

$\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_2) = \big(\frac{1}{2}\,(X^2 + X), \frac{1}{2}\,(X^2 - X), X^2 - 1\big)$ est une base orthonormale de E et la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

PARTIE II : Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

1. Soient x et y deux éléments de E.

$< u(x+y), x+y > = < u(x) + u(y), x+y > = < u(x), x > + < u(x), y > + < u(y), x > + < u(y), y >$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x+y), x+y > = < u(x), x > + < u(x), y > + < u(y), x > + < u(y), y >.}$$

• Supposons que u est antisymétrique. $\forall t \in E,\ < u(t), t > = 0$.

Alors $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x+y), x+y > = 0$.

Donc $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), x > + < u(x), y > + < u(y), x > + < u(y), y > = 0$.

Ce qui donne encore : $\forall (x,y) \in E^2,\ 0 + < u(x), y > + < u(y), x > + 0 = 0$.

Finalement $\forall (x,y) \in E^2,\ < u(x), y > = - < x, u(y) >$.

• Réciproquement supposons que : $\forall (x,y)\in E^2,\ < u(x), y >= - < x, u(y) >$ et montrons que u est antisymétrique.

Par hypothèse : $\forall x\in E,\ < u(x), x >= - < x, u(x) >= - < u(x), x >$.

Donc $\forall x\in E,\ 2 < u(x), x >= 0$ ou $\forall x\in E,\ < u(x), x >= 0$. u est antisymétrique.

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si} : \forall (x,y)\in E^2,\ < u(x), y >= - < x, u(y) >.}$$

2. a. Soient i et j deux élément de $[\![1,n]\!]$. $u(e_j)=\sum_{k=1}^n m_{k,j}\,e_k$.

Alors $< e_i, u(e_j) >=< e_i, \sum_{k=1}^n m_{k,j}\,e_k >= \sum_{k=1}^n m_{k,j} < e_i, e_k >$.

$(e_1,e_2,\dots,e_n)$ étant une base orthonormale on obtient $< e_i, u(e_j) >= m_{i,j}$.

$$\boxed{\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2,\ m_{i,j} =< e_i, u(e_j) >.}$$

b. M est la matrice de u dans la base $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$.

• Supposons que u est un endomorphisme antisymétrique.

Alors $\forall (i,j)\in [\![1,n]\!]^2, m_{j,i} =< e_j, u(e_i) >= - < u(e_j), e_i >= - < e_i, u(e_j) >= -m_{i,j}$. Ainsi ${}^tM=-M$.

• Réciproquement supposons que ${}^tM=-M$ et montrons que u est un endomorphisme antisymétrique.

Soient x et y deux éléments de E de coordonnées $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et $(y_1,y_2,\dots,y_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Soient $(x'_1,x'_2,\dots,x'_n)$ et $(y'_1,y'_2,\dots,y'_n)$ les coordonnées de $u(x)$ et $u(y)$ dans $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}$ étant orthonormale $< u(x), y >= \sum_{k=1}^n x'_k\, y_k$ et $< x, u(y) >= \sum_{k=1}^n x_k\, y'_k$.

$$< u(x), y >= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n m_{k,j}\, x_j\right) y_k = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{k=1}^n m_{k,j}\ y_k\right) = -\sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{k=1}^n m_{j,k}\ y_k\right) = -\sum_{j=1}^n x_j\, y'_j.$$

Ainsi $< u(x), y >= - < x, u(y) >$. Ce qui achève de prouver que u est antisymétrique.

<u>Remarques</u> *1. Au niveau de la réciproque on aurait pu se contenter de prouver que* $\forall x\in E < u(x), x >= 0$.

2. On peut également obtenir cette réciproque en faisant intervenir les matrices X *et* Y *de* x *et* y *dans la base orthonormale* $\mathcal{B}$ *et écrire :*

$$< u(x), y >=< MX, Y >= {}^t(MX)Y = {}^tX{}^tMY = -{}^tXMY = - < X, MY >=< x, u(y) >$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u \text{ est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice } M \text{ associée à } u \text{ relativement à la} \\ \text{base } \mathcal{B} \text{ vérifie } {}^tM=-M. \end{array}}$$

PARTIE III : Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

1. Soit λ un réel valeur propre de u. Il existe un élément non nul x de E tel que $u(x)=\lambda\,x$.

$< u(x), x >= 0$ et $< u(x), x >=< \lambda\,x, x >= \lambda < x, x >= \lambda\,\|x\|^2$. Donc $\lambda\,\|x\|^2=0$.

Comme x n'est pas nul sa norme ne l'est pas davantage et λ est nul.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \text{ est un réel valeur propre de } u,\ \lambda \text{ est nul.}}$$

2. Soit x un élément de $\operatorname{Ker} u$ et y un élément de $\operatorname{Im} u$. Il existe un élément t de E tel que $y = u(t)$.

$< x, y >=< x, u(t) >= - < u(x), t >= - < 0_E, t >= 0$. Ceci achève de montrer que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont orthogonaux.

En particulier $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0_E\}$. Le théorème du rang donne $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u$. Il est alors clair que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires.

$$\boxed{\operatorname{Im} u \text{ et } \operatorname{Ker} u \text{ sont orthogonaux et supplémentaires.}}$$

Sans aucun doute $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$. Montrons l'inclusion inverse.

Soit x un élément de $\operatorname{Ker} u^2$. $u\big(u(x)\big) = 0_E$ donc $u(x)$ est élément de $\operatorname{Ker} u$... et de $\operatorname{Im} u$.

Comme $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires : $u(x) = 0_E$ et x appartient à $\operatorname{Ker} u$.

Par conséquent $\operatorname{Ker} u^2 \subset \operatorname{Ker} u$ et finalement :

$$\boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2.}$$

3. Soit M la matrice de u dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E. D'après **II 2. b.**, ${}^tM = -M$.

M^2 est la matrice de u^2 dans $\mathcal{B}$ et ${}^tM^2 = {}^tM\,{}^tM = (-M)(-M) = M^2$.

La matrice de u^2 dans la base **<u>orthonormale</u>** $\mathcal{B}$ est symétrique donc u^2 est symétrique.

Soit λ une valeur propre de u^2. Il existe un élément non nul x de E tel que $u^2(x) = \lambda\, x$.

$\lambda\, \|x\|^2 =< \lambda\, x, x >=< u^2(x), x >= - < u(x), u(x) >= -\|u(x)\|^2$.

x n'est pas nul donc $\lambda = -\dfrac{\|u(x)\|^2}{\|x\|^2}\cdot$ Il devient alors clair que λ est un réel négatif ou nul.

$$\boxed{u^2 \text{ est un endomorphisme symétrique de } E \text{ et toute valeur propre de } u^2 \text{ est négative ou nulle.}}$$

4. a. u^2 est un endomorphisme symétrique de E donc u^2 est diagonalisable. Ainsi il existe une base $\mathcal{B}' = ({e'}_1, {e'}_2, \ldots, {e'}_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u^2.

Supposons que 0 soit la seule valeur propre de u^2. Comme u^2 est un endomorphisme symétrique, u^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker} u^2$ est le seul sous-espace propre de u^2.

Alors $\operatorname{Ker} u^2 = E$. **2.** donne alors $\operatorname{Ker} u = E$. u est alors l'endomorphisme nul ce qui contredit l'hypothèse faite au début de la partie.

$$\boxed{u^2 \text{ admet au moins une valeur propre non nulle.}}$$

b. Il existe un réel non nul λ tel que $u^2(x) = \lambda\, x$. Notons que, d'après ce qui précède, λ est strictement négatif.

$u(F) = u\left(\operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)\right) = \operatorname{Vect}\big(u(x), u^2(x)\big) = \operatorname{Vect}\big(u(x), \lambda\, x\big) \subset \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big) = F$. F est stable par u.

Ne reste plus qu'à montrer que $F = \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est un plan vectoriel de E. Pour ce faire il suffit de montrer que la famille $\big(x, u(x)\big)$ est libre car c'est déjà une famille génératrice de F.

Supposons $\big(x, u(x)\big)$ liée. Comme x n'est pas nul il existe un réel γ tel que $u(x) = \gamma\, x$. Alors $u^2(x) = \gamma^2\, x$ or $u(x) = \lambda\, x$. Ainsi $\gamma^2\, x = \lambda\, x$. x n'étant pas nul, $\lambda = \gamma^2$ ce qui contredit le fait que λ est strictement négatif.

Finalement $\big(x, u(x)\big)$ est libre.

$$\boxed{F = \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big) \text{ est un plan vectoriel de } E \text{ stable par } u.}$$

c. Qui peut le plus peut le moins. Prenons donc un sous-espace vectoriel G stable par u et montrons que $G^\perp$ est également stable par u.

Soit z un élément de $G^\perp$. Montrons que $u(z)$ appartient encore à $G^\perp$.

$\forall x \in G,\ u(x) \in G$. Donc $\forall x \in G,\ < u(x), z >= 0$.

u étant antisymétrique on a encore : $\forall x \in G,\ - < x, u(z) >= 0$ ou $\forall x \in G,\ < x, u(z) >= 0$. Ce qui signifie que $u(z)$ est un élément de $G^\perp$.

$\forall z \in G^\perp,\ u(z) \in G^\perp$. $G^\perp$ est stable par G. Ce résultat appliqué à F permet de dire que :

$$\boxed{F^\perp \text{ est stable par } u.}$$

d. u_1 est un endomorphisme de $F^\perp$ et $\forall (x,y) \in \left(F^\perp\right)^2,\ < u(x), x >_1 =< u(x), x >= 0$.

u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$.

$\operatorname{Im} u_1$ est un sous-espace vectoriel de $F^\perp$ donc $F \cap \operatorname{Im} u_1 = \{0_E\}$. F et $\operatorname{Im} u_1$ sont en somme directe.

Montrons alors, par double inclusion, que $\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

• λ n'est pas nul et $u^2(x) = \lambda\, x$ donc $x = u\Big(u\left(\frac{1}{\lambda}\, x\right)\Big)$ est un élément de l'image de u. Alors x et $u(x)$ sont deux éléments de l'image de u. Ainsi $F = \operatorname{Vect}\big(x, u(x)\big)$ est contenu dans $\operatorname{Im} u$.

$\operatorname{Im} u_1 = u_1\left(F^\perp\right) = u\left(F^\perp\right) \subset \operatorname{Im} u$.

F et $\operatorname{Im} u_1$ étant contenu dans $\operatorname{Im} u$, $F \oplus \operatorname{Im} u_1$ est contenu dans $\operatorname{Im} u$.

• Réciproquement soit y un élément de $\operatorname{Im} u$. Il existe un élément t de E tel que $y = u(t)$.

F et $F^\perp$ sont supplémentaires donc il existe un unique élément (t', t'') de $F \times F^\perp$ tel que $t = t' + t''$.

$y = u(t) = u(t') + u(t'') = u(t') + u_1(t'')$. $u(t')$ appartient à F car t' est dans F qui est stable par u, et $u_1(t'')$ est un élement de $\operatorname{Im} u_1$. Alors y appartient à $F + \operatorname{Im} u_1 = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

Ceci achève de montrer que $\operatorname{Im} u$ est contenu dans $F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

$$\boxed{u_1 \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } F^\perp \text{ et } \operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1}$$

5. Montrons le résultat à l'aide d'une récurrence faible sur la dimension de E.

• Soit u un endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel E de dimension 0.

Nécessairement $\operatorname{Im} u = \{0_E\}$ et donc le rang de u qui vaut 0 est pair. La propriété est vraie pour $n = 0$.

• Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Supposons que tout endomorphisme antisymétrique d'un espace vectoriel euclidien de dimension inférieure ou égale à n soit de rang pair. Montrons qu'il en est encore de même pour les endomorphismes antisymétriques des espaces vectoriels euclidiens de dimension $n + 1$.

Soit u un endomorphisme antisymétrique d'une espace vectoriel euclidien E de dimension $n + 1$.

Si u est nul son rang, qui vaut 0, est pair. Supposons désormais que u n'est pas nul et utilisons à plein **4.**.

u^2 possède une valeur propre non nulle (et même strictement négative). Soit x un vecteur propre associé à cette valeur propre. $F = \big(x, u(x)\big)$ est un plan vectoriel stable par u. $F^\perp$ est stable par u.

Soit u_1 l'endomorphisme de $F^\perp$ défini par : $\forall x \in F^\perp,\ u_1(x) = u(x)$. u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et $\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

$\dim F^\perp = (n + 1) - 2 = n - 1$. L'hypothèse de récurrence nous permet alors de dire que le rang de u_1 est pair.

Il ne reste plus qu'à remarquer que $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u = \dim \big(F \oplus \operatorname{Im} u_1\big) = \dim F + \dim \operatorname{Im} u_1 = 2 + \operatorname{rg} u_1$ pour dire que le rang de u est pair et ainsi achever la récurrence.

$$\boxed{\text{Le rang d'un endomorphime antisymétrique est pair.}}$$

PARTIE IV : Application

1. ${}^tA = -A$. Comme A est la matrice de u relativement à la base orthonormale $\mathcal{B}$ on peut dire que :

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } E.}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&4&1&-1\\-4&0&-1&-1\\-1&1&0&-5\\1&1&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix}.$$

$$A\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&4&1&-1\\-4&0&-1&-1\\-1&1&0&-5\\1&1&5&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-9\\9\\0\end{pmatrix}. \text{ Alors } A^2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} = -9\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Ainsi $u^2(f_1) = -9\, f_1$. f_1 n'étant pas nul :

$$\boxed{f_1 = e_1 + e_2 - e_3 \text{ est un vecteur propre de } u^2 \text{ associé à la valeur propre } -9}$$

2. Ce que nous avons vu plus haut (**III 4.**) permet déjà de dire que F est un plan vectoriel stable par F et que $\big(f_1, u(f_1)\big)$ en est une base et même une base orthogonale car f_1 et $u(f_1)$ sont orthogonaux.

Posons dès lors $e'_1 = \dfrac{1}{\|f_1\|}\, f_1$ et $e'_2 = \dfrac{1}{\|u(f_1)\|}\, u(f_1)$. (e'_1, e'_2) est alors une base orthonormale de F.

$f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ et $u(f_1) = 3\, e_1 - 3\, e_2 - 3\, e_4$. Par conséquent $\|f_1\| = \sqrt{3}$ et $\|u(f_1)\| = 3\sqrt{3}$.

$$\boxed{(e'_1, e'_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_3), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_4)\right) \text{ est une base orthonormale de } F.}$$

Cherchons $F^\perp$. Nous pouvons déjà dire que $F^\perp$ est un plan vectoriel ($\dim F^\perp = \dim E - \dim F = 4 - 2 = 2$) stable par u.

Soit $x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3 + x_4\, e_4$ un élément de E.

Comme (e'_1, e'_2) est une base de F :

$x \in F^\perp \iff < x, e'_1 > = < x, e'_2 > = 0 \iff x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 - x_4 = 0 \iff x_3 = x_1 + x_2$ et $x_4 = x_1 - x_2$.

Pas de doute, $f_3 = e_1 + e_3 + e_4$ est un élément de $F^\perp$. Alors $u(f_3)$ est également un élément de $F^\perp$.

Notons que $u(f_3) = -6(e_2 + e_3 - e_4)$ (ce qui confirme son appartenance à $F^\perp$).

$\big(f_3, u(f_3)\big)$ est alors une famille orthogonale de deux vecteurs non nuls de $F^\perp$. $\big(f_3, u(f_3)\big)$ est donc une famille libre et orthogonale de deux éléments du plan vectoriel $F^\perp$. $\big(f_3, u(f_3)\big)$ est une base orthogonale de $F^\perp$.

Posons $e'_3 = \dfrac{1}{\|f_3\|}\, f_3$ et $e'_4 = \dfrac{1}{\|u(f_3)\|}\, u(f_3)$. (e'_3, e'_4) est alors une base orthonormale de $F^\perp$.

$f_3 = e_1 + e_3 + e_4$ et $u(f_3) = -6(e_2 + e_3 - e_4)$. Par conséquent $\|f_3\| = \sqrt{3}$ et $\|u(f_3)\| = 6\sqrt{3}$.

$$\boxed{(e'_3, e'_4) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}\big(-e_2 - e_3 + e_4\big)\right) \text{ est une base orthonormale de } F^\perp.}$$

3. (e'_1, e'_2) est une base orthonormale de F, (e'_3, e'_4) est une base orthonormale de $F^\perp$ et, F et $F^\perp$ sont supplémentaires et orthogonaux donc $\mathcal{B}_0 = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ est une base orthonormale de E.

Cherchons la matrice de u dans cette base.

Rappelons que $e'_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, f_1$ et que $e'_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\, u(f_1)$. Alors $u(e'_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, u(f_1) = 3\, e'_2$.

Rappelons également que $u^2(f_1) = -9\, f_1 = -9\sqrt{3}\, e'_1$.

Alors $u(e'_2) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\, u^2(f_1) = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}\,(-9\sqrt{3}\, e'_1) = -3\, e'_1$.

$e'_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\big(e_1 + e_3 + e_4\big)$ et $e'_4 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\big(-e_2 - e_3 + e_4\big)$,

$A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\\-6\\6\end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\\-6\\-6\end{pmatrix} = -6\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Donc $u(e'_3) = 6\, e'_4$ et $u(e'_4) = -6\, e'_3$. Finalement :

$\mathcal{B}_0 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 - e_3), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 - e_4), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_3 + e_4), \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-e_2 - e_3 + e_4)\right)$ est une base orthonormale de E et la matrice de u dans cette base est :

$$\begin{pmatrix}0 & -3 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -6\\ 0 & 0 & 6 & 0\end{pmatrix}.$$

LYON 2003 Second problème

PARTIE I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

1. f est non inversible donc f n'est pas bijective. Comme f est un endomorphisme de E, qui est de dimension finie, f n'est pas injective. Son noyau n'est donc pas réduit à 0_E donc 0 est valeur propre de f.

f est diagonalisable car f est un endomorphisme symétrique. Supposons que 0 soit la seule valeur propre de E. Alors le sous-espace propre de f associé à 0 est E donc $\operatorname{Ker} f = E$ et f est l'endomorphisme nul de E ce qui contredit l'hypothèse.

$$\boxed{\text{0 est valeur propre de } f \text{ et } f \text{ admet au moins une valeur propre non nulle.}}$$

2. a. Tout cela est du cours. Soit x un élément de $E_f(\lambda)$ et y un élément de $E_f(\mu)$. $f(x) = \lambda\, x$ et $f(y) = \mu\, y$.

$\lambda < x, y > = < \lambda\, x, y > = < f(x), y > = < x, f(y) > = < x, \mu\, y > = \mu\ < x, y >$ (f est symétrique).

$$\boxed{\forall x \in E_f(\lambda),\ \forall y \in E_f(\mu),\ \lambda < x, y > = \mu\ < x, y >.}$$

b. Soient λ et μ deux valeurs propres distinctes de f.

$\forall x \in E_f(\lambda),\ \forall y \in E_f(\mu),\ \lambda < x, y > = \mu\ < x, y >$ donc $\forall x \in E_f(\lambda),\ \forall y \in E_f(\mu),\ (\lambda - \mu) < x, y > = 0$.

Comme $\lambda - \mu$ n'est pas nul : $\forall x \in E_f(\lambda),\ \forall y \in E_f(\mu),\ < x, y > = 0$. $E_f(\lambda)$ et $E_f(\mu)$ sont donc orthogonaux.

$$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } f \text{ sont deux à deux orthogonaux.}}$$

3. Soient x un élément de $\operatorname{Ker} f$ et y un élément de $\operatorname{Im} f$. $f(x) = 0_E$ et il existe un élément t de E tel que $y = f(t)$.

$< x, y > = < x, f(t) > = < f(x), t > = < 0_E, t > = 0$.

$\forall x \in \operatorname{Ker} f,\ \forall y \in \operatorname{Im} f,\ < x, y > = 0$ donc $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux. En particulier leur intersection est $\{0_E\}$.

Or, d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$. Comme E est de dimension finie ceci achève de prouver que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f \text{ et } \operatorname{Im} f \text{ sont supplémentaires orthogonaux dans } E.}$$

<u>Remarque</u> $(\operatorname{Ker} f)^\perp = \operatorname{Im} f$ *et* $(\operatorname{Im} f)^\perp = \operatorname{Ker} f$.

4. a. f est diagonalisable et admet $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes λ_0, λ_1, ..., λ_k.

Par conséquent : $E = E_f(\lambda_0) \oplus E_f(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E_f(\lambda_k)$. Ce qui signifie que :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour tout élément } x \text{ de } E, \text{ il existe un unique } (k+1)\text{-uplet } (x_0, x_1, \ldots, x_k) \\ \text{de } E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k) \text{ tel que } x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k.\end{array}}$$

b. Soit j un élément de $[\![0, k]\!]$ et soit x un élément de E.

$(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ est l'unique $(k+1)$-uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} x_\ell$.

$p_j(x) = p_j\left(\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} x_\ell\right) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} p_j(x_\ell)$.

x_j appartient à $E_f(\lambda_j)$ donc $p_j(x_j) = x_j$. Soit ℓ un élément de $[\![0, k]\!]$ distinct de j.

x_ℓ appartient à $E_f(\lambda_\ell)$ qui est orthogonal à $E_f(\lambda_j)$ donc qui est contenu dans l'orthogonal de $E_f(\lambda_j)$. Alors $p_j(x_\ell) = 0_E$.

Finalement $p_j(x) = \sum\limits_{\ell=0}^{k} p(x_\ell) = x_j$.

$$\boxed{\text{Si } j \text{ est dans } [\![0,k]\!], \text{ si } x \text{ est dans } E \text{ et si } (x_0, x_1, \dots, x_k) \text{ est l'unique } (k+1)\text{-uplet de } E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k) \text{ tel que } x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k \text{ alors : } p_j(x) = x_j.}$$

En reprenant les notations précèdentes on a : $Id_E(x) = x = \sum\limits_{\ell=0}^{k} x_\ell = \sum\limits_{\ell=0}^{k} p_\ell(x) = (p_0 + p_1 + \cdots + p_k)(x)$ et ceci pour tout x dans E. Par conséquent :

$$\boxed{Id_E = p_0 + p_1 + \cdots + p_k.}$$

5 .a. Soient i et j deux éléments distincts de $[\![0, k]\!]$. Soit x un élément de E.

Soit $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ l'unique $(k+1)$-uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \sum\limits_{\ell=0}^{k} x_\ell$.

$(p_i \circ p_j)(x) = p_i\big(p_j(x)\big) = p_i(x_j)$. j étant différent de i, $p_i(x_j) = 0_E$ car x_j appartient à l'orthogonal de $E_f(\lambda_i)$.

Finalement $\forall x \in E,\ \big(p_i \circ p_j\big)(x) = 0_E$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall (i,j) \in [\![0,k]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}.}$$

b. Soit x un élément de E et soit $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ l'unique $(k+1)$-uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \sum\limits_{\ell=0}^{k} x_\ell$.

$$f(x) = f\left(\sum_{\ell=0}^{k} x_\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{k} f(x_\ell) = \sum_{\ell=0}^{k} \lambda_\ell\, x_\ell = \sum_{\ell=0}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell(x) = \left(\sum_{\ell=0}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell\right)(x) = \left(\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell\right)(x)\ (\lambda_0 = 0).$$

Donc : $\forall x \in E,\ f(x) = \left(\sum\limits_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell\right)(x)$. Alors :

$$\boxed{f = \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell = \lambda_1\, p_1 + \lambda_2\, p_2 + \cdots + \lambda_k\, p_k.}$$

<u>Remarque</u> *Il est aisé de montré que :* $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ f^r = \sum\limits_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell\, p_\ell^r = \lambda_1\, p_1^r + \lambda_2\, p_2^r + \cdots + \lambda_k\, p_k^r$.

c. Soit x un élément de E et soit $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ l'unique $(k+1)$-uplet de $E_f(\lambda_0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = \sum\limits_{\ell=0}^{k} x_\ell$.

x_0 appartient à $E_f(\lambda_0)$ donc à $\operatorname{Ker} f$. Posons $y = \sum\limits_{\ell=1}^{k} x_\ell$ et montons que y appartient à $\operatorname{Im} f$.

$$\forall \ell \in [\![1,k]\!],\ \lambda_\ell \neq 0 \text{ donc } y = \sum_{\ell=1}^{k} x_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\frac{1}{\lambda_\ell}\, \lambda_\ell\, x_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{k} \left(\frac{1}{\lambda_\ell}\, f(x_\ell)\right) = f\left(\sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\lambda_\ell}\, x_\ell\right).$$

Ainsi y appartient à l'image de f.

On a donc $x = x_0 + y$ avec x_0 dans $\operatorname{Ker} f$ et y dans $\operatorname{Im} f$. Ceci suffit pour dire que $p(x) = y$.

Donc $p(x) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} x_\ell = \sum_{\ell=1}^{k} p_\ell(x) = \left(\sum_{\ell=1}^{k} p_\ell\right)(x)$ et ceci pour tout élément x de E. Alors :

$$\boxed{p = \sum_{\ell=1}^{k} p_\ell = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.}$$

<u>Remarque</u> *Notons que nous avons montré que $E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \cdots E_f(\lambda_k)$ est contenu dans $\operatorname{Im} f$. En fait il n'est pas difficile de voir que $E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \cdots E_f(\lambda_k) = \operatorname{Im} f$.*

6. a. $f = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, p_i$ et $f^\sharp = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\, p_j$.

$$f \circ f^\sharp = \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, p_i\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\, p_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \left((\lambda_i\, p_i) \circ \left(\frac{1}{\lambda_j}\, p_j\right)\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\, p_i \circ p_j\right).$$

Rappelons que $\forall i \in [\![0,k]\!],\ p_i \circ p_i = p_i$ et que $\forall (i,j) \in [\![0,k]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Alors : $f \circ f^\sharp = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i}\, p_i\right) = \sum_{i=1}^{k} p_i = p$.

$$\boxed{f \circ f^\sharp = \sum_{i=1}^{k} p_i = p.}$$

b. Soient x et y deux éléments de E.

$f(x) - p(y) = f(x) - (f \circ f^\sharp)(y) = f(x) - f\big(f^\sharp(y)\big) = f\big(x - f^\sharp(y)\big)$.

Ainsi on a $f(x) = p(y)$ si et seulement si $f\big(x - f^\sharp(y)\big) = 0_E$, ou si et seulement si $x - f^\sharp(y)$ appartient au noyau de f.

$$\boxed{\forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = p(y) \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f.}$$

7. a. Soit y un élément de E. $\operatorname{Im} f$ étant un sous-espace vectoriel de E le cours sur les projections orhogonales montre que $\displaystyle\operatorname*{Min}_{z' \in \operatorname{Im} f} \|z' - y\|$ existe et que la projection orthogonale $p(y)$ de y sur $\operatorname{Im} f$ est le seul élément de ce sous-espace tel que $\|p(y) - y\| = \displaystyle\operatorname*{Min}_{z' \in \operatorname{Im} f} \|z' - y\|$.

Alors $\displaystyle\operatorname*{Min}_{x \in E} \|f(x) - y\|$ existe et la projection orthogonale $p(y)$ de y sur $\operatorname{Im} f$ est le seul élément de ce sous-espace tel que $\|p(y) - y\| = \displaystyle\operatorname*{Min}_{x \in E} \|f(x) - y\|$.

Dès lors soit x un élément de E. $f(x)$ est de tout évidence un élément de $\operatorname{Im} f$.

Ainsi $\|f(x) - y\| = \displaystyle\operatorname*{Min}_{x \in E} \|f(x) - y\|$ si et seulement si $f(x) = p(y)$ donc si et seulements si $x - f^\sharp(y)$ est un élément de $\operatorname{Ker} f$.

> Si x et y sont deux éléments de E :
>
> - $\displaystyle\operatorname*{Min}_{z \in E} \|f(z) - y\|$ existe ;
> - $\|f(x) - y\| = \displaystyle\operatorname*{Min}_{z \in E} \|f(z) - y\| \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f$.

b. $f^\sharp(y) - f^\sharp(y) = 0_E$ donc $f^\sharp(y) - f^\sharp(y)$ appartient alors à $\operatorname{Ker} f$ et ainsi : $\|f\big(f^\sharp(y)\big) - y\| = \displaystyle\operatorname*{Min}_{z \in E} \|f(z) - y\|$.

Montrons alors $f^\sharp(y)$ est LE vecteur x de E de plus petite norme vérifiant $\|f(x) - y\| = \displaystyle\operatorname*{Min}_{z \in E} \|f(z) - y\|$.

Version 1 Soit x un autre élément de E tel que $\|f(x)-y\| = \underset{z\in E}{\text{Min}}\, \|f(z)-y\|$. Alors $x - f^\sharp(y)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$.

Montrons que $f^\sharp(y)$ appartient à $\operatorname{Im} f$. $\forall \ell \in [\![1,k]\!]$, $p_\ell(y) \in E_f(\lambda_\ell)$ donc $\forall \ell \in [\![1,k]\!]$, $\dfrac{1}{\lambda_\ell}\, p_\ell(y) \in E_f(\lambda_\ell)$.

Alors $f^\sharp(y)$ appartient à $E_f(\lambda_1) \oplus E_f(\lambda_2) \oplus \cdots E_f(\lambda_k)$ qui est contenu dans $\operatorname{Im} f$. $f^\sharp(y) \in \operatorname{Im} f$.

$x - f^\sharp(y)$ appartient à $\operatorname{Ker} f$, $f^\sharp(y)$ appartient à $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont orthogonaux donc $x - f^\sharp(y)$ et $f^\sharp(y)$ sont orthogonaux.

Le théorème de pythagore donne $\|x - f^\sharp(y)\|^2 + \|f^\sharp(y)\|^2 = \|\big(x - f^\sharp(y)\big) + f^\sharp(y)\|^2 = \|x\|^2$.

Alors $\|f^\sharp(y)\|^2 \leqslant \|x - f^\sharp(y)\|^2 + \|f^\sharp(y)\|^2 = \|x\|^2$. Donc $\|f^\sharp(y)\| \leqslant \|x\|^2$. Mieux $\|f^\sharp(y)\| < \|x\|^2$ si x est différent de $f^\sharp(y)$.

$$\boxed{\text{Si } y \text{ est dans } E,\ f^\sharp(y) \text{ est le vecteur } x \text{ de } E \text{ de plus petite norme vérifiant } \|f(x)-y\| = \underset{z\in E}{\text{Min}}\, \|f(z)-y\|.}$$

Version 2 Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des éléments x de E tels que $\|f(x)-y\| = \underset{z\in E}{\text{Min}}\, \|f(z)-y\|$.

$\mathcal{S} = \{x \in E \mid x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f\} = \{f^\sharp(y) + t; t \in \operatorname{Ker} f\} = \{f^\sharp(y) - t; t \in \operatorname{Ker} f\}$ non ?

On cherche x_0 dans $\mathcal{S}$ tel que $\|x_0\| = \underset{x\in \mathcal{S}}{\text{Min}}\, \|x\|$. Cela revient à chercher t_0 dans $\operatorname{Ker} f$ tel que $\|f^\sharp(y) - t_0\| = \underset{t\in \operatorname{Ker} f}{\text{Min}}\, \|f^\sharp(y) - t\|$.

Le cours sur les projections orthogonales montre que la projection orthogonale u de $f^\sharp(y)$ sur $\operatorname{Ker} f$ est l'unique élément de $\operatorname{Ker} f$ tel que $\|f^\sharp(y) - u\| = \underset{t\in \operatorname{Ker} f}{\text{Min}}\, \|f^\sharp(y) - t\|$.

Donc $f^\sharp(y) - u$ est l'unique élément de $\mathcal{S}$ tel $\|f^\sharp(y) - u\| = \underset{x\in S}{\text{Min}}\, \|x\|$.

Comme $f^\sharp(y)$ appartient à $\operatorname{Im} f$ qui est l'orthogonale de $\operatorname{Ker} f$, sa projection orthogonale u sur $\operatorname{Ker} f$ est nulle. Ainsi $f^\sharp(y) = f^\sharp(y) - u$ est l'unique élément de $\mathcal{S}$ tel $\|f^\sharp(y)\| = \|f^\sharp(y) - u\| = \underset{x\in S}{\text{Min}}\, \|x\|$.

PARTIE II : Application à un exemple

1. La matrice A de f dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ est symétrique donc f est symétrique.

La somme de la deuxième colonne et de la quatrième colonne de A est nulle donc $f(e_2)+f(e_4) = 0_E$ ou $f(e_2+e_4) = 0_E$. Ainsi $e_2 + e_4$ est un élément non nul de $\operatorname{Ker} f$. f n'est pas injective donc pas inversible.

La matrice A n'étant pas la matrice nulle, f n'est pas l'endomorphisme nul de E.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme non nul et non inversible de } E.}$$

2. Soit λ un élément de $\mathbb{R}$. Cherchons une réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$. Les opérations $L_1 \leftrightarrow L_3$ et $L_1 \leftrightarrow L_3$ transforme $A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \\ 3-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Les opérations $L_3 \leftarrow L_3 + (3-\lambda)\, L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + (1-\lambda)\, L_2$ transforme cette dernière matrice en

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (3-\lambda)^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-\lambda)^2 - 1 \end{pmatrix}$$

λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible, c'est à dire si et seulement si B_λ n'est pas inversible.

B_λ étant triangulaire supérieure elle est non inversible si et seulement si l'un des coefficients de sa diagonale est nul.

Alors λ est valeur propre de A si et seulement si $(3-\lambda)^2-1=0$ ou $(1-\lambda)^2-1=0$; c'est à dire si et seulement si $3-\lambda=1$ ou $3-\lambda=-1$ ou $1-\lambda=1$ ou $1-\lambda=-1$.

Les valeurs propres de A sont donc 0, 2 et 4.

$$\boxed{f \text{ admet exactement 3 valeurs propres distinctes} : \lambda_0=0,\ \lambda_1=2 \text{ et } \lambda_2=4.}$$

3. D'après la première partie : $f=\lambda_1\,p_1+\lambda_2\,p_2=2\,p_1+4\,p_2$. Alors :

$$\boxed{A=2\,M_1+4\,M_2.}$$

4. a. Soit x un élement de E de coordonnées (x_1,x_2,x_3,x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$$u\in E_f(\lambda_2)\iff \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\iff \begin{cases}-x_1-x_3=0\\ -3\,x_2-x_4=0\\ -x_1-x_3=0\\ -x_2-3\,x_4=0\end{cases}.$$

$$u\in E_f(\lambda_2)\iff \begin{cases}x_3=-x_1\\ x_4=-3\,x_2=-\frac{1}{3}\,x_2\end{cases}\iff x_3=-x_1 \text{ et } x_2=x_4=0$$

$E_f(\lambda_2)$ est donc la droite vectorielle engendrée par $v_2'=e_1-e_3$.

$v_2=\dfrac{1}{\|v_2'\|}\,v_2'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Big(e_1-e_3\Big)$ est un vecteur unitaire de $E_f(\lambda_2)$.

$$\boxed{E_f(\lambda_2) \text{ est de dimension 1 et } v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e_1-e_3\Big) \text{ est un élément de } E_f(\lambda_2) \text{ tel que } \|v_2\|=1.}$$

b. Soit x un élément de E. $p_2(x)\in E_f(\lambda_2)$ donc il existe un réel γ tel que $p_2(x)=\gamma\,v_2$.

$x-p_2(x)$ appartient à l'orthogonal de $E_f(\lambda_2)$ donc est orthogonal à v_2.

Ainsi $0=<x-p_2(x),v_2>=<x,v_2>-<p_2(x),v_2>=<x,v_2>-<\gamma\,v_2,v_2>=<x,v_2>-\gamma\,\|v_2\|^2$.

$0=<x,v_2>-\gamma$. Ainsi $\gamma=<x,v_2>$ et $p_2(x)=<x,v_2>\ v_2$.

$$\boxed{\forall x\in E,\ p_2(x)=<x,v_2>\ v_2.}$$

c. Soit x un élément de E de coordonnées (x_1,x_2,x_3,x_4) dans la base $\mathcal{B}$.

$<x,v_2>=<(x_1\,e_1+x_2\,e_2+x_3\,e_3+x_4\,e_4,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e_1-e_3)>=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(x_1-x_3)$

$p_2(x)=<x,v_2>\ v_2=\dfrac{1}{2}\,(x_1-x_3)\,(e_1-e_3)$.

Alors $p_2(e_1)=\dfrac{1}{2}\,(e_1-e_3)$, $p_2(e_2)=0_E$, $p_2(e_3)=-\frac{1}{2}\,(e_1-e_3)$ et $p_2(e_4)=0_E$. Donc :

$$\boxed{M_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.}$$

5. Soit $A^\sharp$ la matrice de $f^\sharp$ dans la base $\mathcal{B}$. $f^\sharp=\dfrac{1}{\lambda_1}\,p_1+\dfrac{1}{\lambda_2}\,p_2=\dfrac{1}{2}\,p_1+\dfrac{1}{4}\,p_2$. Donc $A^\sharp=\dfrac{1}{2}\,M_1+\dfrac{1}{4}\,M_2$.

$A=2\,M_1+4\,M_2$ donne $\dfrac{1}{2}\,M_1=\dfrac{1}{4}\,A-M_2$ et ainsi $A^\sharp=\dfrac{1}{4}\,A-\dfrac{3}{4}\,M_2$.

$A^\sharp = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \dfrac{3}{4}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Finalement :

$$\boxed{\text{La matrice de } f^\sharp \text{ relativement à la base } \mathcal{B} \text{ est : } A^\sharp = \dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

LYON 2008

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss

Soit m un réel. Posons $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \psi_m(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}}$.

ψ_m est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètres m et σ^2.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m(x)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 1. Par conséquent, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\sqrt{2\pi}\sigma\,\psi_m(x)\big)\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\sqrt{2\pi}\,\sigma$.

Notons alors que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{2\pi}\sigma\,\psi_m(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}} = e^{-(x-m)^2}$ et $\sqrt{2\pi}\,\sigma = \sqrt{\pi}$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut $\sqrt{\pi}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } m,\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2}\,\mathrm{d}x \text{ existe et vaut } \sqrt{\pi}.}$$

Partie I : Un produit scalaire sur E.

1. Soient α et β deux réels quelconques ! $\alpha^2+\beta^2-2\,\alpha\,\beta = (\alpha-\beta)^2 \geqslant 0$, donc $\alpha^2+\beta^2 \geqslant 2\,\alpha\,\beta$.

En divisant par 2 il vient $\alpha\,\beta \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(\alpha^2+\beta^2\Big)$.

$$\boxed{\text{Si } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels (positifs ou nuls)} : \alpha\,\beta \leqslant \frac{1}{2}\Big(\alpha^2+\beta^2\Big).}$$

$$\boxed{\text{Dans toute la suite } w \text{ est l'application de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par} : \forall x \in \mathbb{R},\ w(x) = e^{-x^2} \text{ (c'est dans II...)}}$$

2. u, v et w sont continues sur $\mathbb{R}$ donc le produit $u\,v\,w$ est continue sur $\mathbb{R}$.

De plus la question précédente donne :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |u(x)\,v(x)| = |u(x)|\,|v(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(|u(x)|^2+|v(x)|^2\Big) = \dfrac{1}{2}\Big((u(x))^2+(v(x))^2\Big)$.

En remarquant que w est positive sur $\mathbb{R}$ on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |u(x)\,v(x)\,w(x)| = |u(x)|\,|v(x)|\,w(x) \leqslant \dfrac{1}{2}\Big((u(x))^2+(v(x))^2\Big)\,w(x)$ ou encore :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant |u(x)\,v(x)\,w(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,(u(x))^2\,w(x) + \dfrac{1}{2}\,(v(x))^2\,w(x) \quad (*)$.

De plus $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2\,w(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(v(x)\big)^2\,w(x)\,\mathrm{d}x$ convergent car u et v sont des éléments de E.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\,(u(x))^2\,w(x) + \frac{1}{2}\,(v(x))^2\,w(x)\right)\mathrm{d}x$ converge.

$(*)$ et les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors (en deux temps...) la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)\,v(x)\,w(x)|\,\mathrm{d}x$.

Finalement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente donc convergente.

$$\boxed{\text{Si } u \text{ et } v \text{ sont deux éléments de } E,\ \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ converge.}}$$

3. a. Notons E' le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et montrons que E est un sous-espace vectoriel de E'.

• Par définition de E, E est contenu dans E'.

• Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \theta(x) = 0$. θ est un élément de E' et de toute évidence $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\theta(x)\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

θ est donc un élément de E et ainsi E n'est pas vide.

• Soit λ un réel. Soient u et v deux éléments de E. Montrons que $\lambda\,u + v$ est un élément de E.

$\lambda\,u + v$ est tout d'abord continue sur $\mathbb{R}$ car u et v sont continues sur $\mathbb{R}$.

Observons que $(\lambda\,u + v)^2\,w = \lambda^2\,u^2\,w + 2\,\lambda\,u\,v\,w + v^2\,w$.

De plus les trois intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2\,w(x)\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(v(x)\big)^2\,w(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\,w(x)\,\mathrm{d}x$ convergent d'après la définition de E et la question précédente.

Alors par combinaison linéaire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\lambda\,u(x) + v(x)\big)^2\,w(x)\,\mathrm{d}x$ converge.

Ceci achève de montrer que $\lambda\,u + v$ appartient à E.

Ceci achève aussi de montrer que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E'.

$$\boxed{E \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

b. • Notons d'abord que si u et v sont deux éléments de E, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge donc $(u\,|\,v)$ est un réel !

• Soient λ un réel. Soient u, v et t trois éléments de E.

$$(\lambda\,u + v\,|\,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (\lambda\,u + v)(x)\,t(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\lambda\,u(x)\,t(x)\,e^{-x^2} + v(x)\,t(x)\,e^{-x^2}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Alors $(\lambda\,u + v\,|\,t) = \lambda\,\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,t(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,t(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lambda\,(u\,|\,t) + (v\,|\,t)$ car toutes les intégrales convergent.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (u, v, t) \in E^3,\ (\lambda\,u + v\,|\,t) = \lambda\,(u\,|\,t) + (v\,|\,t)$.

• $\forall (u, v) \in E^2,\ (u\,|\,v) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,u(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = (v\,|\,u)$.

• Soit u un élément de E. $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(u(x)\big)^2\,e^{-x^2} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

Alors $(u\,|\,u) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ est un réel positif ou nul.

$\forall u \in E,\ (u\,|\,u) \geqslant 0$.

• Soit u un élément de E tel que $(u\,|\,u) = 0$. $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0$.

- $\diamond$ $u^2\,w$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- $\diamond$ $u^2\,w$ est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$;
- $\diamond$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2\,w(x)\,\mathrm{d}x = 0$;
- $\diamond$ $-\infty \neq +\infty$!

Alors plus de doute, $u^2\,w$ est nulle sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \big(u(x)\big)^2\,w(x) = 0$ et $w(x) \neq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, \big(u(x)\big)^2 = 0$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) = 0.\ u = 0_E$.

$\forall u \in E,\ (u\,|\,u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$.

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{(.\,|\,.) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

4. Soit k un élément de $\mathbb{N}$. Montrons que $x \to x^k$ appartient à E.

Tout d'abord $x \to x^k$ est continue sur $\mathbb{R}$. Montrons maintenant que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(x^k\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big(x^2\,\big(x^k\big)^2\,e^{-x^2}\Big) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\big(x^2\big)^{k+1}}{e^{x^2}}\right) = 0$ par croissance comparée.

- $\diamond$ $x \to \big(x^k\big)^2\,e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
- $\diamond$ $\big(x^k\big)^2\,e^{-x^2} =_{x\to+\infty} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;
- $\diamond$ $\forall x \in [1, +\infty[,\ \big(x^k\big)^2\,e^{-x^2} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{x^2} \geqslant 0$;
- $\diamond$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.

Les règles de comparaison sur les intégrales généralisées de fonctions positives donnent alors la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \big(x^k\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ donc la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(x^k\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$x \to \big(x^k\big)^2\,e^{-x^2}$ étant paire sur $\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \big(x^k\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge (et vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(x^k\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$).

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(x^k\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge. Ce qui achève de montrer que $x \to x^k$ appartient à E.

Soit alors P un élément de F. Montrons que P appartient à E.

Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et $r+1$ réels a_0, a_1, ..., a_r tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k\,x^k$.

Or pour tout k dans $\mathbb{N}$, $x \to x^k$ appartient à E ; P est donc combinaison linéaire d'éléments de E. Comme E est un espace vectoriel, P appartient à E.

$$\boxed{F \text{ est contenu dans } E.}$$

Partie II : Polynômes d'Hermite

---

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ w(x) = e^{-x^2}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ w'(x) = -2\,x\,e^{-x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ w''(x) = -2\,e^{-x^2} + (-2\,x)^2\,e^{-x^2} = (4\,x^2 - 2)\,e^{-x^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ w'''(x) = 8\,x\,e^{-x^2} + (4\,x^2 - 2)\,(-2\,x)\,e^{-x^2} = (-8\,x^3 + 12\,x)\,e^{-x^2}$.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R},\ H_1(x) = -e^{x^2}\left(-2\,x\,e^{-x^2}\right) = 2\,x$, $\forall x \in \mathbb{R},\ H_2(x) = e^{x^2}\left((4\,x^2-2)\,e^{-x^2}\right) = 4\,x^2 - 2$, $\forall x \in \mathbb{R},\ H_3(x) = -e^{x^2}\left((-8\,x^3 + 12\,x)\,e^{-x^2}\right) = 8\,x^3 - 12\,x$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H_1(x) = 2\,x, H_2(x) = 4\,x^2 - 2 \text{ et } H_3(x) = 8\,x^3 - 12\,x.}$$

2. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = (-1)^n\,e^{x^2}\,w^{(n)}(x)$. En dérivant on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ H'_n(x) = (-1)^n\,(2\,x)\,e^{x^2}\,w^{(n)}(x) + (-1)^n\,e^{x^2}\,w^{(n+1)}(x) = 2\,x\,H_n(x) - (-1)^{n+1}\,e^{x^2}\,w^{(n+1)}(x)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ H'_n(x) = 2\,x\,H_n(x) - H_{n+1}(x)$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ H_{n+1}(x) = 2\,x\,H_n(x) - H'_n(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N} \text{ et pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : H_{n+1}(x) = 2\,x\,H_n(x) - H'_n(x).}$$

b. Montrons par récurrence que pour tout n dans $\mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n.

• La propriété est vraie pour n=0 car $\forall x \in \mathbb{R},\ H_0(x) = 1$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément n de $\mathbb{N}$. Montrons la pour $n+1$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ H_{n+1}(x) = 2\,x\,H_n(x) - H'_n(x)$ et, $x \to 2\,x$, H_n et H'_n sont des polynômes.

Ainsi H_{n+1} est un polynôme.

De plus H_n est un polynôme de degré n donc $x \to 2\,x\,H_n(x)$ est un polynôme de degré n+1 et H'_n est un polynôme de degré strictement inférieur à n.

Par conséquent H_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ H_n \text{ est un polynôme de degré } n.}$$

c. Soit x un réel. $H_0(x) = 1$. Alors $H_1(x) = 2\,x\,H_0(x) - H'_0(x) = 2\,x$.

$H_2(x) = 2\,x\,H_1(x) - H'_1(x) = 2\,x\,(2\,x) - 2 = 4\,x^2 - 2$.

$H_3(x) = 2\,x\,H_2(x) - H'_2(x) = 2\,x\,(4\,x^2 - 2) - 8\,x = 8\,x^3 - 12\,x$.

$H_4(x) = 2\,x\,H_3(x) - H'_3(x) = 2\,x\,(8\,x^3 - 12\,x) - (24\,x^2 - 12) = 16\,x^4 - 48\,x^2 + 12$.

Nous avons ainsi retouvé les résultats de **II.1**. De plus :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H_4(x) = 16\,x^4 - 48\,x^2 + 12\ .}$$

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons α_n le coefficient du terme de plus haut degré de H_n.

$\alpha_0 = 1$ car $H_0 = 1$.

Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Le terme de plus haut degré de H_n est " $\alpha_n\,x^n$ ". Ainsi le terme de plus haut degré de $x \to 2\,x\,H_n$ est " $2\,\alpha\,x^{n+1}$ ". De plus H'_n est un polynôme de degré strictement inférieur à n.

Le terme de plus haut degré de $x \to 2\,x\,H_n - H'_n$, donc de H_{n+1}, est alors " $2\,\alpha_n\,x^{n+1}$ ". Ainsi $\alpha_{n+1} = 2\,\alpha_n$.

$(\alpha_n)_{n \geqslant n}$ est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1. Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = 2^n$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \text{ le coefficient du terme de plus haut degré de } H_n \text{ est } 2^n.}$$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, w(-x) = w(x)$. Une récurence simple donne alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (-1)^n\, w^{(n)}(-x) = w^{(n)}(x)$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (-1)^n\,(-1)^n\, e^{x^2}\, w^{(n)}(-x) = (-1)^n\, e^{x^2}\, w^{(n)}(x)$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ (-1)^n\, H_n(-x) = H_n(x)$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ H_n(-x) = (-1)^{2n}\, H_n(-x) = (-1)^n\, H_n(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N} \text{ et pour tout } x \text{ dans } \mathbb{R} : H_n(-x) = (-1)^n\, H_n(x).}$$

Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

Si n est pair $\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(-x) = H_n(x)$ et H_n est pair(e).

Si n est impair $\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(-x) = -H_n(x)$ et H_n est impair(e).

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ H_n \text{ a la parité de } n.}$$

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

---

1. a. Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et soit P un élément de F. Montrons que $(P' \,|\, H_{n-1}) = (P \,|\, H_n)$.

Il suffit de montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)\, H_{n-1}(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$.

Soit α et β deux réels. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_n(x) = H_{n-1}(x)\, e^{-x^2}$. P et ℓ_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Notons aussi que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_n'(x) = H_{n-1}'(x)\, e^{-x^2} + H_{n-1}(x)\,(-2\,x)\, e^{-x^2} = -\big(2\,x\, H_{n-1}(x) - H_{n-1}'(x)\big)\, e^{-x^2} = -H_n(x)\, e^{-x^2}$.

Une intégration par parties donne alors :

$\displaystyle\int_\alpha^\beta P'(x)\, H_{n-1}\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \Big[P(x)\, H_{n-1}(x)\, e^{-x^2}\Big]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta P(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$. Ainsi :

$\displaystyle\int_\alpha^\beta P'(x)\, H_{n-1}(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = P(\beta)\, H_{n-1}(\beta)\, e^{-\beta^2} - P(\alpha)\, H_{n-1}(\alpha)\, e^{-\alpha^2} + \int_\alpha^\beta P(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x \quad (**)$.

Ne reste plus qu'à faire tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$. Mais pour cela un petit résultat intermédiaire s'impose.

Lemme 1 : $\boxed{\text{Pour tout élément } Q \text{ de } F : \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \Big(Q(x)\, e^{-x^2}\Big) = \lim_{x\to+\infty} \Big(Q(x)\, e^{-x^2}\Big) = 0.}$

Montrons le lemme. Dans cette preuve $\displaystyle\lim_{x\to\infty}$ voudra dire indifféremment $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}$ ou $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}$.

Soit Q un élément de F. Si Q est le polynôme nul le résultat est clair. Supposons $Q \neq 0_F$.

Soit " $a\, x^r$ " le terme de plus haut degré de Q. $Q(x) \underset{x\to\infty}{\sim} a\, x^r$ donc $|Q(x)| \underset{x\to\infty}{\sim} |a\, x^r|$.

Alors $\displaystyle |Q(x)\, e^{-x^2}| = |Q(x)|\, e^{-x^2} \underset{x\to\infty}{\sim} |a\, x^r|\, e^{-x^2} = |a|\, \frac{(x^2)^{\frac{r}{2}}}{e^{x^2}}$.

Alors $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(|Q(x)\, e^{-x^2}|\Big) = \lim_{x\to\infty} \left(|a|\, \frac{(x^2)^{\frac{r}{2}}}{e^{x^2}}\right) = 0$ par croissance comparée. Donc $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \Big(Q(x)\, e^{-x^2}\Big) = 0$.

Ceci achève la démonstration du lemme.

$P\, H_{n-1}$ est un élément de F. Le lemme donne alors $\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty} \Big(P(\alpha)\, H_{n-1}(\alpha)\, e^{-\alpha^2}\Big) = 0$ et

$\lim_{\beta \to +\infty} \left(P(\beta)\, H_{n-1}(\beta)\, e^{-\beta^2} \right) = 0.$

En faisant successivement tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$ dans $(**)$ on obtient :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)\, H_{n-1}(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, H_n(x)\, e^{-x^2}\, \mathrm{d}x$ (ces deux intégrales convergent).

En multipliant par $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ on obtient : $(P' \,|\, H_{n-1}) = (P \,|\, H_n)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } P \text{ dans } F : (P' \,|\, H_{n-1}) = (P \,|\, H_n).}$$

b. Montrons le lemme suivant.

Lemme 2 : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ \forall P \in F,\ (P \,|\, H_n) = (P^{(k)} \,|\, H_{n-k}).}$

Soit P un élément de F et n un élément de $\mathbb{N}$.

Montons par récurrrence que $\forall k \in [\![0,n]\!],\ (P \,|\, H_n) = (P^{(k)} \,|\, H_{n-k})$.

- La propriété est vraie pour $k = 0$!
- Supposons la propriété vraie pour un élément k de $[\![0, n-1]\!]$. Montrons la pour $k+1$.

En appliquant le résultat de la question précédente il vient :

$(P^{(k)} \,|\, H_{n-k}) = (\big(P^{(k)}\big)' \,|\, H_{(n-k)-1}) = (P^{(k+1)} \,|\, H_{n-(k+1)})$.

Ceci qui achève la récurrence.

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et P un élément de F_{n-1}.

Le lemme 2 donne en particulier $(P \,|\, H_n) = (P^{(n)} \,|\, H_{n-n}) = (P^{(n)} \,|\, H_0)$. Or $P^{(n)}$ est le polynôme nul car P appartient à F_{n-1}. Donc $(P \,|\, H_n) = (P^{(n)} \,|\, H_0) = 0$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ et pour tout } P \text{ dans } F_{n-1} : (P \,|\, H_n) = 0.}$$

c. Soit n dans $\mathbb{N}$. Montrons que $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une famille orthogonale. C'est vrai si $n = 0$! Supposons n non nul.

Soient i et j deux éléments distincts de $[\![0,n]\!]$. Montrons que $(H_i \,|\, H_j) = 0$. Comme $(H_i \,|\, H_j) = (H_i \,|\, H_j)$ on peut supposer pour ce faire que $i < j$.

Alors $H_i \in F_i$ (car $\deg H_i = i$), $H_j \in F_j$ (car $\deg H_j = j$) et $H_i \subset F_{j-1}$ (car $i \leqslant j-1$).

Le résultat prćédent appliqué pour $n = j$ ($j \in \mathbb{N}^*$ car $i < j$) et $P = H_i$ permet de dire que $(H_i \,|\, H_j) = 0$.

H_i et H_j sont orthogonaux.

Ainsi les éléments de la famille $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ sont dans F et sont deux à deux orthogonaux.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \text{ la famille } (H_0, H_1, \ldots, H_n) \text{ est orthogonale dans } F.}$$

2. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est famille orthogonale d'éléments **non nuls** de F_n. C'est donc une famille libre d'éléments de F_n de cardinal $n+1$. Comme F_n est de dimension $n+1$, $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ est une base de F_n.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}, \text{ la famille } (H_0, H_1, \ldots, H_n) \text{ est une base (orthogonale) de } F_n.}$$

3. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. Le lemme 2 donne $\|H_n\|^2 = (H_n \,|\, H_n) = (H_n^{(n)} \,|\, H_{n-n}) = (H_n^{(n)} \,|\, H_0)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ \|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} \,|\, H_0).}$$

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} \,|\, H_0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(n)}\, H_0\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2^n\, n!\, e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2^n\, n!}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$

Le préliminaire donne $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Alors $\|H_n\|^2 = 2^n\, n!$ donc $\|H_n\| = \sqrt{2^n\, n!}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ \|H_n\| = \sqrt{2^n\, n!}.}$$

Partie IV : Un endomorphisme symétrique

---

1. • Soit P un élément de F. $-P'' + 2\,X\,P' + P$ est encore un élément de F ! $f(P)$ appartient à F.

f est une application de F dans F.

• Soit λ un réel. Soient P et Q deux éléments de F.

$f(\lambda\,P + Q) = -(\lambda\,P + Q)'' + 2\,X\,(\lambda\,P + Q)' + \lambda\,P + Q = -\lambda\,P'' - Q'' + 2\,X\,(\lambda\,P' + Q') + \lambda\,P + Q.$

$f(\lambda\,P + Q) = \lambda(-P'' + 2\,X\,P' + P) + (-Q'' + 2\,X\,Q' + Q) = \lambda\,f(P) + f(Q).$

f est une application linéaire. Finalement :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } F.}$$

2. a. Soit P un élément de F.

$(g \circ h)(P) = g\big(h(P)\big) = g(P') = 2\,X\,P' - (P')' = -P'' + 2\,X\,P' + P - P = f(P) - P = (f - \mathrm{Id}_F)(P).$

$(h \circ g)(P) = \big(g(P)\big)' = \big(2\,X\,P - P'\big)' = 2\,P + 2\,X\,P' - P'' = f(P) + P = (f + \mathrm{Id}_F)(P).$

$\forall P \in F,\ (g \circ h)(P) = (f - \mathrm{Id}_F)(P)$ et $(h \circ g)(P) = (f + \mathrm{Id}_F)(P)$. Donc

$$\boxed{g \circ h = f - \mathrm{Id}_F \text{ et } h \circ g = f + \mathrm{Id}_F.}$$

b. $g \circ h = f - \mathrm{Id}_F$. En composant à droite par g il vient : $g \circ h \circ g = f \circ g - g$.

$h \circ g = f + \mathrm{Id}_F$ donc en composant à gauche par g il vient : $g \circ h \circ g = g \circ f + g$.

Alors $f \circ g - g = g \circ f + g$. Donc $f \circ g - g \circ f = 2\,g$.

$$\boxed{f \circ g - g \circ f = 2\,g.}$$

3. Soit λ un réels et P un élément de F tels que $f(P) = \lambda\,P$.

$2\,g(P) = (f \circ g)(P) - (g \circ f)(P) = f\big(g(P)\big) - g\big(f(P) = f\big(g(P)\big) - g(\lambda\,P) = f\big(g(P)\big) - \lambda\,g(P).$

Ainsi $f\big(g(P)\big) = (\lambda + 2)\,g(P)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \lambda \text{ et pour tout élément } P \text{ de } F, \text{ si } f(P) = \lambda\,P \text{ alors } f\big(g(P)\big) = (\lambda + 2)\,g(P).}$$

4. a. $f(H_0) = -H_0'' + 2\,X\,H_0' + H_0 = H_0$ car $H_0'' = H_0' = 0_F$ puisque $H_0 = 1$.

$$\boxed{f(H_0) = H_0.}$$

b. Soit k un élément de $\mathbb{N}$. $g(H_k) = 2\,X\,H_k - H_k' = H_{k+1}$ d'après **II 2.a.**.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N} : g(H_k) = H_{k+1}.}$$

Montrons par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N},\ f(H_k) = (2k+1)\,H_k$.

• $f(H_0) = H_0 = (2 \times 0 + 1)\,H_0$; la propriété est vraie pour $k = 0$.

• Supposons la propriété vraie pour un élément k de $\mathbb{N}$. Alors $f(H_k) = (2k+1)\,H_k$.

IV 3. donne alors $f\big(g(H_k)\big) = \big((2\,k+1)+2\big)\,g(H_k)$.

Comme $g(H_k) = H_{k+1}$: $f(H_{k+1}) = (2k+3)\,H_{k+1} = \big(2(k+1)+1\big)\,H_{k+1}$. Ceci achève la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } k \text{ de } \mathbb{N} : f(H_k) = (2k+1)\,H_k.}$$

5. Soient P et Q deux éléments de F. Soient α et β deux réels.

Posons : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_P(x) = P'(x)\,e^{-x^2}$. ℓ_P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Notons aussi que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_p'(x) = P''(x)\,e^{-x^2} + P'(x)\,(-2\,x)\,e^{-x^2} = -\big(-P''(x) + 2\,x\,P'\big)\,e^{-x^2} = -\big(f(P)(x) - P(x)\big)\,e^{-x^2}$.

En posant $T = f(P) - P$ on a $\forall x \in \mathbb{R},\ \ell_p'(x) = -T(x)\,e^{-x^2}$.

Intégrons alors par parties.

$$\int_\alpha^\beta P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \ell_P(x)\,Q'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[\ell_P(x)\,Q(x)\Big]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta \ell_P'(x)\,Q(x)\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_\alpha^\beta P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[P'(x)\,Q(x)\,e^{-x^2}\Big]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta T(x)\,Q(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

$$\int_\alpha^\beta P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = P'(\beta)\,Q(\beta)\,e^{-\beta^2} - P'(\alpha)\,Q(\alpha)\,e^{-\alpha^2} + \int_\alpha^\beta T(x)\,Q(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad (***).$$

Ne reste plus qu'à faire tendre α vers $-\infty$ et β vers $+\infty$.

P' et Q' sont deux éléments de F donc de E, ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ existe.

Pour des raisons analogues $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\,Q(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ existe également.

De plus $P'\,Q$ est un élément de F ; le lemme 1 donne alors :

$\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty}\Big(P'(\alpha)\,Q(\alpha)\,e^{-\alpha^2}\Big) = 0$ et $\displaystyle\lim_{\beta\to+\infty}\Big(P'(\beta)\,Q(\beta)\,e^{-\beta^2}\Big) = 0$.

En faisant tendre successivement α vers $-\infty$ er β vers $+\infty$ dans $(***)$ il vient :

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P'(x)\,Q'(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)\,Q(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. En multipliant par $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ on obtient : $(P'\,|\,Q') = (T\,|\,Q)$.

Alors $(P'\,|\,Q') = (f(P) - P\,|\,Q) = (f(P)\,|\,Q) - (P\,|\,Q)$.

$$\boxed{\forall (P,Q) \in F^2,\ (P'\,|\,Q') = (f(P)\,|\,Q) - (P\,|\,Q).}$$

6. Dans cette question n est un élément de $\mathbb{N}$.

a. Soit P un élément de F_n.

P'' est un élément de F_n. P' est un polynôme de degré strictement inférieur à n donc XP est également un élément de F_n.

P'', XP et P sont donc trois éléments du sous-espace vectoriel F_n. Alors $f(P) = -P'' + 2\,X\,P' + P$ est un élément de F_n.

$$\boxed{\forall P \in F_n,\ f(P) \in F_n.}$$

b. Soient P et Q deux éléments de F_n.

D'après IV 5. : $(f(P) \,|\, Q) = (P' \,|\, Q') + (P \,|\, Q)$ et $(f(Q) \,|\, P) = (Q' \,|\, P') + (Q \,|\, P)$.

La symétrie de $(.\,|\,.)$ donne alors $(f(P) \,|\, Q) = (f(Q) \,|\, P)$ puis $(f(P) \,|\, Q) = (P \,|\, f(Q))$ et enfin :

$(f_n(P) \,|\, Q) = (P \,|\, f_n(Q))$.

$$\boxed{f_n \text{ est un endomorphisme symétrique de } F_n.}$$

Remarque *f est également un endomorphisme symétrique de F !*

c. Rappelons que $(H_0, H_1, \cdots, H_n)$ est une base orthogonale de F_n.

De plus $\forall k \in [\![0, n]\!],\ f_n(H_k) = f(H_k) = (2k+1)\,H_k$ et $H_k \neq 0_{F_n}$; ainsi pour tout élément k de $[\![0, n]\!]$, H_k est un vecteur propre de f_n (associé à la valeur propre $2\,k+1$).

$(H_0, H_1, \cdots, H_n)$ est une base orthogonale de F_n contituée de vecteurs propres de f_n.

Posons $\forall k \in [\![0, n]\!],\ G_k = \dfrac{1}{\|H_k\|}\,H_k = \dfrac{1}{\sqrt{2^k\,k!}}\,H_k$.

$(G_0, G_1, \cdots, G_n)$ est une base orthonormale de F_n encore contituée de vecteurs propres de f_n.

$$\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2^k\,k!}}\,H_k\right)_{k \in [\![0,n]\!]} \text{ est une base orthonormale de } F_n \text{ contituée de vecteurs propres de } f_n.}$$

Partie V : Intervention d'exponentielles

---

1. Soit a un réel.

• D'abord φ_a est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$.

• $\forall x \in \mathbb{R}, \big(\varphi_a(x)\big)^2\,e^{-x^2} = e^{2\,a\,x - x^2} = e^{-(x^2 + 2\,a\,x + a^2) + a^2} = e^{a^2}\,e^{-(x-a)^2}$.

Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{\pi}$ d'après le préliminaire.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{a^2}\,e^{-(x-a)^2}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{\pi}\,e^{a^2}$.

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(\varphi_a(x)\big)^2\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{\pi}\,e^{a^2}$. Ceci achève de montrer que :

$$\boxed{\varphi_a \text{ est un élément de } E.}$$

Remarque *Retenons également que :* $\forall a \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\varphi_a(x))^2\ e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,e^{a^2}$.

2. Soient a et b deux réels. $(\varphi_a \,|\, \varphi_b) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(x)\,\varphi_b(x), e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_a(x)\,\varphi_b(x) = e^{a\,x}\,e^{b\,x} = e^{(a+b)\,x} = \left(e^{(\frac{a+b}{2})\,x}\right)^2 = \left(\varphi_{\frac{a+b}{2}}(x)\right)^2.$

La remarque de la première question permet de dire que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\varphi_{\frac{a+b}{2}}(x)\right)^2 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,e^{(\frac{a+b}{2})^2}.$

Alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_a(x)\,\varphi_b(x)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,e^{(\frac{a+b}{2})^2}$. Ainsi $(\varphi_a\,|\,\varphi_b) = e^{(\frac{a+b}{2})^2}$.

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (\varphi_a\,|\,\varphi_b) = e^{(\frac{a+b}{2})^2}.}$$

3. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. $\|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^2 = (\varphi_{\sqrt{\ln n}}\,|\,\varphi_{\sqrt{\ln n}}) = e^{\left(\frac{\sqrt{\ln n}+\sqrt{\ln n}}{2}\right)^2} = e^{\ln n} = n.$

Ainsi $\|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2} = \dfrac{1}{n}\cdot$ Plus de doute :

$$\boxed{\text{la série de terme général } \|\varphi_{\sqrt{\ln n}}\|^{-2} \text{ diverge.}}$$

4. Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^2 = (\varphi_{\sqrt{n}}\,|\,\varphi_{\sqrt{n}}) = e^{\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n}}{2}\right)^2} = e^n$. Alors : $\|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n.$

La série géométrique de raison $\dfrac{1}{e}$ est convergente car $\left|\dfrac{1}{e}\right| < 1$.

De plus $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}\cdot$

$$\boxed{\text{La série de terme général } \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} \|\varphi_{\sqrt{n}}\|^{-2} = \frac{e}{e-1}\cdot}$$

Partie VI Une limite de probabilité conditionnelle

1. w est continue sur $\mathbb{R}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ W(x) = \displaystyle\int_0^x w(t)\,\mathrm{d}t.$

W est la primitive sur (l'intervalle) $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0. W est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ W'(x) = w(x)$.

Notons que la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ donne la convergence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout réel x.

$\forall x \in]0,+\infty[,\ \Phi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -W(x) + \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

W étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

De plus $\forall x \in]0,+\infty[\ \Phi'(x) = -W'(x) = -w(x) = -e^{-x^2}$.

$$\boxed{\Phi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall x \in]0,+\infty[\ \Phi'(x) = -e^{-x^2}.}$$

2. a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$ comme reste d'une intégrale convergente.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0,\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{-x^2}}{2}\right) = 0,\ \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\,x^3}\right) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\,x} = 0.$

Alors par produit $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} G(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} K(x) = 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\Phi(x)=0,\ \lim_{x\to+\infty}G(x)=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}K(x)=0.}$$

b. Φ, G et K sont dérivables sur $]0,+\infty[$, donc $G-\Phi$ et $\Phi-K$ sont également dérivables sur $]0,+\infty[$.

$\forall x\in]0,+\infty[,\ (G-\Phi)'(x)=G'(x)-\Phi'(x)=\left(-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{2\,x^4}\right)\dfrac{e^{-x^2}}{2}+\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\,x^3}\right)(-2\,x)\,\dfrac{e^{-x^2}}{2}+e^{-x^2}.$

$\forall x\in]0,+\infty[,\ (G-\Phi)'(x)=\left(-\dfrac{1}{2\,x^2}+\dfrac{3}{4\,x^4}-1+\dfrac{1}{2\,x^2}+1\right)e^{-x^2}=\dfrac{3}{4\,x^4}\,e^{-x^2}.$

$\forall x\in]0,+\infty[,\ (G-\Phi)'(x)\geqslant 0$ donc $G-\Phi$ est croissante sur $]0,+\infty[$.

$\forall x\in]0,+\infty[,\ (\Phi-K)'(x)=\Phi'(x)-K'(x)=-e^{-x^2}-\left(-\dfrac{1}{2\,x^2}\,e^{-x^2}+\dfrac{1}{2\,x}\,(-2\,x)\,e^{-x^2}\right).$

$\forall x\in]0,+\infty[,\ (\Phi-K)'(x)=\left(-1+\dfrac{1}{2\,x^2}+1\right)e^{-x^2}=\dfrac{1}{2\,x^2}\,e^{-x^2}.$

$\forall x\in]0,+\infty[,\ (\Phi-K)'(x)\geqslant 0$ donc $\Phi-K$ est croissante sur $]0,+\infty[$.

$$\boxed{G-\Phi \text{ et } \Phi-K \text{ sont croissantes sur }]0,+\infty[.}$$

c. $G-\Phi$ est croissante sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(G-\Phi)(x)=0-0=0$; ainsi $\forall x\in]0,+\infty[,\ (G-\Phi)(x)\leqslant 0.$

$\Phi-K$ est croissante sur $]0,+\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\Phi-K)(x)=0-0=0$; ainsi $\forall x\in]0,+\infty[,\ (\Phi-K)(x)\leqslant 0.$

Alors $\forall x\in]0,+\infty[,\ G(x)\leqslant\Phi(x)\leqslant K(x).$

$$\boxed{\forall x\in]0,+\infty[,\ G(x)\leqslant\Phi(x)\leqslant K(x).}$$

d. Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $G(x)\leqslant\Phi(x)\leqslant K(x)$ et $\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}\geqslant 0.$

Alors $\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}\,G(x)\leqslant\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}\,\Phi(x)\leqslant\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}K(x).$

Or : $\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}\,G(x)=1-\dfrac{1}{2\,x^2}$ et $\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}K(x)=1.$

Finalement : $\forall x\in]0,+\infty[,\ 1-\dfrac{1}{2\,x^2}\leqslant\dfrac{2\,x}{e^{-x^2}}\,\Phi(x)\leqslant 1.$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2\,x^2}\right)=1$, il vient par encadrement $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2\,x}{e^{-x^2}}\,\Phi(x)\right)=1.$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\Phi(x)}{\frac{e^{-x^2}}{2\,x}}\right)=1$ et : $\displaystyle\Phi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^{-x^2}}{2\,x}.$

$$\boxed{\Phi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{e^{-x^2}}{2\,x}.}$$

3 a. $\psi_0 : x\to\dfrac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(1/\sqrt{2})}\,e^{-\frac{(x-0)^2}{2\,(1\sqrt{2})^2}}$ est une densité de X. Notons que $\forall x\in\mathbb{R},\ \psi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2}.$

$\forall x\in\mathbb{R},\ P(X\leqslant x)=1-P(X>x)=1-\displaystyle\int_x^{+\infty}\psi_0(x)\,\mathrm{d}x=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Phi(x).$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ P(X\leqslant x)=1-P(X>x)=1-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Phi(x).}$$

Remarque *On a également* : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(X > x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Phi(x)$.

b. Soit c un réel positif. Soit x un réel.

$$P_{(X>x)}(X \leqslant x+c) = \frac{P\big(\{X \leqslant x+c\} \cap \{X > x\}\big)}{P(X > x)} = \frac{P(x < X \leqslant x+c)}{P(X > x)} = \frac{P(x < X) - P(X > x+c)}{P(X > x)}.$$

$$P_{(X>x)}(X \leqslant x+c) = 1 - \frac{P(X > x+c)}{P(X > x)} = 1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Phi(x+c)}{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Phi(x)} = 1 - \frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)}.$$

$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-x^2}}{2\,x}$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\Phi(x)}{\frac{e^{-x^2}}{2\,x}}\right) = 1$.

Par composition des limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\Phi(x+c)}{\frac{e^{-(x+c)^2}}{2\,(x+c)}}\right) = 1$. Ainsi $\Phi(x+c) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-(x+c)^2}}{2\,(x+c)}$.

Alors $\dfrac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{e^{-(x+c)^2}}{2\,(x+c)}}{\frac{e^{-x^2}}{2\,x}} = \dfrac{x}{x+c}\, e^{-(x+c)^2+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-(x+c)^2+x^2} = e^{-2\,x\,c-c^2}$.

Par conséquent : $\dfrac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-(x+c)^2+x^2} = e^{-2\,x\,c-c^2}$.

Ainsi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2\,x\,c+c^2} = 0$ car c est strictement positif.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} P_{(X>x)}(X \leqslant x+c) = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{\Phi(x+c)}{\Phi(x)}\right) = 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } c \text{ strictement positif} : \lim_{x\to+\infty} P_{(X>x)}(X \leqslant x+c) = 1.}$$

LYON 2011

Partie I : Somme de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1

1. Il résulte du cours que :

La fonction h définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ h(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

L'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 valent 1.

2. a. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. X_1, X_2, ..., X_n possèdent une espérance et une variance qui valent 1.

Donc $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ possède une espérance et une variance.

La linéarité de l'espérance donne alors $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(X_k)$ donc $E(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

L'indépendance des variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n permet d'écrire que $V(S_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$.

Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, $E(S_n) = n$ et $V(S_n) = n$.

b. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. X_1, X_2, ..., X_n sont indépendantes et suivent toutes la loi exponentielle de paramètre 1 donc la loi gamma de paramètres 1 et 1 (ou la loi gamma de paramètre 1).

Le cours permet alors de dire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi gamma de paramètres 1 et n (ou la loi gamma de paramètre n).

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $S_n \hookrightarrow \Gamma(1, n)$ ou $S_n \hookrightarrow \gamma(n)$.

Remarque *Ceci permet de retrouver l'espérance et la variance de S_n.*

Dans ces conditions :

pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction h_n définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ h_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}\, e^{-t}}{\Gamma(n)} & \text{si } t \in]0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est une densité de S_n.

Remarques *1.* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0, +\infty[,\ h_n(t) = \dfrac{t^{n-1}\, e^{-t}}{(n-1)!}$.

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction $\widehat{h}_n$ définie par $\forall t \in \mathbb{R},\ \widehat{h}_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{n-1}\, e^{-t}}{\Gamma(n)} & \text{si } t \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ *est encore une densité de S_n.*

3. Notons F_U et F_Y les fonctions de répartition de U et de Y.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}.$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(-\ln(1-U) \leqslant x) = P(\ln(1-U) \geqslant -x) = P(1-U \geqslant e^{-x}) = P(U \leqslant 1 - e^{-x})$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = F_U(1 - e^{-x})$.

Si x est un élément de $]-\infty, 0[$, $1 - e^{-x} < 0$ et ainsi $F_Y(x) = F_U(1 - e^{-x}) = 0$.

Si x est un élément de $[0, +\infty[$, $0 \leqslant 1 - e^{-x} < 1$ et donc $F_Y(x) = F_U(1 - e^{-x}) = 1 - e^{-x}$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ F_Y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \in [0, +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors :

$$\boxed{Y = -\ln(1-U) \text{ suit la loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

4. La fonction random permet de simuler U donc la fonction -ln(1-random) permet de simuler $-\ln(1-U)$ donc la loi exponentielle de paramètre 1.

On simule alors S_n en ajoutant les résultats de n simulations (indépendantes) de la loi exponentielle de paramètre 1.

Nous allons plutôt écrire une fonction qu'un programme.

```
function Simule_S_n(n:integer):real;

var k:integer;s:real;

begin s:=0; for k:=1 to n do s:=s-ln(1-random); Simule_S_n:=s;
end;
```

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Ici aussi nous écrirons une fonction. Proposons deux versions.

La première simule S_1, S_2, ..., S_n, ... tant que la simulation donne une valeur inférieure ou égale à t.

La seconde simule S_1, S_2, ..., S_n, ... jusqu'à ce que la simulation donne une valeur strictement supérieure à t. On renvoie alors la valeur $n-1$ si n a été initialisé à 0 ou n si n a été initialisé à -1.

```
function Simule_N_t_V1(t:real):integer;

var n:integer;s:real;

begin n:=0;s:=-ln(1-random); while (s<=t) do begin
                n:=n+1;
                s:=s-ln(1-random);
                end;
Simule_N_t_V1:=n; end;
```

```
function Simule_N_t_V2(t:real):integer;

var n:integer;s:real;

begin n:=-1;s:=0; repeat n:=n+1;s:=s-ln(1-random); until(s>t);
Simule_N_t_V2:=n; end;
```

Exercice *Soit t un un réel strictement positif.*

Q1. Montrer que presque sûrement il existe au moins un élément i de $\mathbb{N}^*$ tel que $\{S_i > t\}$ se réalise.

Q2. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, les événements $\{N_t = n\}$ et $\{S_n \leqslant t\} \cap \{S_{n+1} > t\}$ sont égaux.

Q3. Montrer que N_t suit la loi de Poisson de paramètre t.

Partie II : Polynômes de Laguerre

Remarque *Soit n un élément de $\mathbb{N}$. $x \to x^n$ et $x \to e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Alors par produit f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Ceci justifie la définition de $f_n^{(n)}$ et donc de L_n.*

6. $\forall x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = e^x\, f_0^{(0)}(x) = e^x\, f_0(x) = e^x\, e^{-x} = 1$. Donc $L_0 = 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_0(x) = 1 \text{ ou } L_0 = 1.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = x\, e^{-x}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R},\ L_1(x) = e^x\, f_1'(x) = e^x \left(e^{-x} + x\,(-e^{-x})\right) = 1 - x$. Donc $L_1 = 1 - X$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_1(x) = 1 - x \text{ ou } L_1 = 1 - X.}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2(x) = \dfrac{1}{2}\, x^2\, e^{-x}$. La formule de leïbniz donne $\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(2)}(x) = \dfrac{1}{2}\,\left(2\, e^{-x} + 2\,(2\,x)\,(-e^{-x}) + x^2\, e^{-x}\right)$.
$\forall x \in \mathbb{R},\ f_2^{(2)}(x) = \dfrac{1}{2}\,(2 - 4\,x + x^2)\, e^{-x}$. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ L_2(x) = e^x\, f_2''(x) = e^x \left(\dfrac{1}{2}\,(2 - 4\,x + x^2)\, e^{-x}\right) = 1 - 2\,x + \dfrac{1}{2}\, x^2$.

Ou $L_2 = 1 - 2\,X + \dfrac{1}{2}\, X^2$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_2(x) = 1 - 2\,x + \frac{1}{2}\, x^2 \text{ ou } L_2 = 1 - 2\,X + \frac{1}{2}\, X^2.}$$

7. Soit n dans $\mathbb{N}$. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ u_n(x) = x^n$ et $v(x) = e^{-x}$. u_n et v sont n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n = \dfrac{1}{n!}\, u_n\, v$.

La formule de leïbniz donne alors : $f_n^{(n)} = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, u_n^{(k)}\, v^{(n-k)} = \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, u_n^{(n-k)}\, v^{(k)}$.

Deux récurrences simples montrent que :

1. $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ u_n^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)\, x^{n-k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k}$.
2. $\forall k \in \mathbb{N},\ v^{(k)} = (-1)^k\, v$ ou $\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ v^{(k)}(x) = (-1)^k\, e^x$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}\, u_n^{(n-k)}(x)\, v^{(k)}(x)\right] = \dfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}\, \dfrac{n!}{(n-(n-k))!}\, x^{n-(n-k)}\, (-1)^k\, e^{-x}\right]$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x) = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}\, \dfrac{n!}{k!}\, x^k\, (-1)^k\, e^{-x}\right] = e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k}\, x^k\right]$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = e^x\, f_n^{(n)}(x) = e^x \left(e^{-x} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k}\, x^k\right]\right) = \sum_{k=0}^{n} \left[\dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k}\, x^k\right] = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k}\, x^k$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k}\, x^k \text{ ou } L_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k}\, X^k\ .}$$

8. Notons que $\dfrac{(-1)^n}{n!}\dbinom{n}{n}=\dfrac{(-1)^n}{n!}\neq 0$! ! Alors plus de doute !

$$\boxed{\text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N},\ L_n \text{ est une fonction polynômiale (ou un polynôme) de degré } n \text{ dont le coefficient du terme de plus haut degré est } \dfrac{(-1)^n}{n!}.}$$

9. Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x\in\mathbb{R},\ f_{n+1}(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,e^{-x}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'_{n+1}(x)=\dfrac{1}{(n+1)!}(n+1)\,x^n\,e^{-x}+\dfrac{1}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,(-e^{-x})=\dfrac{1}{n!}\,x^n\,e^{-x}-\dfrac{1}{(n+1)!}\,x^{n+1}\,e^{-x}=f_n(x)-f_{n+1}(x)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f'_{n+1}(x)=f_n(x)-f_{n+1}(x).}$$

10. Soit n un élément de $\mathbb{N}$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ L_{n+1}(x)=e^x\,f_{n+1}^{(n+1)}(x)$ donc $\forall x\in\mathbb{R},\ L'_{n+1}(x)=e^x\,f_{n+1}^{(n+1)}(x)+e^x\,f_{n+1}^{(n+2)}(x)=e^x\left(f_{n+1}^{(n+1)}(x)+f_{n+1}^{(n+2)}(x)\right)$.

Or $f'_{n+1}=f_n-f_{n+1}$. En dérivant $n+1$ fois on obtient : $f_{n+1}^{(n+2)}=f_n^{(n+1)}-f_{n+1}^{(n+1)}$ ou $f_{n+1}^{(n+1)}+f_{n+1}^{(n+2)}=f_n^{(n+1)}$.

Alors $\forall x\in\mathbb{R},\ L'_{n+1}(x)=e^x\,f_n^{(n+1)}(x)$

Or $\forall x\in\mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x)=e^{-x}\,L_n(x)$. En dérivant on obtient :

$\forall x\in\mathbb{R},\ f_n^{(n+1)}(x)=-e^{-x}\,L_n(x)+e^{-x}\,L'_n(x)=e^{-x}\left(L'_n(x)-L_n(x)\right)$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ L'_{n+1}(x)=e^x\,f_n^{(n+1)}(x)=e^x\,e^{-x}\left(L'_n(x)-L_n(x)\right)=L'_n(x)-L_n(x)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ L'_{n+1}(x)=L'_n(x)-L_n(x) \text{ ou } \forall n\in\mathbb{N},\ L'_{n+1}=L'_n-L_n.}$$

11. $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_{n+1}(x)=\dfrac{x^{n+1}\,e^{-x}}{(n+1)!}=\dfrac{x}{n+1}\,\dfrac{x^n\,e^{-x}}{n!}=\dfrac{x}{n+1}\,f_n(x)$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f_{n+1}(x)=\dfrac{x}{n+1}\,f_n(x).}$$

12. Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x\in\mathbb{R},\ (n+1)\,L_{n+1}(x)=(n+1)\,e^x\,f_{n+1}^{(n+1)}=e^x\left((n+1)\,f_{n+1}\right)^{(n+1)}(x)$.

Rappelons que $\forall x\in\mathbb{R},\ u_1(x)=x$. Alors $(n+1)\,f_{n+1}=u_1\,f_n$ d'après **Q11**.

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ (n+1)\,L_{n+1}(x)=e^x\left((n+1)\,f_{n+1}\right)^{(n+1)}(x)=e^x\,(u_1\,f_n)^{(n+1)}(x)$.

La formule de Leïbniz donne $(u_1\,f_n)^{(n+1)}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}u_1^{(k)}\,f_n^{(n+1-k)}$.

Or $u_1^{(0)}=u_1,\ u_1^{(1)}=1$ et $\forall k\in[\![2,+\infty[\![,\ u_1^{(k)}=0$.

Alors $(u_1\,f_n)^{(n+1)}=\dbinom{n+1}{0}u_1\,f_n^{(n+1)}+\dbinom{n+1}{1}1\times\ f_n^{(n)}=u_1\,f_n^{(n+1)}+(n+1)\,f_n^{(n)}$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ (n+1)\,L_{n+1}(x)=e^x\,(u_1\,f_n)^{(n+1)}(x)=e^x\left(x\,f_n^{(n+1)}(x)+(n+1)\,f_n^{(n)}(x)\right)$.

Donc $\forall x\in\mathbb{R},\ (n+1)\,L_{n+1}(x)=x\,e^x\,f_n^{(n+1)}(x)+(n+1)\,e^x\ f_n^{(n)}(x)=x\,e^x\,f_n^{(n+1)}(x)+(n+1)\,L_n(x)$.

Remarquons alors que $\forall x\in\mathbb{R},\ f_n^{(n)}(x)=e^{-x}\,L_n(x)$.

Donc en dérivant il vient $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n+1)}(x) = -e^{-x} L_n(x) + e^{-x} L_n'(x)$ ou $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x f_n^{(n+1)}(x) = -L_n(x) + L_n'(x)$ (résultat que nous avions déjà obtenu dans **Q10**)...).

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1) L_{n+1}(x) = x\, e^x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) L_n(x) = x\big(-L_n(x) + L_n'(x)\big) + (n+1) L_n(x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R},\ (n+1) L_{n+1}(x) = x L_n'(x) + (n+1-x) L_n(x)$.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{R},\ (n+1) L_{n+1}(x) = x L_n'(x) + (n+1-x) L_n(x).}$$

$$\boxed{\text{Pour tout élément } n \text{ de } \mathbb{N},\ (n+1) L_{n+1} = X L_n' + (n+1-X) L_n.}$$

13. Soit n dans $\mathbb{N}$. $(n+1) L_{n+1} = X L_n' + (n+1-X) L_n$. En dérivant on obtient :

$(n+1) L_{n+1}' = L_n' + X L_n'' - L_n + (n+1-X) L_n' = X L_n'' - L_n + (n+2-X) L_n'$. Or $L_{n+1}' = L_n' - L_n$.

Ainsi $(n+1)(L_n' - L_n) = X L_n'' - L_n + (n+2-X) L_n'$. Ce qui donne :

$0_{\mathbb{R}[X]} = -(n+1)(L_n' - L_n) + X L_n'' - L_n + (n+2-X) L_n' = X L_n'' - (X-1) L_n' + n L_n$.

$X L_n'' - (X-1) L_n' + n L_n = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X L_n'' - (X-1) L_n' + n L_n = 0_{\mathbb{R}[X]} \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x L_n''(x) - (x-1) L_n'(x) + n L_n(x) = 0.}$$

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

---

14. • Soit k un élément de $\mathbb{N}$.

$k+1$ est strictement positif donc $k+1$ appartient au domaine de définition de la fonction Γ.

Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{(k+1)-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

• Soit A un élément de E. Il existe un élément r de $\mathbb{N}$ et un élément $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbb{R}^{r+1}$ tels que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ A(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k x^k$.

Pour tout élément k de $\mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} a_k x^k e^{-x}\right)\mathrm{d}x$ converge comme combinaison linéaire de $r+1$ intégrales convergentes. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } A \text{ de } E, \text{ l'intégrale } \int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x \text{ est convergente.}}$$

Remarque *On pouvait obtenir l'absolue convergence, donc la convergence, de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\, e^{-x}\,\mathrm{d}x$ *en montrant que* $\left|A(x)\, e^{-x}\right| \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ *par croissance comparée.*

15. • Soit (P, Q) un couple d'éléments de E.

$P\,Q$ appartient à E donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} (PQ)(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge ! Ainsi $< P,Q >$ existe.

$< .,. >$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

• Soit λ un réel et soient P, Q, R trois éléments de E.

$$< \lambda\,P+Q, R >= \int_0^{+\infty} \big(\lambda\,P+Q\big)(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \big(\lambda\,P(x)\,R(x)+Q(x)\,R(x)\big)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

$$< \lambda\,P+Q, R >= \int_0^{+\infty} \big(\lambda\,P(x)\,R(x)\,e^{-x}+Q(x)\,R(x)\,e^{-x}\big)\,\mathrm{d}x = \lambda\int_0^{+\infty} P(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} Q(x)\,R(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

car toutes les intégrales convergent. Alors $< \lambda\,P+Q, R >= \lambda < P,R > + < Q,R >$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q,R) \in E^3,\ < \lambda\,P+Q, R >= \lambda < P,R > + < Q,R >$. $< .,. >$ est linéaire à gauche.

• Soit (P,Q) un couple d'éléments de E. $< P,Q >= \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)\,Q(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} Q(x)\,P(x)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x =< Q,P >$.

$\forall (P,Q) \in E^2,\ < P,Q >=< Q,P >$. $< .,. >$ est symétrique.

• Soit P un élément de E. $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(P(x)\big)^2\,e^{-x} \geqslant 0$ et $0 \leqslant +\infty$! donc $< P,P >= \displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.

$\forall P \in E,\ < P,P > \geqslant 0$. $< .,. >$ est positive.

• Soit P un élément de E tel que $< P,P >= 0$.

▼ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}\,\mathrm{d}x = 0$.

▼ $x \to \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est positive sur $[0,+\infty[$.

▼ $x \to \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$.

▼ $0 \neq +\infty$!

Alors $x \to \big(P(x)\big)^2\,e^{-x}$ est nulle sur $[0,+\infty[$. Comme $x \to e^{-x}$ ne s'annule pas sur $[0,+\infty[: \forall x \in [0,+\infty[,\ \big(P(x)\big)^2 = 0$.

Ainsi $\forall x \in [0,+\infty[,\ P(x) = 0$. La fonction polynômiale P admet alors une infinité de zéro c'est donc la fonction polynômiale nulle. $P = 0_E$.

$\forall P \in E,\ < P,P >\Rightarrow P = 0_E$. $< .,. >$ est définie.

Les cinq points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{< .,. > \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

16. • Soit P un élément de E. $x \to x$, P'', $x \to x-1$ et P' sont des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par produit $x \to x\,P''(x)$ et $x \to (x-1)\,P'(x)$ sont des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par combinaison linéaire $x \to x\,P''(x) - (x-1)\,P'(x)$ est une application polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc un élément de E. Ainsi $T(P)$ appartient à E.

$\forall P \in E,\ T(P) \in E$. T est une application de E dans E.

• Soit λ un réel et soient P, Q deux éléments de E.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x) = x\,(\lambda\,P+Q)''(x) - (x-1)\,(\lambda\,P+Q)'(x) = x\,\big(\lambda\,P''(x)+Q''(x)\big) - (x-1)\,\big(\lambda\,P'(x)+Q'(x)\big)$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x) = \lambda\big(x\,P''(x)+(x-1)\,P'(x)\big) + \big(x\,Q''(x)+(x-1)\,Q'(x)\big) = \lambda\,T(P)(x)+T(Q)(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ T(\lambda\,P+Q)(x) = \big(\lambda\,T(P)+T(Q)\big)(x)$. $T(\lambda\,P+Q) = \lambda\,T(P)+T(Q)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall (P,Q) \in E^2,\ T(\lambda P + Q) = \lambda T(P) + T(Q)$. T est linéaire. Ce qui achève de montrer que :

$$\boxed{T \text{ est un endomorphisme du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } E.}$$

17. Posons $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x\, P'(x)\, e^{-x}$.

φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = P'(x)\, e^{-x} + x\, P''(x)\, e^{-x} + x\, P'(x)\, (-e^{-x}) = (x\, P''(x) - (x-1)\, P'(x))\, e^{-x} = T(P)(x)\, e^{-x}$.

$x \to T(P)(x)\, e^{-x}$ est la dérivée de $x \to x\, P'(x)\, e^{-x}$.

$$\boxed{\text{Pour pout } P \text{ dans } E, \text{ l'application de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} : x \to T(P)(x)\, e^{-x} \text{ est la dérivée de l'application de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} : x \to x\, P'(x)\, e^{-x}.}$$

18. Soient P et Q deux éléments de E.

Rappelons que nous avons posé $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = x\, P'(x)\, e^{-x}$. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = T(P)(x)\, e^{-x}$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\, Q(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \int_0^A \varphi'(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x$. φ et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc nous pouvons intégrer par parties.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\, Q(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \int_0^A \varphi'(x)\, Q(x)\, \mathrm{d}x = \Big[\varphi(x)\, Q(x)\Big]_0^A - \int_0^A \varphi(x)\, Q'(x)\, \mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\, Q(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \varphi(A)\, Q(A) - \varphi(0)\, Q(0) - \int_0^A x\, P'(x)\, e^{-x}\, Q'(x)\, \mathrm{d}x$. Notons que $\varphi(0) = 0$. Alors :

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\, Q(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = A\ P'(A)\, e^{-A}\, Q(A) - \int_0^A x\, P'(x)\, e^{-x}\, Q'(x)\, \mathrm{d}x$.

$\displaystyle\int_0^A T(P)(x)\, Q(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = A\ P'(A)\, Q(A)\, e^{-A} - \int_0^A x\, P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x \quad (1).$

$x \to x\, P'(x)\, Q'(x)$ appartient à E comme produit de trois éléments de E.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A x\, P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\, P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x \qquad (2).$

Montrons maintenant que $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \left(A\ P'(A)\, Q(A)\, e^{-A}\right) = 0$.

$x \to x\, P'(x)\, Q(x)$ est un élément de E comme produit de trois éléments de E.

Si $x \to x\, P'(x)\, Q(x)$ est la fonction nulle de E alors $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \left(A\ P'(A)\, Q(A)\, e^{-A}\right) = 0$!

Supposons maintenant que $x \to x\, P'(x)\, Q(x)$ n'est pas la fonction nulle de E.

Soit r le degré de la fonction polynôme $x \to x\, P'(x)\, Q(x)$ et a_r le coefficient de son terme de plus haut degré.

$\displaystyle\left(A\ P'(A)\, Q(A)\, e^{-A}\right) \underset{A \to +\infty}{\sim} a_r\, A^r\, e^{-A} = a_r\, \frac{A^r}{e^A}$ et $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \left(a_r\, \frac{A^r}{e^A}\right) = 0$ par croissance comparée.

Alors $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \left(A\ P'(A)\, Q(A)\, e^{-A}\right) = 0 \quad (3).$

En faisant tendre A vers $+\infty$ dans (1), et en tenant compte de (2) et (3) on obtient :

$\displaystyle\int_0^{+\infty} T(P)(x)\, Q(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x\, P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$

$$\boxed{\forall (P,Q) \in E \times E,\ < T(P), Q >= -\int_0^{+\infty} x\, P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x.}$$

19. Soit P et Q deux éléments de E. $< T(P), Q >= -\displaystyle\int_0^{+\infty} x\, P'(x)\, Q'(x)\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$.

L'intégrale ne change pas si l'on permute P et Q donc $< T(P), Q >=< T(Q), P >$.

Par symétrie du produit scalaire : $< T(P), Q >=< P, T(Q) >$.

$$\boxed{\forall (P,Q) \in E \times E,\ < T(P), Q >=< P, T(Q) >.}$$

Remarque *T est un endomorphisme symétrique de $(E, < .,. >)$, non ?! Mais il est vrai que le programme se limite aux endomorphismes symétriques d'espaces vectoriels euclidiens...*

20. Soit n dans $\mathbb{N}$. $\forall x \in \mathbb{R},\ T(L_n)(x) = x\, L_n''(x) - (x-1)\, L_n'(x) = -n\, L_n(x)$ d'après **Q13**. Donc $T(L_n) = -n\, L_n$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ T(L_n) = -n\, L_n.}$$

Remarque *Pour tout n dans $\mathbb{N}$, $L_n \neq 0_E$. Donc pour tout n dans $\mathbb{N}$, $-n$ est une valeur propre de T et L_n est un vecteur propre associé.*

Exercice *Montrer que le spectre de T est $\{-n\,,\ n \in \mathbb{N}\}$.*

21. Soient i et j deux éléments distincts de $[\![0, N]\!]$. $< T(L_i), L_j >=< L_i, T(L_j) >$ d'après **Q19**.

Donc $< -i\, L_i, L_j >=< L_i, -j\, L_j >$. Alors $-i\ < L_i, L_j >= -j\ < L_i, L_j >$ et ainsi $(j-i)\ < L_i, L_j >= 0$.

Comme $j - i$ n'est pas nul : $< L_i, L_j >$ est nul.

$\forall (i,j) \in [\![0, N]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow < L_i, L_j >= 0$.

$$\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_N) \text{ est une famille orthogonale de } E.}$$

Remarque *Ce qui n'est pas un scoop car L_0, L_1, ..., L_N sont des vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.*

22. Soit P un élément de E_N. P est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N.

P'' (resp. P') est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $N-2$ (resp. $N-1$).

Alors $x \to x\, P''(x)$ (resp. $x \to (x-1)\, P'(x)$) est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à $N-1$ (resp. N).

Alors les deux fonctions $x \to x\, P''(x)$ et $x \to (x-1)\, P'(x)$ appartiennent à E_N. Leur différence également.

Ainsi $T(P)$ appartient à E.

$$\boxed{\forall P \in E_N,\ T(P) \in E_N.}$$

23. D'après **Q8**, pour tout i dans $[\![0, N]\!]$, L_i est une fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré i.

Donc pour tout i dans $[\![0, N]\!]$, L_i est un élément de E_N.

$(L_0, L_1, \ldots, L_N)$ est une famille orthogonale d'éléments **non nuls** de E_N. C'est donc une famille libre de cardinal $N+1$ de E_N qui est de dimension $N+1$. Alors c'est une base de E_N.

$$\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_N) \text{ est une base de } E_N.}$$

24. $\forall i \in [\![0, N]\!],\ T(L_i) = -i\, L_i$. Donc

$\boxed{\text{la matrice de } T_N \text{ dans la base } (L_0, L_1, \ldots, L_N) \text{ est la matrice diagonale } \mathrm{Diag}(0, -1, -2, \ldots, -N) \text{ de } \mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R}).}$

$$\boxed{M_{(L_0,L_1,\ldots,L_N)}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -N \end{pmatrix}.}$$

25. Restons poli ! Oui T_N est diagonalisable car $(L_0, L_1, \ldots, L_N)$ est une base de E_N constituée de vecteurs propres de T_N ! ! !

$$\boxed{T_N \text{ est diagonalisable.}}$$

0 est valeur propre de T_N donc T_N n'est pas injectif et encore moins bijectif !

$$\boxed{T_N \text{ n'est pas bijectif.}}$$

Partie IV : Nature d'une série de maximums

---

26. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$. g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[,\ g_n'(x) = \dfrac{1}{n!}\Big(n\, x^{n-1}\, e^{-x} + x^n\,(-e^{-x})\Big)$.

$\forall x \in [0, +\infty[,\ g_n'(x) = \dfrac{1}{n!}\, x^{n-1}\, e^{-x}\,(n - x)$.

g_n est continue sur $[0, +\infty[$, $\forall x \in]0, n[,\ g_n'(x) > 0$ et $\forall x \in]n, +\infty[,\ g_n'(x) < 0$.

Ceci suffit pour dire que g_n est strictement croissante sur $[0, n]$ et strictement décroissante sur $[n, +\infty[$.

Donc $\forall x \in [0, n[,\ g_n(x) < g_n(n)$ et $\forall x \in]n, +\infty[,\ g_n(n) > g_n(x)$ et ainsi $\forall x \in [0, n[\cup]n, +\infty[,\ g_n(x) < g_n(n)$.

Dans ces conditions, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ atteint en le seul point n.

$$\boxed{g_n \text{ admet un maximum } M_n \text{ sur } [0, +\infty[\text{ atteint en le seul point } n.\ M_n = g_n(n) = \frac{n^n\, e^{-n}}{n!}\cdot}$$

27. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

$a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n = \ln(\sqrt{n+1}\, M_{n+1}) - \ln(\sqrt{n}\, M_n) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\, \dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right) = \ln\left(\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right)$.

$\dfrac{M_{n+1}}{M_n} = M_{n+1}\, \dfrac{1}{M_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1}\, e^{-(n+1)}}{(n+1)!}\, \dfrac{n!}{n^n\, e^{-n}} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n}\, \dfrac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}}\, \dfrac{(n+1)\, n!}{(n+1)!} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n e^{-1}$. Alors :

$a_n = \ln\left(\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{M_{n+1}}{M_n}\right) = \ln\left(\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n e^{-1}\right) = \ln\left(\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1}\right)$.

$a_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \ln \dfrac{n+1}{n} - 1 = n\left[\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right) \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n}\right]$.

$1 + \dfrac{1}{2n} \underset{n \to +\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ et $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{=} \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Par produit :

$\left(1+\dfrac{1}{2\,n}\right)\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+\dfrac{1}{3n^3}+\dfrac{1}{2n^2}-\dfrac{1}{4n^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right).$

$\left(1+\dfrac{1}{2\,n}\right)\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{3n^3}-\dfrac{1}{4n^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^3}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right).$ Alors :

$a_n = n\left[\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\ \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{1}{n}\right] \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{12n^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right).$

$$\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{12n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

28. Il résulte de **Q27** que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{12n^2}\cdot$ De plus la série de terme général $\dfrac{1}{12n^2}$ est convergente et à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } a_n \text{ converge.}}$$

29. Posons $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n.$

$\forall n\in [\![2,+\infty[\![,\ \ln\mu_n-\ln\mu_1=\sum\limits_{k=1}^{n-1}(\ln\mu_{k+1}-\ln\mu_k)=\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_k.$ $\forall n\in [\![2,+\infty[\![,\ \ln\mu_n=\ln\mu_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}a_k.$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\mu_n=\ln\mu_1+S$ et ainsi la suite $(\ln\mu_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. Notons ℓ sa limite.

Par continuité de la fonction exponentielle en ℓ, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln\mu_n}=e^{\ell}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n=e^{\ell}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (\mu_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge et sa limite est strictement positive.}}$$

30. $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n=e^{\ell}$ et $e^{\ell}\neq 0$ donc $\mu_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\ell}$. Ce qui donne $\sqrt{n}\,M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{\ell}$. Ainsi $M_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{\ell}}{\sqrt{n}}=\dfrac{e^{\ell}}{n^{\frac12}}\cdot$

De plus la série de terme général $\dfrac{e^{\ell}}{n^{\frac12}}$ est divergente, car $\dfrac{1}{2}\leqslant 1$, et à termes positifs.

Les règles de comparaison sur les séries à termes positifs montrent alors que :

$$\boxed{\text{la série de terme général } M_n \text{ diverge.}}$$

Partie V : Étude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

---

31. Posons $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ p_1(x,y)=x,\ p_2(x,y)=y$ et $p_3(x,y)=x+y.$ $F=f\circ p_1+f\circ p_2-f\circ p_3.$

1. p_1, p_2, p_3 sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car ce sont des fonctions polynômes.
2. $\forall (x,y)\in]0,+\infty[^2, p_1(x,y)\in]0,+\infty[,\ p_2(x,y)\in]0,+\infty[$ et $p_3(x,y)\in]0,+\infty[$.
3. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

Alors par composition $f\circ p_1$, $f\circ p_2$ et $f\circ p_3$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.

Donc F de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$ comme combinaison linéaire de trois fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$.

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur }]0,+\infty[^2.}$$

Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$. $\dfrac{\partial(f\circ p_1)}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial p_1}{\partial x}(x,y)\, f'\big(p_1(x,y)\big) = 1 \times f'(x) = f'(x)$.

$\dfrac{\partial(f\circ p_2)}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial p_2}{\partial x}(x,y)\, f'\big(p_2(x,y)\big) = 0 \times f'(y) = 0$.

$\dfrac{\partial(f\circ p_3)}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial p_3}{\partial x}(x,y)\, f'\big(p_3(x,y)\big) = 1 \times f'(x+y) = f'(x+y)$.

Alors $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x) + 0 - f'(x+y) = f'(x) - f'(x+y)$. De même $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(y) - f'(x+y)$.

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x) - f'(x+y) \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(y) - f'(x+y).}$$

$\forall t \in]0,+\infty[, f(t) = t\,e^{-t}$ donc $\forall t \in]0,+\infty[, f'(t) = e^{-t} + t\,(-e^{-t}) = (1-t)\,e^{-t}$. Alors :

$$\boxed{\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2,\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = (1-x)\,e^{-x} - (1-x-y)\,e^{-x-y} \text{ et } \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = (1-y)\,e^{-y} - (1-x-y)\,e^{-x-y}.}$$

Remarque *On obtient sans difficulté, pour tout élément (x,y) de $]0,+\infty[^2$:*

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''(x) - f''(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f''(y) - f''(x+y)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}(x,y) = -f''(x+y)$.

32. Rappelons que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

$\forall t \in]0,+\infty[, f(t) = t\,e^{-t}$, $\forall t \in]0,+\infty[, f'(t) = (1-t)\,e^{-t}$ et $\forall t \in]0,+\infty[, f''(t) = -e^{-t} + (1-t)\,(-e^{-t}) = (t-2)\,e^{-t}$.

f' est continue sur $[2,+\infty[$ et f'' est strictement positive sur $]2,+\infty[$. Cela suffit pour dire que f' est continue et strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

Comme $f'(2) = -e^{-2}$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = 0$ (par croissance comparée), f' définit une bijection de $[2,+\infty[$ sur $[-e^{-2},0[$.

f' est continue sur $]0,2[$ et f'' est strictement négative sur $]0,2[$. f' est continue et strictement décroissante sur $]0,2[$.

Comme $\lim\limits_{t\to 2^-} f'(t) = -e^{-2}$ et $\lim\limits_{t\to 0} f'(t) = 1$, f' définit une bijection de $]0,2[$ sur $]-e^{-2},1[$.

Alors si λ est un réel, l'équation $f'(t) = \lambda$ admet au plus une solution dans $]0,2[$ et au plus une solution dans $[2,+\infty[$ donc au plus deux solutions dans $]0,+\infty[$.

Soit a dans $]0,+\infty[$. L'équation $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = f(a)$ admet a comme solution et admet au plus deux solutions.

Elle admet donc au plus une solution distincte de a.

$$\boxed{\text{Pour tout élément } a \text{ de }]0,+\infty[, \text{ l'équation } x \in]0,+\infty[\text{ et } f'(x) = f'(a) \text{ admet au plus une solution distincte de } a.}$$

Exercice *λ est un réel. Trouver le nombre de solutions de l'équation $x \in]0,+\infty[$ et $f'(x) = \lambda$.*

En déduire, pour tout élément a de $]0,+\infty[$, le nombre de solutions de l'équation $x \in]0,+\infty[$ et $f'(x) = f'(a)$.

33. Soit (x,y) un élément de $]0,+\infty[^2$.

• Supposons que (x,y) est un point critique de F. Alors $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$.

Donc $f'(x) - f'(x+y) = f'(y) - f'(x+y) = 0$. $f'(x+y) = f'(x)$ et $f'(y) = f'(x+y) = f'(x)$.

Donc y et $x+y$ sont deux solutions distinctes de l'équation $t \in]0,+\infty[$ et $f'(t) = f'(x)$. Alors d'apès **Q32** l'une d'entre elle est x.

Ainsi $x + y = x$ ou $x = y$. Notons que $x + y = x$ donne $y = 0$ ce qui n'est pas donc $x = y$.

Alors $f'(2x) = f'(x + y) = f'(x)$. Finalement $y = x$ et $f'(2x) = f'(x)$.

Réciproquement supposons que $y = x$ et $f'(2x) = f'(x)$.

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(x) - f'(x+y) = f'(x) - f'(2x) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(y) - f'(x+y) = f'(x) - f'(2x) = 0$.

$\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$. Ainsi (x,y) est un point critique de F.

Pour tout élément (x,y) de $]0,+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de F si et seulement si $x = y$ et $f'(x) = f'(2x)$.

34. Soit x un réel strictement positif.

$f'(x) = f'(2x) \iff e^{-x}\,(1-x) = e^{-2x}\,(1-2x) \iff e^x(1-x) = 1-2x \iff e^x(1-x) - 1 + 2x = 0$.

Posons $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ell(x) = e^x(1-x) - 1 + 2x$. $\forall x \in]0,+\infty[,\ f'(x) = f'(2x) \iff \ell(x) = 0$.

Montrons alors que ℓ s'annule une fois et une seule sur $]0,+\infty[$.

ℓ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ell'(x) = e^x\,(1-x) + e^x\,(-1) + 2 = 2 - x\,e^x$.

ℓ' est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ell''(x) = -\,e^x - x\,e^x = -(x+1)\,e^x$. $\forall x \in]0,+\infty[,\ \ell''(x) < 0$.

Alors ℓ' est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

De plus $\lim\limits_{x\to 0} \ell'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left(2 - x\,e^x\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - x\,e^x\right) = -\infty$.

Alors ℓ' définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,2[$. 0 appartient à $]-\infty,2[$ donc il existe un unique élément β dans $]0,+\infty[$ tel que $\ell'(\beta) = 0$.

La stricte décroissance de ℓ' sur $]0,+\infty[$ permet de dire que $\forall x \in]0,\beta[,\ \ell'(x) > 0$ et $\forall x \in]\beta,+\infty[,\ \ell'(x) < 0$.

$\ell'(1) = 2 - e$ donc $\ell'(1) < 0$. Alors $1 \in]\beta,+\infty[$ et ainsi $\beta < 1$.

- ℓ est strictement croissante sur $]0,\beta[$ et strictement décroissante sur $[\beta,+\infty[$.
- ℓ est continue sur $]0,\beta[$ et sur $[\beta,+\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \ell(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\beta^-} \ell(x) = \ell(\beta)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ell(x) = -\infty$.

Alors ℓ définit une bijection de $]0,\beta[$ sur $]0,\ell(\beta)[$ et de $[\beta,+\infty[$ sur $]-\infty,\ell(\beta)]$. Notons que $l(\beta) > 0$. Alors :

1. $\forall x \in]0,\beta[,\ \ell(x) > 0$. L'équation $x \in]0,\beta[$ et $\ell(x) = 0$ n'a pas de solution.
2. $0 \in]-\infty,\ell(\beta)]$ donc L'équation $x \in [\beta,+\infty[$ et $\ell(x) = 0$ a une solution et une seule que nous noterons α.

Finalement l'équation $x \in]0,+\infty[$ et $\ell(x) = 0$ admet une solution et une seule α.

Donc l'équation $x \in]0,+\infty[$ et $f'(x) = f'(2x)$ admet une solution et une seule α.

Ainsi, d'après **Q23** F admet un point critique et un seul (α,α).

ℓ est strictement décroissante sur $[\beta,+\infty[$. Rappelons aussi que $\beta < 1$.

Alors comme $\ell(1) = 1$, $\ell(\alpha) = 0$ et $\ell(2) = 3 - e^2 < 0 : 1 < \alpha < 2$.

F admet un point critique et un seul que nous noterons (α,α). De plus $1 < \alpha < 2$.

35. $\forall x \in]0,+\infty[,\ f''(x) = (x-2)\,e^{-x}$.

$f''(\alpha) = (\alpha - 2)\,e^{-\alpha} < 0$ car $\alpha < 2$ et $f''(2\,\alpha) = (2\,\alpha - 2)\,e^{-2\,\alpha} = 2\,(\alpha - 1)\,e^{-2\,\alpha} > 0$ car $\alpha > 1$.

$$\boxed{f''(\alpha) < 0 \text{ et } f''(2\,\alpha) > 0.}$$

36. • F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur **l'ouvert** $]0,+\infty[^2$. Ainsi si F admet un extremum local en un point de $]0,+\infty[^2$, ce point est un point critique de F.

Or (α,α) est l'unique point critique de F sur $]0,+\infty[^2$, donc F admet au plus un extremum local sur $]0,+\infty[^2$ et si F admet un extremum local sur $]0,+\infty[^2$ il est atteint en (α,α).

• Regardons alors si F admet un extremum local en (α,α)

Nous avons déjà dit que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$ et que pour tout élément (x,y) de $]0,+\infty[^2$:

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = f''(x) - f''(x+y)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = f''(y) - f''(x+y)$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(x,y) = -f''(x+y)$.

Posons $r = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\alpha,\alpha)$, $s = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x}(\alpha,\alpha)$ et $t = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\alpha,\alpha)$.

$r = f''(\alpha) - f''(2\,\alpha)$, $s = -f''(2\,\alpha)$, $t = f''(\alpha) - f''(2\,\alpha)$.

$rt - s^2 = \Big(f''(\alpha) - f''(2\,\alpha)\Big)^2 - \Big(-f''(2\,\alpha)\Big)^2 = \Big(f''(\alpha)\Big)^2 - 2\,f''(\alpha)\,f''(2\,\alpha) + \Big(f''(2\,\alpha)\Big)^2 - \Big(f''(2\,\alpha)\Big)^2$.

$rt - s^2 = f''(\alpha)\,\Big(f''(\alpha) - 2\,f''(2\,\alpha)\Big)$.

Rappelons que $f''(\alpha) < 0$ et $f''(2\,\alpha) > 0$. Alors $f''(\alpha) < 0$ et $f''(\alpha) - 2\,f''(2\,\alpha) < 0$ donc $rt - s^2 > 0$.

Ainsi, d'après le cours, F admet en (α,α) un extremum local (strict).

$r = f''(\alpha) < 0$ donc il s'agit d'un maximum local.

Alors les deux points précédents permettent de dire que :

$$\boxed{F \text{ admet un extremum local et un seul. Cet extremum local est un maximum.}}$$

LYON 2012 Premier problème

Partie I : Interpolation polynomiale

1. • φ est une application de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$.

• Soit λ un réel. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\varphi(\lambda P+Q)=\Big(\big(\lambda P+Q\big)(a_1),\big(\lambda P+Q\big)(a_2),\dots,\big(\lambda P+Q\big)(a_n)\Big)$.

$\varphi(\lambda P+Q)=\Big(\lambda P(a_1)+Q(a_1),\lambda P(a_2)+Q(a_2),\dots,\lambda P(a_n)+Q(a_n)\Big)$.

$\varphi(\lambda P+Q)=\lambda\big(P(a_1),P(a_2),\dots,P(a_n)\big)+\big(Q(a_1),Q(a_2),\dots,Q(a_n)\big)=\lambda\,\varphi(P)+\varphi(Q)$.

$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall(P,Q)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]\times\mathbb{R}_{n-1}[X],\ \varphi(\lambda P+Q)=\lambda\,\varphi(P)+\varphi(Q)$. φ est linéaire.

• Soit P un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$. $\big(P(a_1),P(a_2),\dots,P(a_n)\big)=0_{\mathbb{R}^n}$.

Ainsi $P(a_1)=P(a_2)=\cdots=P(a_n)=0$. Donc a_1, a_2, ..., a_n sont n zéros distincts du polynôme P qui est de degré au plus $n-1$. Alors P est le polynôme nul.

Cela suffit pour dire que $\operatorname{Ker}\varphi=\{0_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}\}$ donc que φ est injective.

φ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$ ont **même dimension finie** n, φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.

$$\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ sur } \mathbb{R}^n}.$$

2. Soit $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Soit P un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$\Big(\forall i\in[\![1,n]\!],\ P(a_i)=b_i\Big)\iff\big(P(a_1),P(a_2),\dots,P(a_n)\big)=(b_1,b_2,\dots,b_n)\iff\varphi(P)=(b_1,b_2,\dots,b_n)$.

$\Big(\forall i\in[\![1,n]\!],\ P(a_i)=b_i\Big)\iff P=\varphi^{-1}(b_1,b_2,\dots,b_n)$. Plus de doute :

$$\boxed{\text{il existe un élément } P \text{ de } \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ et un seul tel que} : \forall i\in[\![1,n]\!], P(a_i)=b_i}.$$

3. Notons que 0, 1, 2 et 3 sont quatre réels deux à deux distincts ! Alors il existe un unique élément P_0 de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_0(0)=1$, $P_0(1)=3$, $P_0(2)=11$ et $P_0(3)=31$.

Il existe quatre réels a, b, c, d tels que $P_0=aX^3+bX^2+cX+d$. Notons qu'il est nullement obligatoire de raisonner par équivalences pour trouver a, b, c et d.

Les hypothèses donnent : $\begin{cases}1=P_0(0)=d\\ 3=P_0(1)=a+b+c+d\\ 11=P_0(2)=8a+4b+2c+d\\ 31=P_0(3)=27a+9b+3c+d\end{cases}$.

Alors $\begin{cases}d=1\\ a+b+c=2\\ 4a+2b+c=5\\ 9a+3b+c=10\end{cases}$. Ainsi $\begin{cases}d=1\\ c=2-a-b\\ 3a+b=3\\ 8a+2b=8\end{cases}$ ou $\begin{cases}d=1\\ c=2-a-b\\ 3a+b=3\\ 4a+b=4\end{cases}$.

En retranchant les deux dernières lignes il vient rapidement $a=1$. Ce qui donne $b=0$ et $c=1$.

Finalement $a=1$, $b=0$, $c=1$ et $d=1$. Donc :

$$\boxed{\text{L'unique élément } P_0 \text{ de } \mathbb{R}_3[X] \text{ tel que } P_0(0)=1,\ P_0(1)=3,\ P_0(2)=11 \text{ et } P_0(3)=31 \text{ est } X^3+X+1.}$$

Partie II : Polynômes spéciaux

---

1. P_0 est un élément de $\mathbb{R}[X]$. De plus : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Big(P_0(x)=x^3+x+1>0 \text{ et } P_0'(x)=3\,x^2+1>0\Big)$. Alors :

$$\boxed{X^3+X+1 \text{ est un élément de } E.}$$

2. Soit α un réel strictement positif. Soient P et Q deux éléments de E.

Notons que $\alpha\,P$, $P+Q$ et PQ sont des éléments de $\mathbb{R}[X]$ car P et Q sont des éléments de $\mathbb{R}[X]$ et α est un réel.

Soit x un élément de $]0,+\infty[$. $P(x)>0$, $Q(x)>0$, $P'(x)>0$, $Q'(x)>0$ et $\alpha>0$.

Alors $(\alpha\,P)(x)=\alpha\,P(x)>0$, $(\alpha\,P)'(x)=\alpha\,P'(x)>0$, $(P+Q)(x)=P(x)+Q(x)>0$, $(P+Q)'(x)=P'(x)+Q'(x)>0$, $(PQ)(x)=P(x)\,Q(x)>0$ et $(PQ)'(x)=P'(x)\,Q(x)+P(x)\,Q'(x)>0$. Ceci étant vrai pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0,+\infty[$, on peut alors affirmer que $\alpha\,P$, $P+Q$, PQ sont des éléments de E.

$$\boxed{E \text{ est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication.}}$$

P_0 appartient à E. Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ P_0(x)>0$ donc $\forall x \in]0,+\infty[,\ (-P_0)(x)<0$. Ainsi $-P_0$ n'appartient pas à E. Ce qui permet de dire que :

$$\boxed{E \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X].}$$

3. Soit P un élément de E. P_1 est la primitive de P sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 0 en 0 donc P_1 est un élément de $\mathbb{R}[X]$.

On a déjà : $\forall x \in]0,+\infty[,\ P_1'(x)=P(x)>0$.

Notons alors que P_1 est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$, de dérivée strictement positive sur $]0,+\infty[$.

Ceci suffit pour dire que P_1 est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. Alors $\forall x \in]0,+\infty[,\ P_1(x)>P_1(0)=0$.

Ceci achève de montrer que P_1 est un élément de E.

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est un élément de } E, \text{ l'application } P_1 \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ définie par } \forall x\in\mathbb{R},\ P_1(x)=\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t \text{ est également un élément de } E.}$$

4. Soit P un élément de E. P est continue et dérivable sur $[0,+\infty[$, de dérivée strictement positive sur $]0,+\infty[$. Ceci suffit pour dire que P est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

Ce qui suffit très largement pour dire que $\forall x \in [0,+\infty[,\ P(x)\geqslant P(0)$.

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est dans } E,\ \forall x \in [0,+\infty[,\ P(x)\geqslant P(0).}$$

5. Soit P un élément de E.

• $\widetilde{P}$ est application continue et strictement croissante de $[0,+\infty[$ dans $[P(0),+\infty[$ car P est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

• P n'est pas un polynôme constant car P' n'est pas le polynôme nul puisque $\forall x \in]0,+\infty[,\ P'(x) > 0$. Alors $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ ou $\lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty$. Comme P est strictement positif sur $]0,+\infty[$, nécessairement $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Donc $\lim_{x\to+\infty} \widetilde{P}(x) = +\infty$.

Les deux points précédents montrent que $\widetilde{P}$ est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[P(0),+\infty[$.

$\boxed{\text{Si } P \text{ est un élément de } E,\ \widetilde{P} \text{ est une bijection de } [0,+\infty[\text{ sur } [P(0),+\infty[.}$

6. Soit P est un élément de E de degré au moins deux.

$\forall x \in]0,+\infty[, \widetilde{P}'(x) = P'(x) > 0$. Ceci permet de dire que $\widetilde{P}^{-1}$ est au moins dérivable sur $]P(0),+\infty[$.

De plus $\forall x \in]P(0),+\infty[,\ (\widetilde{P}^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\widetilde{P}'\big(\widetilde{P}^{-1}(x)\big)}$.

Or $\widetilde{P}$ est une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[P(0),+\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} \widetilde{P}(x) = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} \widetilde{P}^{-1}(x) = +\infty$.

P' est un polynôme de degré au moins 1 strictement positif sur $]0,+\infty[$ donc $\lim_{x\to+\infty} P'(x) = +\infty$.

Alors $\lim_{x\to+\infty} \widetilde{P}'(x) = +\infty$ et par composition $\lim_{x\to+\infty} \widetilde{P}'\big(\widetilde{P}^{-1}(x)\big) = +\infty$.

Alors $\lim_{x\to+\infty} (\widetilde{P}^{-1})'(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\widetilde{P}'\big(\widetilde{P}^{-1}(x)\big)} = 0$.

Supposons que $\widetilde{P}^{-1}$ est une application polynômiale. $\widetilde{P}^{-1}$ est alors dérivable sur $[P(0),+\infty[$ et sa dérivée est également une application polynômiale. Alors comme $\lim_{x\to+\infty} (\widetilde{P}^{-1})'(x) = 0$ nécessairement $(\widetilde{P}^{-1})'$ est constante et même nulle sur $[P(0),+\infty[$.

Donc $\widetilde{P}^{-1}$ est constante sur $[P(0),+\infty[$ ce qui contredit le caractère bijectif de $\widetilde{P}^{-1}$.

Donc $\widetilde{P}^{-1}$ n'est pas une application polynomiale.

Si P est un élément de E de degré au moins 2, l'application réciproque $\widetilde{P}^{-1}$ de $\widetilde{P}$ n'est pas une application polynomiale.

Partie III : Matrices symétriques positives

---

1. A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (donc à coefficients réels !). Le cours montre alors que :

$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$

2. a. Supposons que A soit dans $\mathcal{S}_n^+$. Soit λ une valeur propre de A. Il existe un élément U non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AU = \lambda U$.

Alors ${}^tUAU = {}^tU(\lambda U) = \lambda\, {}^tUU = \lambda \|U\|^2$. ${}^tUAU$ est un réel positif ou nul car A appartient à $\mathcal{S}_n^+$ et $\|U\|^2$ est un réel strictement positif car U n'est pas nulle. Dans ces conditions λ est un réel positif ou nul. $\lambda \in [0,+\infty[$.

Donc toutes les valeurs propres de A sont dans $[0,+\infty[$.

$\boxed{\text{Si } A \text{ appartient à } \mathcal{S}_n^+ \text{ alors toutes les valeurs propres de } A \text{ sont dans } [0,+\infty[.}$

b. Réciproquement supposons que toutes les valeurs propres de A sont dans $[0,+\infty[$.

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc il existe une base orthonormée $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$ notons α_i la valeur propre de A associée au vecteur propre U_i.

Par hypothèse $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \alpha_i \geqslant 0$.

Soit U un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ dans la base $(U_1, U_2, \dots, U_n)$.

$U = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i\, U_i$ et $AU = \sum_{i=1}^{n} t_i\, AU_i = \sum_{i=1}^{n} t_i\, \alpha_i\, U_i$.

Comme $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ est une base orthonormée : ${}^tUAU = < U, AU >= \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(t_i\, t_i\, \alpha_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(t_i^2\, \alpha_i\big)$.

Or $\forall i \in [\![1, n]\!],\ t_i^2 \geqslant 0$ et $\alpha_i \geqslant 0$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ t_i^2\, \alpha_i \geqslant 0$. Ainsi ${}^tUAU = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(t_i^2\, \alpha_i\big) \geqslant 0$.

A est alors une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tUAU \geqslant 0$ donc A appartient à $\mathcal{S}_n^+$.

$$\boxed{\text{Si toutes les valeurs propres de } A \text{ sont dans } [0, +\infty[\text{ alors } A \text{ est dans } \mathcal{S}_n^+.}$$

Partie IV : Matrices symétriques positives solution d'une équation polynomiale spéciale

---

1. a. P est de degré $n-1$ donc il existe $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^n$ tel que $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, X^k$ et $c_{n-1} \neq 0$.

$SA = SP(S) = S\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, S^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, S^{k+1}\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, S^k\right) S = P(S)S = AS$. Donc $SA = AS$.

$A = QDQ^{-1}$ donc $D = Q^{-1}AQ$. Rappelons que $\Delta = Q^{-1}SQ$.

Alors $\Delta D = Q^{-1}SQ\, Q^{-1}AQ = Q^{-1}SAQ = Q^{-1}ASQ = Q^{-1}AQ\, Q^{-1}SQ = D\Delta$.

$$\boxed{SA = AS \text{ et } \Delta D = D\Delta.}$$

b. Posons $\Delta = (\delta_{i,j})$ et $D = (d_{i,j})$. Notons que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ d_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Alors $\Delta D = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}\, d_{k,j}\right)$ et $D\Delta = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} d_{i,k}\, \delta_{k,j}\right)$.

En tenant compte de ce qui précède on a encore $\Delta D = (\delta_{i,j}\, \lambda_j)$ et $D\Delta = (\lambda_i\, \delta_{i,j})$.

Comme $\Delta D = D\Delta : \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \delta_{i,j}\, \lambda_j = \lambda_i\, \delta_{i,j}$.

Soient i et j deux éléments distincts de $[\![1, n]\!]$. $\delta_{i,j}\, \lambda_j = \lambda_i\, \delta_{i,j}$ donc $(\lambda_j - \lambda_i)\, \delta_{i,j} = 0$.

i et j étant distincts il en est de même pour λ_i et λ_j. Donc $\lambda_j - \lambda_i$ n'est pas nul. Alors $\delta_{i,j}$ est nul.

$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \delta_{i,j} = 0$ donc Δ est diagonale.

S appartient à $\mathcal{S}_n^+$ donc ses valeurs propres sont des éléments de $[0, +\infty[$. Or S et Δ sont semblables donc ont les mêmes valeurs propres. Par conséquent les valeurs propres de Δ sont des éléments de $[0, +\infty[$.

Comme Δ est diagonale, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Alors les éléments diagonaux de Δ sont des réels positifs ou nuls.

$\boxed{\Delta \text{ est diagonale et ses éléments diagonaux sont tous positifs ou nuls.}}$

Avant de passer à la question suivantes poussons l'avantage.

$P(\Delta) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, \Delta^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, (Q^{-1}SQ)^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, Q^{-1}S^kQ = Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, S^k\right) Q.$

$P(\Delta) = Q^{-1}P(S)Q = Q^{-1}AQ = D$. Alors :

$\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = D = P(\Delta) = P\left(\text{Diag}\left(\delta_{1,1}, \delta_{2,2}, \ldots, \delta_{n,n}\right)\right) = \text{Diag}\ (P(\delta_{1,1}), P(\delta_{2,2}), \ldots, P(\delta_{n,n}))$.

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = P(\delta_{i,i})$. Rappelons que P est dans E et que $\delta_{1,1}$, $\delta_{2,2}$,..., $\delta_{n,n}$ sont des réels positifs.

Ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = P(\delta_{i,i}) = \widetilde{P}(\delta_{i,i})$. Ce qui donne $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \delta_{i,i} = \widetilde{P}^{-1}(\lambda_i)$.

Alors $\Delta = \text{Diag}\ \left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)$.

Or $S = Q\Delta Q^{-1}$ et $\boxed{\text{donc } S = Q\,\text{Diag}\ \left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right) Q^{-1}.}$

2. Ici le concepteur ne nous a pas fait de cadeau car il nous oblige à montrer que le problème admet une solution et une seule (normal et simple) et qu'en plus la solution s'écrit $\mathbf{Q\Delta Q^{-1}}$ où $\mathbf{\Delta}$ est diagonale (pas de problème) et où Q est la matrice qu'il a fixé au départ, non ? Le dernier point coince un peu...

Posons $\Delta_0 = \text{Diag}\ \left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)$ et $S_0 = Q\Delta_0 Q^{-1}$.

La question précédente montre que si S est solution : $S = S_0$. Cela montre que l'équation proposée admet au plus une solution et que s'il existe une solution cela ne peut être que S_0.

On s'apprête donc gentiment à montrer que S_0 est solution. Pas de difficulté pour montrer que $P(S_0) = A$ et que les valeurs propres de S_0 sont positives ou nulles. C'est moins facile de montrer que S_0 est symétrique... sauf si Q est orthogonale (ce qui n'est pas dans le texte). Rusons...

A est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Pour tout i dans $[\![1, n]\!]$ considérons un vecteur propre unitaire V_i associé à la valeur propre λ_i.

Les sous-espaces propres de A étant deux à deux orthogonaux, $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est une famille orthogonale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Mieux c'est une famille orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ car V_1, V_2, ..., V_n sont unitaires.

$(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est alors une famille orthonormée donc une famille libre de cardinal n de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension n, c'est donc une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Mieux $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres λ_1, λ_2, ..., λ_n.

Soit alors Q_1 la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$. Q_1 est orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée.

De plus $Q_1^{-1}AQ_1 = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. $A = Q_1\text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)Q_1^{-1}$.

Posons alors $S_1 = Q_1\Delta_0 Q_1^{-1} = Q_1\Delta_0\,{}^tQ_1$ et montrons que S_1 est solution.

- ${}^tS_1 = {}^t\big(Q_1\Delta_0\,{}^tQ_1\big) = {}^t({}^tQ_1)\,{}^t\Delta_0\,{}^tQ_1 = Q_1\Delta_0\,{}^tQ_1 = S_1$ car Δ_0 est diagonale. Donc S_1 est symétrique.

S_1 et Δ_0 sont semblables donc ont mêmes valeurs propres. Or $\Delta_0 = \text{Diag}\ \left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)$ donc les valeurs propres de Δ_0 sont $\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1)$, $\widetilde{P}^{-1}(\lambda_2)$, ..., $\widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)$. Comme $\widetilde{P}^{-1}$ est une application de $[P(0), +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, les valeurs propres de Δ_0 et donc de S_1 sont des éléments de $[0, +\infty[$.

Ceci achève de montrer que S_1 est dans $\mathcal{S}_n^+$.

- Montrons que $P(S_1) = A$.

$P(S_1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, S_1^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, (Q_1 \Delta_0 Q_1^{-1})^k = \sum_{k=0}^{n-1} c_k\, Q_1 \Delta_0^k Q_1^{-1} = Q_1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\, \Delta_0^k \right) Q_1^{-1}.$

$P(S_1) = Q_1 P(\Delta_0) Q_1^{-1}$. Calculons $P(\Delta_0)$.

$P(\Delta_0) = P\left(\mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)\right).$

$P(\Delta_0) = \mathrm{Diag}\left(P\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1)\right), P\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_2)\right), \ldots, P\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)\right).$

$\forall i \in [\![1, n]\!], \widetilde{P}^{-1}(\lambda_i) \in [0, +\infty[$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!],\ P\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_i)\right) = \widetilde{P}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_i)\right) = \lambda_i.$

Ainsi $P(\Delta_0) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ et $P(S_1) = Q_1 P(\Delta_0) Q_1^{-1} = Q_1 \mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) Q_1^{-1} = A$.

S_1 appartient à $\mathcal{S}_n^+$ et $P(S_1) = A$ donc S_1 est solution. Finalement :

$$\boxed{\text{L'équation } S \in \mathcal{S}_n^+ \text{ et } P(S) = A \text{ admet une solution et une seule.}}$$

Nous avons vu que S_1 est solution et que si S est solution :

$S = Q\,\mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right) Q^{-1}.$

Donc $S_1 = Q\,\mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right) Q^{-1}.$

Ainsi $Q\,\mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right) Q^{-1}$ est la solution. Cela permet alors de dire que :

> Si Q est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = Q\mathrm{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)Q^{-1}$, la solution de l'équation $S \in \mathcal{S}_n^+$ et $P(S) = A$ est $Q\Delta_0 Q^{-1}$ où Δ_0 est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}\left(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)\right)$.

3. a. $P = X^3 + X + 1$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$.

De plus $\forall x \in]0, +\infty[,\ P(x) = x^3 + x + 1 > 0$ et $P'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Alors :

$$\boxed{P = X^3 + X + 1 \text{ est un élément de } E.}$$

b. Soit λ un réel et soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

$$AU = \lambda U \iff \begin{cases} 2x - y = \lambda\, x \\ -x + 2y = \lambda\, y \\ 21z + 10t = \lambda\, z \\ 10z + 21t = \lambda\, t \end{cases} \iff \begin{cases} y = (2 - \lambda)x \\ -x + (2 - \lambda)y = 0 \\ t = \dfrac{1}{10}\,(\lambda - 21)z \\ 10z + (21 - \lambda)t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = (2 - \lambda)x \\ \big((2 - \lambda)^2 - 1\big)x = 0 \\ t = \dfrac{1}{10}\,(\lambda - 21)z \\ \dfrac{1}{10}\big(10^2 - (\lambda - 21)^2\big)z = 0 \end{cases}.$$

$$AU = \lambda U \iff \begin{cases} (1 - \lambda)(3 - \lambda)x = 0 \\ y = (2 - \lambda)x \\ (\lambda - 11)(31 - \lambda)z = 0 \\ t = \dfrac{1}{10}\,(\lambda - 21)z \end{cases}.$$

Si λ n'appartient pas à $\{1, 3, 11, 31\}$, $AU = \lambda U \iff x = y = z = t = 0 \iff U = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ donc λ n'est pas valeur propre.

Si $\lambda = 1$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 3$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 11$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = -z \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = 31$, $AU = \lambda U \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ t = z \end{cases}$ donc λ est valeur propre de A et le sous espace propre associé est la droite vectorielle de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ engendrée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } A \text{ sont } 1,\ 3,\ 11 \text{ et } 31.}$$

Remarque Nous aurions pu remarquer que A est la matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \\ 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} & A_2 \end{pmatrix}$ *avec* $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $A_2 = \begin{pmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 21 \end{pmatrix}$ *et utiliser que* $\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} A_1 \cup \operatorname{Sp} A_2$*...*

A est clairement symétrique et ses valeurs propres sont des éléments de $[0, +\infty[$ donc :

$$\boxed{A \text{ appartient à } \mathcal{S}_4^+.}$$

c. $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}$.

Posons $V_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $V_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Posons encore $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 11$ et $\lambda_4 = 31$.

Pour tout i dans $[\![1, 4]\!]$, (V_i) est une base orthonormée de SEP (A, λ_i). De plus $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}) = \bigoplus_{i=1}^{4} \text{SEP}\ (A, \lambda_i)$ et, SEP (A, λ_1), SEP (A, λ_2), SEP (A, λ_3), SEP (A, λ_4) sont deux à deux orthogonaux. Alors (V_1, V_2, V_3, V_4) est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres 1, 3, 11 ; 31.

Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ à la base (V_1, V_2, V_3, V_4). Q est orthogonale comme matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée et $Q^{-1}AQ$ est la matrice diagonale $\operatorname{Diag}(1, 3, 11, 31)$.

Notons que $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et que $A = QDQ^{-1}$ où D est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}\,(1, 3, 11, 31)$.

$Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $A = QDQ^{-1}$ où D est la matrice diagonale $\mathrm{Diag}\,(1, 3, 11, 31)$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

d. Dans ces conditions et d'après ce qui précède, l'équation $S \in \mathcal{S}_1^+$ et $P(S) = A$ admet une solution et une seule qui est $S_0 = Q\,\mathrm{Diag}\,\big(\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_2), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_3), \widetilde{P}^{-1}(\lambda_4)\big)Q^{-1}$.

Notons que $S_0 = Q\,\mathrm{Diag}\,\big(\widetilde{P}^{-1}(1), \widetilde{P}^{-1}(3), \widetilde{P}^{-1}(11), \widetilde{P}^{-1}(31)\big)Q^{-1}$.

Or $P = X^3 + X + 1 = P_0$. Donc **I Q3.** donne $P(0) = 1 = \lambda_1$, $P(1) = 3 = \lambda_2$, $P(2) = 11 = \lambda_3$ et $P(3) = 31 = \lambda_4$.

Comme P est dans E et 0, 1, 2, 3 sont des éléments de $[0, +\infty[$: $\widetilde{P}^{-1}(1) = 0$, $\widetilde{P}^{-1}(3) = 1$, $\widetilde{P}^{-1}(11) = 2$, $\widetilde{P}^{-1}(31) = 3$.

Alors $S_0 = Q\,\mathrm{Diag}\,(0, 1, 2, 3)\,Q^{-1} = Q\,\mathrm{Diag}\,(0, 1, 2, 3)\,{}^tQ$.

$$S_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{Diag}\,(0, 1, 2, 3)\, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$S_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'équation $S \in \mathcal{S}_4^+$ et $P(S) = A$ admet une solution et une seule : $\dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.
