Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1997

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve

(option scientifique)

Lundi 28 avril 1997 de 8 heures à 12 heures

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

PREMIER PROBLÈME

On note E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'application $\begin{array}{rcl} \phi : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_0^1 f(t)g(t)\,dt \end{array}$

   est un produit scalaire sur E.

On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On note E_n le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ et de degré inférieur ou égal à $n-1$, et, pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, $\begin{array}{rcl} e_i : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^{i-1} \end{array}$.

On rappelle que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E_n.

2. Calculer, pour tout (i,j) de $\{1, \ldots, n\}^2$, $\phi(e_i, e_j)$.

On considère la matrice carrée réelle d'ordre n :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} .$$

3. **<u>Étude du cas n = 2</u>**

a. Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2.

b. La matrice H_2 est-elle diagonalisable ?

c. Montrer que la matrice H_2 est inversible et calculer son inverse.

Dans toute la suite du problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

4. Établir que la matrice H_n est diagonalisable.

5. a. Soient $P \in E_n$, $Q \in E_n$.

On note $a_1, \dots, a_n$ les réels tels que $P = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $b_1, \dots, b_n$ les réels tels que $Q = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i$,

A et B les matrices-colonnes définies par : $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Montrer : $\phi(P,Q) = {}^tA\, H_n\, B$ où ${}^tA$ désigne la transposée de A.

b. En déduire que les valeurs propres de la matrice H_n sont toutes strictement positives.

c. La matrice H_n est-elle inversible ?

6. Soit $f \in E$. On note, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta_i = \phi(e_i, f)$.

On considère les matrices-colonnes B et A_0 définies par $B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $A_0 = H_n^{-1} B$.

On note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les réels tels que $A_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, et P_0 le polynôme défini par : $P_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

On considère l'application $d : E_n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$P \longmapsto \|P - f\|$$

a. Montrer : $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\phi(e_i, P_0 - f) = 0$.

b. En déduire : $\forall Q \in E_n$, $\phi(Q, P_0 - f) = 0$.

c. Établir : $\forall P \in E_n$, $\|P - f\|^2 = \|P - P_0\|^2 + \|P_0 - f\|^2$.

d. Démontrer que d admet un minimum et que ce minimum est atteint en P_0 et en P_0 seulement.

e. Montrer : $\|P_0 - f\|^2 = \|f\|^2 - \|P_0\|^2$.

f. **<u>Un exemple :</u>**

On choisit ici $n = 2$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$t \longmapsto \left| t - \frac{1}{3} \right|$$

Calculer P_0 et $d(P_0)$, et donner une valeur approchée décimale de $d(P_0)$ à 10^{-8} près.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1998

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Lundi 4 mai 1998 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Notations :

E désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles.
n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
E_n désigne l'ensemble des fonctions polynômes réelles de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout entier naturel non nul k, X^k désigne la fonction polynôme $t \longmapsto t^k$.
Une fonction polynôme P non nulle est dite unitaire lorsque son coefficient dominant est égal à 1 (c'est-à-dire que, si d est le degré de P, alors $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \cdots + a_0$, où $a_0,\ a_1, \cdots,\ a_{d-1}$ sont des réels).

PARTIE I : Etude d'un produit scalaire.

1.a. Montrer que, pour toute fonction polynôme P de E, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, dt$ est convergente.

b. Pour tout entier naturel k, on note $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\, dt$.

Déterminer une relation entre I_k et I_{k+1} . En déduire que $I_k = k!$.

On considère l'application notée $<.,.>$ de $E_n \times E_n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$<P,Q> = \int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t}\, dt \ .$$

2.a. Montrer que $<.,.>$ est un produit scalaire sur E_n.

b. Pour tout couple $(i\,,\,j)$ d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n, calculer $<X^i, X^j>$.

Dans la suite du problème, E_n est muni de ce produit scalaire.

3.a. Construire une famille orthogonale $(Q_0,\ Q_1,\ Q_2)$ de trois fonctions polynômes telle que pour tout k de $\{0,\ 1,\ 2\}$, Q_k soit unitaire et de degré k (on pourra utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt).
On vérifiera que $Q_2 = X^2 - 4X + 2$.

b. Montrer pour tout couple (u, v) de réels :

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2\, e^{-t} dt = < Q_2, Q_2 > + (u+4)^2 < Q_1, Q_1 > + (u+v+2)^2 < Q_0, Q_0 > .$$

c. Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ qui à tout couple (u, v) de réels associe l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2\, e^{-t} dt \ .$$

Déduire de la question précédente que H admet un minimum que l'on calculera.

PARTIE II : Construction d'une base orthogonale.

Soit Φ l'application définie sur E_n par :

$$\forall P \in E_n, \quad \Phi(P) = XP''(X) + (1-X)P'(X)$$

c'est-à-dire que $\Phi(P)$ est la fonction polynôme définie pour tout réel t par :

$$\Phi(P)(t) = t\, P''(t) + (1-t)P'(t) \ .$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E_n et déterminer la matrice associée à Φ relativement à la base canonique $(1,\ X, \cdots, X^n)$ de E_n .

2.a. Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$. Montrer que la famille $\left(\Phi(X^j) + kX^j\right)_{0 \leqslant j \leqslant k}$ est liée.
En déduire que $-k$ est valeur propre de Φ.

b. Montrer que Φ est diagonalisable.

c. Montrer que la dimension de chaque sous-espace propre est égale à 1.
En déduire que, pour tout k appartenant à $\{0, \cdots, n\}$, il existe une unique fonction polynôme unitaire P_k vérifiant $\Phi(P_k) = -k\, P_k$.

d. Déterminer, pour tout k appartenant à $\{0, \cdots, n\}$, le degré de P_k .

e. Vérifier que $P_0 = Q_0, \quad P_1 = Q_1, \quad P_2 = Q_2$.

3.a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall (P, Q) \in (E_n)^2, \quad < \Phi(P), Q > = -\int_0^{+\infty} t\, P'(t)\, Q'(t)\, e^{-t} dt \ .$$

Indication : on pourra comparer la dérivée de la fonction $\left(t \mapsto tP'(t)e^{-t}\right)$ avec la fonction $\left(t \mapsto \Phi(P)(t)\ e^{-t}\right)$.

b. En déduire que Φ est un endomorphisme symétrique de E_n .

c. En déduire que la famille $(P_0,\ P_1, \cdots, P_n)$ est une base orthogonale de E_n .

PARTIE III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale.

On note $a = 2 + \sqrt{2}$ et $b = 2 - \sqrt{2}$ les deux racines de P_2 .

1.a. Déterminer deux réels α et β tels que, pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 1, on ait : $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, dt = \alpha\, P(a) + \beta\, P(b)$.

b. Vérifier : $$\int_0^{+\infty} P_2(t)\, e^{-t}\, dt = \alpha\, P_2(a) + \beta\, P_2(b) .$$

c. Soit P une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 3 .
Montrer qu'il existe deux fonctions polynômes Q et R, chacune de degré inférieur ou égal à 1, telles que $P = Q\, P_2 + R$.
Montrer : $< P_2, Q > = 0$.
En déduire : $$\int_0^{+\infty} P(t)\, e^{-t}\, dt = \alpha\, P(a) + \beta\, P(b) .$$

Dans la suite du problème, on considère une fonction f réelle quatre fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et dont la dérivée quatrième $f^{(4)}$ est continue et bornée sur $[0, +\infty[$.
Soit M un réel tel que : $\forall t \in [0, +\infty[, \quad |f^{(4)}(t)| \leqslant M$.

2.a. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, déterminer une fonction polynôme T de degré inférieur ou égal à 4 telle que :
$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad 0 \leqslant |f(t)| \leqslant T(t) .$$
En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-t}\, dt$ converge.

b. Soit D l'application de E_3 dans $\mathbb{R}^4$ définie par :
$$\forall P \in E_3, \quad D(P) = \Big(P(a),\ P'(a),\ P(b),\ P'(b)\Big) .$$
Montrer que D est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

c. En déduire l'existence d'un unique polynôme S de E_3 tel que :
$$S(a) = f(a), \quad S'(a) = f'(a), \quad S(b) = f(b), \quad S'(b) = f'(b) .$$

3. Soit x_0 un réel positif ou nul, différent de a et de b.
On définit la fonction g sur $[0, +\infty[$ par :
$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad g(t) = f(t) - S(t) - \frac{f(x_0) - S(x_0)}{\big(P_2(x_0)\big)^2} \big(P_2(t)\big)^2 .$$

a. Vérifier que g s'annule en a, b et x_0 .

b. En déduire que g' admet au moins quatre zéros deux à deux distincts (dont a et b), puis qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $g^{(4)}(c) = 0$
(On étudiera avec soin le cas $a < x_0 < b$ et on expliquera pourquoi les autres cas sont similaires).

c. En déduire : $$f(x_0) - S(x_0) = \frac{\big(P_2(x_0)\big)^2}{4!} f^{(4)}(c) \ ,$$

puis : $$\Big|f(x_0) - S(x_0)\Big| \leqslant \frac{\big(P_2(x_0)\big)^2}{4!} M.$$

4.a. Etablir : $$\forall x \in [0, +\infty[, \quad \Big|f(x) - S(x)\Big| \leqslant \frac{\big(P_2(x)\big)^2}{4!} M \ .$$

b. En déduire : $$\left| \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-x}\, dx - \alpha f(a) - \beta f(b) \right| \leqslant \frac{M}{6} \ .$$

5. ***Application :***

Soit $f \ : \ [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout t de $[0, +\infty[$, par : $f(t) = \dfrac{1}{10+t}$.

En admettant que $\quad 0.0915 \ \leqslant \ \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} f(2+\sqrt{2}) + \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} f(2-\sqrt{2}) \ \leqslant \ 0.0916$,

donner une valeur décimale approchée de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t}\, dt$. On en indiquera la précision.

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Mardi 2 mai 2000 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PREMIER PROBLÈME

Notations :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3 .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels .
  I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  La transposée d'une matrice M est notée ${}^{t}M$.
- $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$ défini par :

  si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, alors $\langle\, x\, ,\, y\,\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

  En notant les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et en confondant les matrices d'ordre 1 et les scalaires, on a alors $\langle\, x\, ,\, y\,\rangle = {}^{t}X\,Y$.
  La norme associée à ce produit scalaire est notée $\|\ \ \|$.
- $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
  On rappelle que la matrice de passage P d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ vérifie ${}^{t}P = P^{-1}$.

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

1. On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

a. Justifier que S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = P\,D\,{}^tP$.

2. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Vérifier que $(M - 2\mathrm{I}_3)^3 = \mathrm{I}_3$.

b. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

c. Calculer le produit ${}^tM\,M$.

Partie II

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice ${}^tA$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer, pour tout x et tout y de $\mathbb{R}^n$:

$$\langle\, g(y)\,,\, x\,\rangle = \langle\, y\,,\, f(x)\,\rangle \quad \text{puis} \qquad \langle\, (g\circ f)(x)\,,\, x\,\rangle = \|f(x)\|^2.$$

2. Montrer que l'endomorphisme $g \circ f$ est symétrique.

3. Montrer que $g \circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.

4. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $g \circ f$.

On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

5. Montrer l'existence de n réels positifs ou nuls $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ (non nécessairement distincts) tels que la matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie : ${}^tA\,A = Q\,\Delta^2\,{}^tQ$.

6. Montrer que la famille $\big(f(e'_1), f(e'_2), \ldots, f(e'_n)\big)$ est une famille orthogonale et que pour tout entier j de $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\|f(e'_j)\| = \mu_j$.

7. Dans cette question, on suppose que A est inversible.

a. Vérifier que les nombres réels $\mu_1,\ \mu_2\ , \ldots, \mu_n$ sont tous non nuls.

b. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \left(\dfrac{1}{\mu_1}f(e'_1), \dfrac{1}{\mu_2}f(e'_2), \ldots, \dfrac{1}{\mu_n}f(e'_n)\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

c. Soit R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Montrer que $A = R\,\Delta\,{}^tQ$.

Partie III

Déterminer deux matrices orthogonales Q et R d'ordre 3 et une matrice diagonale Δ d'ordre 3 telles que $M = R\,\Delta\,{}^tQ$ où M est la matrice définie dans *I. 2* .

LYON 2002

DEUXIÈME PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$.

L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes u de E tels que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x) , x \rangle = 0.$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

PARTIE I. Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1,\ \mathrm{X},\ \mathrm{X}^2)$ est une base de E.

On considère l'application $\varphi\ :\ E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout couple (P, Q) d'éléments de E par :

$$\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire.

Dans cette première partie, on considère que E est muni de ce produit scalaire.

2. On considère l'endomorphisme u de E défini pour tout P de E par :

$$u(P) = 2P'(0)\mathrm{X}^2 - \big(P(1) + P(-1)\big)\,\mathrm{X}.$$

a. Vérifier : $\quad \forall P \in E, \quad 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0.$

b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E.

3. Soient $P_1 = \dfrac{1}{2}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X})$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}\,u(P_1)$.

a. Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille $(P_1,\ P_2)$ est orthonormale.

b. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} u$.

c. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PARTIE II. Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E.

1. Pour tout couple $(x,\ y)$ de E^2, développer $\langle u(x+y) , x+y \rangle$.

En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\forall (x,\ y) \in E^2, \quad \langle u(x) , y \rangle = -\langle x , u(y) \rangle.$$

2. On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$.

a. Montrer : $\quad \forall (i,\ j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad m_{i,j} = \langle e_i , u(e_j) \rangle.$

b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tM = -M$.

PARTIE III. Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E.
On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question *II.1*.

1. Soit λ un nombre réel. Montrer que si λ est valeur propre de u, alors $\lambda = 0$.

2. Montrer que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E.
En déduire que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$.

3. Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et que toute valeur propre de u^2 est négative ou nulle.

4.a. Montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.
Soient x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\big(x, u(x)\big)$.

b. Montrer que F est un plan vectoriel stable par u.

c. Montrer que $F^{\perp}$, le supplémentaire orthogonal de F, est stable par u.

d. On munit $F^{\perp}$ du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle_1$ défini pour tout couple (x, y) d'éléments de $F^{\perp}$ par
$$\langle x , y \rangle_1 = \langle x , y \rangle.$$
On définit l'endomorphisme u_1 de $F^{\perp}$ par : $\quad \forall x \in F^{\perp}, \ \ u_1(x) = u(x)$.
Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^{\perp}$ et que $\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1$.

5. Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de E.

PARTIE IV. Application

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4)$ est une base orthonormale de E.
Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E.
Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est vecteur propre de u^2.

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\big(f_1,\ u(f_1)\big)$. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^{\perp}$.

3. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice
associée à u relativement à $\mathcal{B}_0$ soit $\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$.

\- FIN -

LYON 2003

SECOND PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E est un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ et la norme associée est notée $\|\,.\,\|$.

On note id_E l'application identique de E, et $\widetilde{0}$ l'application nulle de E.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^{\perp}$ le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F dans E.
Le projecteur de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelé projecteur orthogonal sur F.

Pour tout endomorphisme f de E et toute valeur propre λ de f, on note $E_f(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

On considère un endomorphisme symétrique f de E, c'est-à-dire un endomorphisme f tel que :

$$\forall (x,\, y) \in E^2, \quad \langle f(x)\,,\, y \rangle = \langle x\,,\, f(y) \rangle.$$

On suppose de plus que f est non inversible et non nul.

1. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au-moins une valeur propre non nulle.

2.a. Soient λ et μ deux valeurs propres de f.
Montrer, pour tout vecteur x de $E_f(\lambda)$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

$$\lambda\langle x\,,\, y \rangle = \mu\langle x\,,\, y \rangle.$$

b. En déduire que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_k$ avec $k \geqslant 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|$.

Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_j)$.

4. Soit x un vecteur de E.

a. Montrer qu'il existe un unique $(k+1)$-uplet $(x_0,\ x_1, \ldots, x_k)$ de $E_f(0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$.

b. Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, montrer : $p_j(x) = x_j$.

Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$\mathrm{id}_E = p_0 + p_1 + \cdots + p_k.$$

5.a. Etablir, pour tout couple (i, j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$i \neq j \Rightarrow \ p_i \circ p_j = \widetilde{0}.$$

b. Montrer : $\quad f = \lambda_1\, p_1 + \lambda_2\, p_2 + \cdots + \lambda_k\, p_k.$

c. Montrer que le projecteur orthogonal p sur $\mathrm{Im}\, f$ vérifie :

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k.$$

On note $f^\sharp$ l'endomorphisme de E défini par $f^\sharp = \dfrac{1}{\lambda_1}p_1 + \dfrac{1}{\lambda_2}p_2 + \cdots + \dfrac{1}{\lambda_k}p_k$.
On dit que $f^\sharp$ est l'inverse généralisé de f.

6. a. Montrer : $f \circ f^\sharp = p$.

b. En déduire : $\forall (x, y) \in E^2, \; \Big(f(x) = p(y) \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f \Big)$.

7. Soit y un vecteur de E.

a. Montrer : $\forall x \in E, \; \Big(\| f(x) - y \| = \operatorname*{Inf}_{z \in E} \| f(z) - y \| \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \operatorname{Ker} f \Big)$.

b. En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant :

$$\| f(x) - y \| = \operatorname*{Inf}_{z \in E} \| f(z) - y \|.$$

Partie II : Application à un exemple

Dans cette question, E est un espace euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.

2. Montrer que f admet exactement trois valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_1)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.
On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_2)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Montrer : $A = 2M_1 + 4M_2$.

4. a. Montrer que $E_f(\lambda_2)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de $E_f(\lambda_2)$ tel que $\|v_2\| = 1$.

b. Montrer : $\forall x \in E, \; p_2(x) = \langle x \, , \, v_2 \rangle \, v_2$.

c. Déterminer la matrice M_2.

5. En déduire la matrice associée à $f^\sharp$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

M. Cossutta -
c. 529

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

Code sujet
295
EML__MATS

Première épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 29 avril 2008 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée

PROBLÈME

On confond polynôme et application polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note E l'ensemble des applications $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $\mathbb{R}$ et telles que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big(u(x)\big)^2 \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ converge.

On note F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n.

Préliminaire : Valeur de l'intégrale de Gauss

En considérant une variable aléatoire suivant une loi normale, justifier :

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x-m)^2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

Partie I : Un produit scalaire sur E

1. Établir, pour tout $(\alpha, \beta) \in [0\,;+\infty[^2$: $\alpha\beta \leqslant \dfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)$.

2. En déduire que, pour tout $(u,v) \in E^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.

On note $(.\,|\,.)$ l'application de E^2 dans $\mathbb{R}$ qui, à tout $(u,v) \in E^2$, associe $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,v(x)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

On notera la présence du facteur $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

3. **a.** Démontrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b. Montrer que l'application $(.\,|\,.)$ est un produit scalaire sur E.

4. Démontrer : $F \subset E$.

On note encore $(.\,|\,.)$ la restriction à F ou à F_n, pour $n \in \mathbb{N}$, du produit scalaire $(.\,|\,.)$ sur E. On admet que cette restriction est encore un produit scalaire sur F ou sur F_n.

On note $\|.\|$ la norme sur E associée au produit scalaire $(.\,|\,.)$, définie, pour tout $u \in E$, par :

$$\|u\| = \sqrt{(u\,|\,u)}.$$

Partie II : Polynômes d'Hermite

On note w l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞, définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $w(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note H_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} w^{(n)}(x), \text{ où } w^{(n)} \text{ désigne la dérivée } n\text{-ième de } w.$$

En particulier : $H_0(x) = 1$.

1. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, $H_3(x)$.
Faire figurer les calculs sur la copie.

2. **a.** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x).$$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme de degré n .

c. Contrôler alors les résultats obtenus en **II.1** et calculer H_4.
Faire figurer les calculs sur la copie.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient du terme de plus haut degré de H_n.

4. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.
Qu'en déduit-on, en terme de parité, pour l'application H_n ?

Partie III : Lien entre le produit scalaire et les polynômes d'Hermite

1. **a.** Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F$:
$$(P' \mid H_{n-1}) = (P \mid H_n),$$
où $(.\,|\,.)$ est le produit scalaire sur F défini en **I.4.**
À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $P \in F_{n-1}$: $(P \mid H_n) = 0$.

c. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est orthogonale dans F.

2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de F_n.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer : $\|H_n\|^2 = (H_n^{(n)} \mid H_0)$, où $\|.\|$ est définie en **I.4.**

b. En déduire la valeur de $\|H_n\|$.

Partie IV : Un endomorphisme symétrique

On note f, g, h les applications définies de F dans F, pour tout $P \in F$, par :
$$f(P) = -P'' + 2\mathrm{X}P' + P, \quad g(P) = 2\mathrm{X}P - P', \quad h(P) = P'.$$
Ainsi, par exemple, pour tout $P \in F$ et tout $x \in \mathbb{R}$: $\big(g(P)\big)(x) = 2xP(x) - P'(x)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de F.

On admet que g et h sont aussi des endomorphismes de F, et on note Id_F l'application identique de F.

2. **a.** Établir : $g \circ h = f - \mathrm{Id}_F$ et $h \circ g = f + \mathrm{Id}_F$.

b. En déduire : $f \circ g - g \circ f = 2g$.

3. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P \in F$, si $f(P) = \lambda P$, alors $f\big(g(P)\big) = (\lambda + 2)g(P)$.

4. **a.** Calculer $f(H_0)$.

b. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g(H_k)$, et en déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $f(H_k) = (2k+1)H_k$.

5. Établir, pour tout $(P, Q) \in F^2$:
$$(P' \mid Q') = \big(f(P) \mid Q\big) - (P \mid Q).$$
À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un intervalle fermé borné.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. Montrer : $\forall P \in F_n, \ f(P) \in F_n$.

On note f_n l'endomorphisme de F_n défini par :
$$\forall P \in F_n, \ f_n(P) = f(P).$$

b. Montrer que f_n est un endomorphisme symétrique de F_n.

c. Donner une base orthonormale de F_n constituée de vecteurs propres de f_n.

Partie V : Intervention d'exponentielles

On note, pour tout $a \in \mathbb{R}$, φ_a l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi_a(x) = \mathrm{e}^{ax}$.

1. Vérifier, pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\varphi_a \in E$.

2. Montrer, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$: $(\varphi_a \,|\, \varphi_b) = \mathrm{e}^{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$.

3. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} ||\varphi_{\sqrt{\ln n}}||^{-2}$.

4. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} ||\varphi_{\sqrt{n}}||^{-2}$ converge et calculer sa somme.

Partie VI : Une limite de probabilité conditionnelle

Soit la fonction Φ définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que Φ est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer sa dérivée Φ'.

2. Soient G et K les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad G(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2} \quad \text{et} \quad K(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}.$$

a. Déterminer les limites des fonctions Φ, G et K en $+\infty$.

b. Déterminer les sens de variation des fonctions $G - \Phi$ et $\Phi - K$.

c. En déduire : $\quad \forall x \in]0\,;+\infty[, \quad G(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant K(x)$.

d. Montrer : $\quad \Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

3. Soit X une variable aléatoire normale d'espérance égale à 0 et d'écart-type égal à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

a. Pour tout réel x strictement positif, exprimer la probabilité $\mathrm{P}(X \leqslant x)$ à l'aide de la fonction Φ.

b. Soit c un réel strictement positif.
Pour tout réel x, on considère la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{(X>x)}(X \leqslant x + c)$.
Montrer : $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{P}_{(X>x)}(X \leqslant x+c) = 1$.

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code épreuve : 295

Concepteur : EMLYON Business School

1[ère] épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 2 mai 2011 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Partie I : Somme de variables aléatoires suivant la loi exponentielle de paramètre 1

1. Rappeler une densité, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre égal à 1.

On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes, qui suivent la loi exponentielle de paramètre égal à 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la variable aléatoire définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire S_n.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler une densité de S_n.

3. Soit une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,;1]$. Montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(1-U)$ suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.

4. Écrire un programme PASCAL, utilisant le générateur aléatoire PASCAL, simulant la variable aléatoire S_n, l'entier n étant entré par l'utilisateur.

5. Pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, on note N_t la variable aléatoire égale à 0 si l'événement $(S_1 > t)$ est réalisé, et, sinon, au plus grand entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'événement $(S_n \leqslant t)$ est réalisé.

Ainsi, pour tout $t \in]0\,;+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $(N_t = n)$ est égal à l'événement $(S_n \leqslant t) \cap (S_{n+1} > t)$.

Écrire un programme PASCAL, utilisant le générateur aléatoire PASCAL, simulant la variable aléatoire N_t, le réel t étant entré par l'utilisateur.

Partie II : Polynômes de Laguerre

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les applications

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^n \, \mathrm{e}^{-x}}{n!},$$

$$L_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \mathrm{e}^x f_n^{(n)}(x),$$

où $f_n^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f_n.

6. Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad L_0(x),\ L_1(x),\ L_2(x)$.

7. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, L_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient du terme de plus haut degré.

9. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f'_{n+1}(x) = f_n(x) - f_{n+1}(x).$$

10. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x).$$

11. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad f_{n+1}(x) = \frac{x}{n+1} f_n(x).$$

12. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad (n+1)L_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1-x)L_n(x).$$

13. Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad xL''_n(x) - (x-1)L'_n(x) + nL_n(x) = 0.$$

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soit $N \in \mathbb{N}$ fixé. On note E_N le sous-espace vectoriel de E formé des applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à N.

14. Montrer que, pour tout $A \in E$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} A(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ converge.

On considère l'application

$$<.\,,.>: E \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (P,Q) \longmapsto \ < P\,,\,Q > = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

15. Montrer que $<.\,,.>$ est un produit scalaire sur E.

On considère, pour tout $P \in E$, l'application $T(P) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(P)(x) = xP''(x) - (x-1)P'(x).$$

16. Vérifier que T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

17. Montrer que, pour tout $P \in E$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto T(P)(x)\,\mathrm{e}^{-x}$ est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto xP'(x)\,\mathrm{e}^{-x}$.

18. En déduire, pour tout $(P,Q) \in E \times E$:

$$< T(P)\,,\,Q > = -\int_0^{+\infty} xP'(x)Q'(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

19. Établir : $\forall (P,Q) \in E \times E, \quad < T(P)\,,\,Q > = < P\,,\,T(Q) >$.

20. En utilisant le résultat de la question **13**, calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(L_n)$.

21. En déduire que la famille $(L_0, ..., L_N)$ est orthogonale.

22. Montrer :

$$\forall P \in E_N, \quad T(P) \in E_N.$$

On note T_N l'endomorphisme induit par T sur E_N, c'est-à-dire l'endomorphisme T_N de E_N défini par :

$$\forall P \in E_N, \quad T_N(P) = T(P).$$

23. Montrer que $(L_0, ..., L_N)$ est une base de E_N.

24. Donner la matrice de T_N dans la base $(L_0, ..., L_N)$ de E_N.

25. Est-ce que T_N est diagonalisable ? Est-ce que T_N est bijectif ?

Partie IV : Nature d'une série de maximums

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application

$$g_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^n \, \mathrm{e}^{-x}}{n!}.$$

26. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n admet un maximum, noté M_n, et calculer M_n.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mu_n = \sqrt{n}\, M_n$ et $a_n = \ln \mu_{n+1} - \ln \mu_n$.

27. Former le développement limité de a_n à l'ordre 2 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

28. En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$.

29. Établir que la suite $(\mu_n)_{n \geqslant 1}$ converge et que sa limite est strictement positive.

30. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} M_n$?

Partie V : Étude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

On considère les applications

$$f :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x\,\mathrm{e}^{-x},$$
$$F :]0\,;+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto f(x) + f(y) - f(x+y).$$

31. Montrer que F est de classe C^2 sur l'ouvert $]0\,;+\infty[^2$ et exprimer, pour tout $(x,y) \in]0\,;+\infty[^2$, les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ en fonction de $f'(x)$, $f'(y)$ et $f'(x+y)$.

32. Établir que, pour tout $a \in]0\,;+\infty[$, l'équation $f'(x) = f'(a)$, d'inconnue $x \in]0\,;+\infty[$, admet au plus une solution distincte de a.

33. En déduire que, pour tout $(x,y) \in]0\,;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x = y \qquad \text{et} \qquad f'(x) = f'(2x).$$

34. Montrer que F admet un point critique et un seul, noté (α, α), et montrer que $1 < \alpha < 2$.

35. Montrer : $f''(\alpha) < 0$ et $f''(2\alpha) > 0$.

36. Montrer que F admet un extremum local, et un seul. Déterminer la nature de cet extremum.

★ ★ ★

Code épreuve : 295

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2012 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geqslant 2$.
On confond polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ ou sur $[0\,;+\infty[$ ou sur $]0\,;+\infty[$.
On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

Partie I : Interpolation polynomiale

Soient $a_1, ..., a_n$ des réels deux à deux distincts. On note

$$\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \longmapsto \varphi(P) = \big(P(a_1), ..., P(a_n)\big).$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.

2. En déduire que, pour tout $(b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ unique tel que :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad P(a_i) = b_i.$$

3. *Exemple :*
Déterminer le polynôme P_0 de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$P_0(0) = 1, \quad P_0(1) = 3, \quad P_0(2) = 11, \quad P_0(3) = 31.$$

Partie II : Polynômes spéciaux

On considère l'ensemble E des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[, \quad \big(P(x) > 0 \ \text{ et } \ P'(x) > 0\big).$$

1. Donner un exemple d'élément de E.

2. Montrer que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha \in]0\,;+\infty[$ et tous $P, Q \in E$, on a :

$$\alpha P \in E, \quad P + Q \in E, \quad PQ \in E.$$

Est-ce que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

3. Soit $P \in E$. On note $\quad P_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$

Montrer : $\quad P_1 \in E$.

4. Soit $P \in E$. Montrer : $\quad \forall x \in [0\,;+\infty[, \quad P(x) \geqslant P(0)$.

Pour tout $P \in E$, on note $\widetilde{P} : [0\,;+\infty[\longrightarrow [P(0)\,;+\infty[, \quad x \longmapsto \widetilde{P}(x) = P(x)$.

5. Montrer que l'application $\widetilde{P}$ est bijective.

6. Si, de plus, P est de degré au moins 2, est-ce que l'application réciproque $\widetilde{P}^{-1}$ de $\widetilde{P}$ est une application polynomiale ?

Partie III : Matrices symétriques positives

On note $\mathbf{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques A de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall U \in \mathbf{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^t U A U \geqslant 0.$$

Soit A une matrice symétrique de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$? Justifier.

2. **a.** Montrer que si A est dans $\mathbf{S}_n^+$, alors toutes les valeurs propres de A sont dans $[0\,;+\infty[$.

b. Réciproquement, montrer que si toutes les valeurs propres de A sont dans $[0\,;+\infty[$, alors A est dans $\mathbf{S}_n^+$.

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

Soit $P \in E$ de degré $n-1$ (l'ensemble E a été défini dans la partie **II**), et soit $A \in \mathbf{S}_n^+$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, appartenant toutes à $[P(0)\,;+\infty[$.

On note D la matrice diagonale de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont successivement $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et Q une matrice inversible de $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$.

On se propose de résoudre l'équation $\ P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_n^+$.

1. On suppose que l'équation $P(S) = A$ a une solution dans $\mathbf{S}_n^+$.

Soit S appartenant à $\mathbf{S}_n^+$ telle que $P(S) = A$. On note $\Delta = Q^{-1} S Q$.

a. Montrer que $SA = AS$ et en déduire que $\Delta D = D\Delta$.

b. Démontrer que Δ est diagonale et que les éléments diagonaux de Δ sont tous positifs ou nuls.

2. Établir que l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_n^+$, admet une solution et une seule, et que celle-ci est $Q\Delta Q^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale que l'on exprimera à l'aide de $\widetilde{P}^{-1}(\lambda_1), \ldots, \widetilde{P}^{-1}(\lambda_n)$, où $\widetilde{P}$ a été définie dans la partie II.

3. *Exemple :*

On prend ici $n = 4$, $P = \mathrm{X}^3 + \mathrm{X} + 1$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 21 \end{pmatrix}$.

a. Vérifier $P \in E$.

b. Déterminer les valeurs propres de A et montrer : $A \in \mathbf{S}_4^+$.

c. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $A = QDQ^{-1}$.

d. Résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in \mathbf{S}_4^+$.